一个含参数的七重五点对偶插值型细分

薛靖儒,王佳怡, 亓万锋*

辽宁师范大学,数学学院,辽宁 大连

收稿日期: 2025年6月21日; 录用日期: 2025年7月15日; 发布日期: 2025年7月23日

摘要

在细分技术领域,对偶插值细分作为一类新兴细分范式,展现出独特的构造机理与应用价值。与传统细 分模式不同,其通过特殊拓扑规则实现极限曲线对原始控制网格的精确插值,突破了逐次插值的传统框架。本文提出一种参数化的七重五点对偶插值细分方案,系统分析了格式的连续性特征,保障生成曲线 的平滑衔接性能;同时探究了其多项式再生属性,并通过计算极限函数的Hölder指数,评估该格式的正 则性与光滑度水平。

关键词

对偶型细分,七重五点细分,连续性,多项式再生性,Hölder指数

A Parameterized 7-Ary Five-Point Dual Interpolatorty Subdivision

Jingru Xue, Jiayi Wang, Wanfeng Qi*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jun. 21st, 2025; accepted: Jul. 15th, 2025; published: Jul. 23rd, 2025

Abstract

In the research of subdivision technology, the dual-type subdivision scheme, as a new-type subdivision scheme, has a unique construction method and application characteristics. Different from the traditional subdivision schemes, it adopts specific rules, and the limit curve precisely interpolates the original control mesh, breaking the conventional step-by-step interpolatory mode. This paper constructs a dual-type 7-ary five-point subdivision scheme with parameter adjustment function, analyzes the continuity of this scheme, and ensures that the generated curve can achieve a smooth transition effect. Meanwhile, it studies its polynomial reproduction property and calculates the

*通讯作者。

Hölder exponent of the limit function to measure the regularity and smoothness of this scheme.

Keywords

Dual-Type Subdivision, 7-Ary Five-Point Subdivision, Continuity, Polynomial Reproduction, Hölder Exponent

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc. This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0). http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

1. 引言

随着计算机技术革新与图形处理效能的提升,细分方法在计算机辅助设计中扮演愈发关键的角色,成 为该领域常用的手段。该技术通过简明的几何与拓扑规则对粗糙网格进行迭代细化,在增加模型细节上目 前细分格式已经应用在很多场景中,在计算机辅助设计领域的作用不断强化。并且随着技术不断进步,细 分格式的应用范围还会扩大,未来会有更广阔的使用空间。在构建模型细节层次、推动精度迭代的同时, 为高精度曲面生成提供支撑。

在细分技术的理论体系中,依据拓扑规则的差异,细分格式可划分为基本型细分[1]与对偶型细分[2]两 大类别。对于基本型细分而言,在生成 *k*+1 层控制网格的过程中,*k* 层的控制顶点会被保留下来,并通过 自身和周围顶点的仿射组合,移动到恰当的位置;同时在网格的边上或面上,利用原 *k* 层的控制顶点的仿 射组合生成新顶点,新旧控制顶点按照特定方式连接,形成更细密的网格,共同组成 *k*+1 层控制网格。而 对偶型细分的过程和基本型存在显著区别,在从 *k* 层向 *k*+1 层细分时,通过 *k* 层的控制顶点"点分裂"机 制,生成更多 *k*+1 层控制顶点。这些新生成的顶点增加了模型的顶点数量,提升了模型的顺滑度。

近年来,对偶插值型细分领域的研究一直在进行,许多学者围绕对偶型细分的极限曲线与控制多边 形关系等关键问题展开探索。在细分格式的研究中,学者们针对对偶插值型细分展开研究,取得了一系 列成果。2018年,Deng等人[3]采用极限分析方法,针对2重2n点对偶型细分格式展开研究,发现在逼 近无限迭代情形时,极限曲线具备插值闭合初始控制网格的特性。2019年,Romani [4]创新性提出对偶 插值型细分概念,借助算法设计,成功构建出4重对偶插值型细分的构造路径。2020年,Romani和Viscardi [5]聚焦任意重数曲线对偶插值型细分的特性,深入分析并搭建起对应的构造方法体系。2022年,Gemignani等人[6]基于代数理论分析,明确对偶插值型细分需满足的代数条件,结合多项式方程求解,给出了 具体构造算法。2023年,Viscardi [7]针对偶数重与奇数重对偶插值型细分开展对比研究,揭示奇数重对 偶插值型细分与经典基本型插值型细分的内在关联。当前,对偶插值型细分的研究仍有拓展空间,其理 论架构与实际应用范畴都尚未发展成熟,仍需进一步的探索与完善。基于此,本文提出一种新的七重五 点对偶插值型细分方法,该方法配置有一个可灵活调节的参数。

2. 预备知识

设定初始控制点集 $P^0 = \{P_j^0 \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{Z}\}$,其中 d 表示空间维度, \mathbb{Z} 为整数集。通过逐次插入新点构 建细分曲线,将第 k 次细分后的控制顶点集合记为 $P^k = \{p_j^k \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{Z}\}$ 。此时, m 重细分格式可通过如 下公式表示

$$P_i^{k+1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{i-mj} P_j^k, i\in\mathbb{Z},$$

其中 $a = \{a_i | i \in \mathbb{Z}\}$ 被定义为细分格式的掩模,它决定每次细分过程中新控制点的生成规则。若将细分格式记作*S*,则*S*的生成多项式可表示为 $a(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i$ 。

插值细分格式是细分格式的一种特殊形式,其一般表达式为

$$\begin{cases} P_{mi}^{k+1} = P_i^k, \\ P_{mi+j}^{k+1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{mi+j-ml} P_l^k, j = 0, 1, \cdots, m-1. \end{cases}$$

这种格式的特点在于,第k层的控制顶点 P_i^k 的被精确的保留在了第k+1层的控制网格上。

当 m 重细分格式 S 一致收敛时, 意味着随着细分次数增加, 细分曲线会逐渐逼近一条确定的极限曲 线。此时, 其掩模 $a = \{a_i | i \in \mathbb{Z}\}$ 需要满足条件

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{mi+j} = 1, \, j = 0, 1, \cdots, m-1.$$
(2.1)

这一条件是确保细分格式收敛与稳定的基础,对研究细分曲线的性质及应用具有重要意义。

引理 2.1 [8]. 若 *m* 重细分格式 *S* 的掩模 $a = \{a_i | i \in \mathbb{Z}\}$ 满足(2.1)式形式存在,存在一阶差分格式 S_1 , 它满足关系

$$A^{(1)}(z) = \frac{A(z) - A(1)}{z - 1}$$

其中, $A^{(1)}(z)$ 为一阶差分格式的生成多项式。此外,细分S一致收敛的充要条件为对任意初始控制网格,细分 $\frac{1}{m}S_1$ 均收敛至零函数。

通常,将S的n阶差分格式记为 S_n ,其对应掩模为 $a^{(n)} = \left\{a_i^{(n)}\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$,则 S_n 的生成多项式为

$$a^{(n)}(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a^{(n)}_i z^i = \left(\frac{mz^{m-1}}{1+z+\cdots+z^{m-1}}\right)^n a(z).$$

该公式揭示了 n 阶差分格式的生成多项式与原始细分格式 S 的生成多项式 a 的内在联系,借助这一关系可以进一步探究细分格式在不同阶差分下的性质和特点。

引理 2.2 [8]. 若 *m* 重细分格式 *S* 存在掩模 $a = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 及差分格式 $S_j(j = 1, 2, \dots, n+1)$, 且 $\frac{1}{m}S_{n+1}$ 对任意 初始控制网格 f^0 都收敛到零函数,则*m* 重细分格式 *S* 是 *C*ⁿ 连续的。

为证明细分 *S* 是 *Cⁿ* 连续, 依据引理 2.2, 只需证明 *n*+1 阶差分细分 *S*_{*n*+1} 的存在, 且满足 $\left\|\frac{1}{m}S_{n+1}\right\|_{\infty} < 1$, 其中

$$\left\|\frac{1}{m}S_{n+1}\right\|_{\infty} = \frac{1}{m}\max\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|a_{i+m^{L}j}^{(n+1)}\right|, j=0,1,\cdots,m^{L}-1\right\}.$$

据此,可判断细分格式S是否是C"连续的。

细分格式的多项式再生性是一个重要性质,是衡量格式好坏的一个重要标准。

定义 1 [9] (多项式再生性)若细分格式 S 收敛,且对于任意多项式 $p \in \pi_d$ 以及初始点集 $P_i^0 = p(t_i^0), i \in \mathbb{Z}$, 有 $S^{\infty}P^0 = p$,那么,该细分格式能再生 d 阶多项式。

再生性的充要条件可通过生成函数的导数值来确定。

引理 2.3 [10]考虑控制顶点 $P_i^k(i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0)$,其中 Z 表示整数集, \mathbb{N}_0 表示非负整数集,关联的参数 值由以下公式确定

DOI: 10.12677/aam.2025.147360

$$t_i^k = t_0^k + \frac{i}{m^k}, t_0^k = t_0^{k-1} - \frac{\tau}{m^k}.$$

其中 $\tau = \frac{a'(1)}{m}$ 为对应的参数平移量。对于收敛的细分格式 S_a ,在该参数化体系下,实现d次多项式再生的充要条件为对 $k = 0, \dots, d$,满足以下两个条件:

$$a^{(k)}(1) = m \prod_{l=0}^{k-1} (\tau - l), a^{(k)}(\zeta_m^j) = 0, j = 1, \cdots, m-1,$$

其中 $\zeta_m^j = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}j\right)$, *i*为虚数单位。

3. 七重五点细分格式的创新构建

1) 满足插值条件

七重五点细分格式为插值型细分, 需满足:

设 φ 是一个收敛细分格式的基本极限函数,该细分格式的重数 $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ (即m为自然数且m不等于0和1),具有紧支撑掩模 $a = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 以及子符号 $A_k(z), k \in \mathbb{Z}$ 。那么,对于每个满足 $\tau T \in \mathbb{N}$ 的 $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,以下多项式恒等式成立:

$$\sum_{\gamma=0}^{mT-1} \Phi_{T,\gamma}\left(z^{m}\right) = mz^{-\tau T} \sum_{\beta=0}^{m-1} \sum_{\substack{\gamma=0\\\gamma+\beta T \equiv m\tau T}}^{mT-1} A_{\beta}\left(z^{T}\right) \Phi_{T,\gamma}\left(z\right),$$

其中

$$\Phi_{T,n}(z) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(mk + \frac{n}{T}\right) z^{mTk+n}, n \in \mathbb{Z},$$

满足对偶条件

对偶型细分要求生成多项式满足: $a(z) = \sum_{i=-16}^{17} a_i z^i$, 掩模的对称中心是 $\frac{1}{2}$ 。

满足对称条件

掩模系数满足对称性: $a_i = a_{1-i}(i=1,2,\dots,17)$, 如 $a_{-16} = a_{17}$ 、 $a_{-14} = a_{15}$ 、…、 $a_0 = a_1$ 。

在细分格式的前期探索实践中,我们曾尝试采用全五点细分格式为基础开展构建与验证工作。然而, 通过理论分析与实验表明,该方案在维持细分过程的精度、稳定性及对复杂数据结构的适应性方面存在 明显不足,未能达到预期的细分效果。相比之下,以下所呈现的七重五点细分格式凭借更为精巧的规则 设计,有效解决了上述问题,在细分性能及实际应用效果上展现出明显优势,其具体加细规则如下:

$$P_{7i^{k+1}}^{k+1} = a_{14}P_{i-2}^{k} + a_{7}P_{i-1}^{k} + a_{0}P_{i}^{k} + a_{-7}P_{i+1}^{k} + a_{-14}P_{i+2}^{k},$$

$$P_{7i+1}^{k+1} = a_{15}P_{i-2}^{k} + a_{8}P_{i-1}^{k} + a_{1}P_{i}^{k} + a_{-6}P_{i+1}^{k} + a_{-13}P_{i+2}^{k},$$

$$P_{7i+2}^{k+1} = a_{16}P_{i-2}^{k} + a_{9}P_{i-1}^{k} + a_{2}P_{i}^{k} + a_{-5}P_{i+1}^{k} + a_{-12}P_{i+2}^{k},$$

$$P_{7i+3}^{k+1} = a_{17}P_{i-2}^{k} + a_{10}P_{i-1}^{k} + a_{3}P_{i}^{k} + a_{-4}P_{i+1}^{k} + a_{-11}P_{i+2}^{k},$$

$$P_{7i+4}^{k+1} = a_{11}P_{i-1}^{k} + a_{4}P_{i}^{k} + a_{-3}P_{i+1}^{k} + a_{-10}P_{i+2}^{k},$$

$$P_{7i+5}^{k+1} = a_{12}P_{i-1}^{k} + a_{5}P_{i}^{k} + a_{-2}P_{i+1}^{k} + a_{-9}P_{i+2}^{k} + a_{-16}P_{i+3}^{k},$$

$$P_{7i+6}^{k+1} = a_{13}P_{i-1}^{k} + a_{6}P_{i}^{k} + a_{-1}P_{i+1}^{k} + a_{-8}P_{i+2}^{k} + a_{-15}P_{i+3}^{k},$$

$$P_{7i+6}^{k+1} = a_{13}P_{i-1}^{k} + a_{6}P_{i}^{k} + a_{-1}P_{i+1}^{k} + a_{-8}P_{i+2}^{k} + a_{-15}P_{i+3}^{k},$$

其中 a_i ,i = -16, -14, \cdots , 17为掩模, 满足 $a_i = a_{1-i}$, $i = 1, 2, \cdots, 17$, a_{-16} 到 a_0 依次为

(. . .

ω	$4\omega + \mu$ 199	$+64\omega + 16\mu$ -	$-193 + 32\omega + 8\mu$	$-187 + 64\omega + 16\mu$	ι -285+16 ω	
343,	343 ,	49392,	24696	, 5488	-,,,,	
1	$-345 - 64\omega$	$-275 - 256\omega$	-64μ $-1849-2$	$256\omega - 64\mu$ 2849	$-256\omega - 64\mu$	
$-\frac{16}{16}$	5488	, 5488	,49	,,,,,	49392,	
1275	$-256\omega - 64$	$\mu 2185 - 64\omega$	9 3(1311+32	(2ω) 4675+384 ω -	+96µ 16193+1	$28\omega + 32\mu$
	5488	_,	,16, 5488	,	,16	5464

3.1. 光滑性分析

依托引理 2.2 的理论支撑,对七重五点细分格式(3.1)生成极限曲线的收敛性判断与光滑性条件展开 系统推导与验证。

七重五点细分格式(3.1)的生成多项式为

$$a(z) = \frac{z^{-16}}{49392} (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)^4 (1 + z) (199z^2 - 1381z^3 + 2436z^4 - 1381z^5 + 199z^6 + 144\omega - 144\omega z - 1232\omega z^2 + 3920\omega z^3 - 5376\omega z^4 + 3920\omega z^5 - 1232\omega z^6 - 144\omega z^7 + 144\omega z^8 + 144\mu z - 704\mu z^2 + 1520\mu z^3 - 1920\mu z^4 + 1520\mu z^5 - 704\mu z^6 + 144\mu z^7).$$

定理 3.1 当参数 ω 和 μ 满足表1中的约束关系时,细分格式(3.1)可实现 C^0 到 C^2 连续。 证明:对原函数一阶差分细分序列进行分组求和,

DOI: 10.12677/aam.2025.147360

 $\frac{64\omega}{441} - \frac{16\mu}{441} + \frac{313}{882} \bigg| + \bigg| \frac{32\omega}{441} + \frac{8\mu}{441} - \frac{1}{9} \bigg| + \bigg| \frac{32\omega}{441} + \frac{8\mu}{441} - \frac{89}{882} \bigg|,$

$$\begin{split} & \left| -\frac{64\omega}{441} - \frac{16\mu}{441} + \frac{313}{882} \right| + \left| \frac{32\omega}{441} + \frac{8\mu}{441} - \frac{1}{9} \right| + \left| \frac{32\omega}{441} + \frac{8\mu}{441} - \frac{89}{441} \right| + \frac{89}{441} - \frac{89}{441} + \frac{89}{441} + \frac{89}{441} + \frac{197}{441} + \frac{197}{3528} \right|, \\ & \left| -\frac{59\omega}{441} - \frac{17\mu}{441} + \frac{199}{7056} \right| + \left| -\frac{59\omega}{441} - \frac{17\mu}{441} + \frac{415}{7056} \right| + \left| \frac{118\omega}{441} + \frac{34\mu}{441} + \frac{197}{3528} \right|, \\ & \left| -\frac{4\omega}{49} - \frac{2\mu}{49} + \frac{9}{98} \right| + \left| \frac{2\omega}{49} + \frac{\mu}{49} \right| + \left| \frac{2\omega}{49} + \frac{\mu}{49} + \frac{5}{98} \right| \right\}. \\ & \mathbb{X} \notin \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \left\| \frac{1}{7} S_2 \right\|_{\infty} < 1, \quad \Pi \oplus -\frac{59\omega}{64} < \omega < -\frac{1649}{400} \oplus \frac{-191-128\omega}{32} < \mu < \frac{51-8\omega}{4} \oplus \frac{-1649}{400} < \omega < \frac{19}{32} \oplus \frac{1}{272} \\ & \left| \frac{-191-128\omega}{272} < \mu < \frac{1819-944\omega}{272} \oplus \frac{1819-944\omega}{272} & \left| \frac{1819-944\omega}{272} & \left| \frac{1487}{400} < \omega < \frac{1003}{80} \right| \oplus \frac{1}{272} \\ & \left| \frac{-47-8\omega}{4} < \mu < \frac{1819-944\omega}{272} & \left| \mathbb{R} \oplus \Pi \oplus 2.2 \right|, \quad \text{ubt} \oplus \oplus \Lambda \oplus \Pi(3,1) \oplus \mathbb{C}^{1} \mathbb{K}^{2} \\ & \left\| \frac{1}{7} S_3 \right\|_{\infty} = \max \left\{ \frac{|\omega|}{7} + \left| -\frac{2\omega}{7} - \frac{\mu}{7} + \frac{1}{7} \right| + \left| \frac{\omega}{7} + \frac{\mu}{7} \right|, \left| \frac{|\omega|}{7} + \left| -\frac{2\omega}{7} - \frac{\mu}{7} + \frac{1}{7} \right| + \left| \frac{\omega}{7} + \frac{\mu}{7} \right|, \\ & \left| -\frac{11\omega}{9} - \frac{26\mu}{63} + \frac{199}{1008} \right| + \left| \frac{11\omega}{9} + \frac{26\mu}{63} - \frac{55}{1008} \right|, \left| -\frac{13\omega}{9} - \frac{25\mu}{63} - \frac{1641}{144} \right| \\ & + \left| \frac{13\omega}{9} + \frac{25\mu}{63} - \frac{983}{1008} \right|, \frac{1}{7}, \left| -\frac{13\omega}{9} - \frac{25\mu}{63} - \frac{161}{108} \right|, \\ & \left| -\frac{11\omega}{9} - \frac{26\mu}{63} + \frac{199}{1008} \right| + \left| \frac{11\omega}{9} + \frac{26\mu}{63} - \frac{55}{1008} \right| \right\}. \\ \\ \mathbb{K} \ \# \ \mathbb{K} \ \oplus \ \mathbb{K} \ \oplus \ \mathbb{K} \ \oplus \ \mathbb{K} \ \oplus \ \mathbb{K} \ \frac{1}{17} S_3 \right|_{\infty} < 1, \quad \omega < \frac{1751}{1056} \ \mathbb{H} \ \frac{551-1456\omega}{400} < \mu < \frac{631-1232\omega}{416} \ \oplus \ \frac{1751}{1056} < \omega < \frac{1879}{816} \ \mathbb{H} \\ -3-\omega < \mu < \frac{631-1232\omega}{416} \ \oplus \ \mathbb{H} \ \mathbb{H} 2.2 \ \mathbb{H} \ \mathbb{H}$$

Table 1. Values of ω	and μ	satisfying	C^0	to	C^2	continuity
表 1. $C^0 \sim C^2$ 连续性满足时 ω, μ 的取值						

参数区间	连续性
$\begin{split} & -\frac{799}{16} < \omega < \frac{577}{64} \boxplus \frac{-2587 - 256\omega}{64} < \mu < \frac{581 - 48\omega}{16} , \\ & \frac{577}{64} < \omega < \frac{1263}{64} \boxplus \frac{-791 - 48\omega}{16} < \mu < \frac{581 - 48\omega}{16} , \\ & \frac{1263}{64} < \omega < \frac{573}{16} \boxplus \frac{-791 - 48\omega}{16} < \mu < \frac{3587 - 256\omega}{64} . \end{split}$	C^0
$\begin{split} & -\frac{599}{64} < \omega < -\frac{1649}{400} \boxplus \frac{-191 - 128\omega}{32} < \mu < \frac{51 - 8\omega}{4} , \\ & -\frac{1649}{400} < \omega < \frac{19}{32} \boxplus \frac{-191 - 128\omega}{32} < \mu < \frac{1819 - 944\omega}{272} , \\ & \frac{19}{32} < \omega < \frac{1487}{400} \boxplus \frac{-1709 - 944\omega}{272} < \mu < \frac{1819 - 944\omega}{272} , \\ & \frac{1487}{400} < \omega < \frac{1003}{80} \boxplus \frac{-47 - 8\omega}{4} < \mu < \frac{1819 - 944\omega}{272} \circ \end{split}$	C^1

$\begin{aligned} & -\frac{23}{112} < \omega < \frac{1751}{1056} \pm \frac{551 - 1456\omega}{400} < \mu < \frac{631 - 1232\omega}{416} , \\ & \frac{1751}{1056} < \omega < \frac{1879}{816} \pm -3 - \omega < \mu < \frac{631 - 1232\omega}{416} . \end{aligned}$	
--	--

3.2. Hölder 指数

在本节中,研究当参数在-5<ω<5且-5<μ<5范围内,细分格式对应的极限函数的 Hölder 指数。 计算以步长为1进行,借助 Matlab 程序包 ttoolbox 工具箱[12] [13]完成。图 1 展示了 Hölder 指数的可视 化结果。三维图显示 Hölder 指数随 ω 变化呈现先上升后下降态势,在ω接近0时达到峰值,这意味着在 该区域细分后极限曲线的光滑性最佳。等高线图则展示了不同ω和μ组合下 Hölder 指数的分布,为评估 细分格式的正则性与光滑程度提供了直观依据,揭示了参数ω,μ对细分方案光滑性的影响规律。



Figure 1. The Hölder exponent intervals and exponent contour lines corresponding to the dual interpolatory subdivision scheme (3.1) 图 1. 对偶插值细分格式(3.1)对应的 Hölder 指数区间和指数等高线



Figure 2. The basis function graphs of the dual interpolatory subdivision scheme (3.1) 图 2. 对偶插值细分格式(3.1)的基函数图象

图 2 给出了若干ω和μ取值下基函数的图象。可看出基函数取不同参数时,光滑性不同,函数族表现出丰富的多样性,这为其在诸多应用场景中提供了更为多元的选择与可能。另外,可以看到这些基函数的最大值均为 1,印证了细分格式(3.1)是插值型细分格式。

3.3. 细分多项式再生性

本节基于引理 2.3,对七重五点细分格式的多项式再生次数展开研究。 定理 3.2 七重五点细分格式的多项式再生次数为 3 次。 证明:对该细分生成多项式 *a*(*z*)求一阶导,并代入 *z* =1 得到

$$a'(1) = \frac{7}{2}.$$

由此得

$$\tau = \frac{a'(1)}{7} = \frac{1}{2}$$

进一步推导得: a(1)=7, $\frac{1}{7}a'(1)=\tau$, $\frac{1}{7}a''(1)=-\frac{1}{4}=\tau(\tau-1)$, $\frac{1}{7}a'''(1)=\frac{3}{8}=\tau(\tau-1)(\tau-2)$, 但 $\frac{1}{7}a^{(4)}(1)\neq-\frac{15}{16}=\tau(\tau-1)(\tau-2)(\tau-3)$ 。对于 j=1,2,3, k=0,1,2,3, 有 $a^{(k)}\left(\exp\left(\frac{2\pi I}{4}j\right)\right)=0$ 。依据引理 2.3 递推验证高阶导数的再生性,可知a(z)的最大再生次数为 3 次。

3.4. 数值算例



Figure 3. Limit curves generated by the subdivision scheme (3.1) with $\omega = 2$ and $\mu = -4.5$ 图 3. 由细分格式(3.1)生成的极限曲线($\omega = 2, \mu = -4.5$)

图 3 展示了细分格式(3.1)在 ω = 2, μ = -4.5 参数下的生成效果,上图为一次细分,下图为三次细分。 该七重五点细分格式以初始控制网格(蓝色线条与节点)为起点,经细分迭代生成光滑的极限曲线(红色曲 线),体现了该格式对多元几何形状控制网格的处理能力,实现了从离散网格到连续曲线的转变。从细分 层级来看,上图为一次细分结果,下图为三次细分结果。可以明显观察到,随着细分次数增加,曲线细 节更丰富、形态更流畅。细分次数达到 3 次时,所得控制网格在视觉上已较好地趋近于对原始控制网。 通过调控参数 *o* 和 *u*,可灵活改变曲线的弯曲程度和平滑度等特征,从而满足多样化的造型设计需求。

该七重五点格式在多分辨率编辑、纹理映射与信号重建中具备实用优势,其七重分裂机制可在相同 迭代次数下生成更密集网格,依托3次多项式再生能力,结合参数ω、μ,能较快速实现曲线高分辨率, 又因其作为极限插值格式,不仅可以较好的保留初始控制网格的几何特征,也具有一定的光滑度。

参考文献

- [1] Loop, C. (1987) Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles. The University of Utah.
- [2] Dyn, N., Levin, D. and Gregory, J.A. (1987) A 4-Point Interpolatory Subdivision Scheme for Curve Design. Computer Aided Geometric Design, 4, 257-268. <u>https://doi.org/10.1016/0167-8396(87)90001-x</u>
- [3] Deng, C., Xu, H., Ma, W. and Li, Y. (2019) Repeated Local Operations and Associated Interpolation Properties of Dual 2n-Point Subdivision Schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 349, 344-353. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.09.030
- [4] Romani, L. (2019) Interpolating M-Refinable Functions with Compact Support: The Second Generation Class. Applied Mathematics and Computation, 361, 735-746. <u>https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.018</u>
- [5] Romani, L. and Viscardi, A. (2020) Dual Univariate Interpolatory Subdivision of Every Arity: Algebraic Characterization and Construction. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 484, Article 123713. <u>https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123713</u>
- [6] Gemignani, L., Romani, L. and Viscardi, A. (2022) Bezout-Like Polynomial Equations Associated with Dual Univariate Interpolating Subdivision Schemes. *Advances in Computational Mathematics*, **48**, Article No. 4.
- [7] Viscardi, A. (2023) Optimized Dual Interpolating Subdivision Schemes. Applied Mathematics and Computation, 458, Article 128215. <u>https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.128215</u>
- [8] Aspert, N. (2003) Non-Linear Subdivision of Univariate Signals and Discrete Surfaces. Swiss Federal Institute of Technology in Lausanne.
- [9] Dyn, N., Hormann, K., Sabin, M.A. and Shen, Z. (2008) Polynomial Reproduction by Symmetric Subdivision Schemes. *Journal of Approximation Theory*, 155, 28-42. <u>https://doi.org/10.1016/j.jat.2008.04.008</u>
- [10] Conti, C. and Hormann, K. (2011) Polynomial Reproduction for Univariate Subdivision Schemes of Any Arity. *Journal of Approximation Theory*, 163, 413-437. <u>https://doi.org/10.1016/j.jat.2010.11.002</u>
- [11] Dyn, N. (1992) Subdivision Schemes in Computer-Aided Geometric Design. In: Advances in Numerical Analysis, Oxford University Press, 36-104. <u>https://doi.org/10.1093/oso/9780198534396.003.0002</u>
- [12] Charina, M. and Mejstrik, T. (2019) Multiple Multivariate Subdivision Schemes: Matrix and Operator Approaches. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **349**, 279-291. <u>https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.08.013</u>
- [13] Guglielmi, N. and Protasov, V. (2013) Exact Computation of Joint Spectral Characteristics of Linear Operators. *Foun*dations of Computational Mathematics, 13, 37-97. <u>https://doi.org/10.1007/s10208-012-9121-0</u>