

基于广义共轭的约束优化问题推广的Farkas引理及Lagrange对偶

吴柯幸

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2025年6月25日; 录用日期: 2025年7月19日; 发布日期: 2025年7月28日

摘 要

利用广义共轭上图性质, 引入新的约束规范条件, 等价刻画了约束优化问题推广的Farkas引理。然后, 定义了基于广义共轭的Lagrange对偶问题, 建立了约束优化问题与其对偶问题之间的Lagrange强对偶及稳定强对偶, 推广和改进了前人的相关结论。

关键词

C-共轭, Farkas引理, 强对偶

Generalized Farkas' Lemma and Lagrange Duality for Constrained Optimization Problems Based on Generalized Conjugacy

Kexing Wu

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jun. 25th, 2025; accepted: Jul. 19th, 2025; published: Jul. 28th, 2025

Abstract

By utilizing the properties of generalized conjugate upper graphs and introducing new constraint qualification conditions, the generalized Farkas lemma for constrained optimization problems is equivalently characterized. Then, the Lagrange dual problem based on generalized conjugates is defined, and the Lagrange strong duality and stable strong duality between the constrained optimization problem and its dual problem are established, which generalizes and improves the relevant conclusions of predecessors.

文章引用: 吴柯幸. 基于广义共轭的约束优化问题推广的 Farkas 引理及 Lagrange 对偶[J]. 应用数学进展, 2025, 14(7): 284-292. DOI: 10.12677/aam.2025.147364

Keywords

C-Conjugate, Farkas' Lemma, Strong Duality

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 T 是任意索引集, X 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, M 是 X 中的非空凸子集, $f, f_t: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, t \in T$ 是真函数. 许多实际问题都可以看作或者转化为如下带不等式约束的优化问题

$$\inf f(x) \quad (P_f), \quad \text{s.t. } f_t(x) \leq 0, t \in T. \quad \text{学者对经典约束优化问题的 Farkas 引理和对偶理论进行了深入的研究, 并得}$$

$$x \in M$$

到了一系列有意义的结论(参看文[1]-[5])。

许多学者针对优化问题的推广 Farkas 引理寻找满足不等式的条件, 文献[6]给出了新的 Farkas 引理的应满足的不等式

$$\left[f(x) \geq \alpha \forall x \in A \right] \Leftrightarrow \left[\exists (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)} \text{ s.t. } f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t(x) \geq \alpha \forall x \in M \right].$$

同时研究了 Lgrange 对偶成立的充分条件。

学者们经常使用 Fenchel 共轭定义经典约束优化问题的约束规范条件和对偶问题. 特别地, 许多学者利用引入新的方法, 使用广义共轭即 c -共轭, 来定义优化问题的约束规范条件和对偶问题(参看文[7]-[11]), 其中 c 是耦合函数。

文献[12]和[13]针对目标函数是凸函数的优化问题, 引入 c -共轭得到了对偶问题及对偶理论. 文献[14]-[18]针对目标函数是拟凸函数的优化问题, 也引入 c -共轭推广了共轭形式和对偶问题形式。

受上述文献启发, 本文主要基于广义共轭, 研究针对问题 (P_f) 的推广的 Farkas 引理和 Lagrange 对偶。

2. 预备知识

设 X 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, 其中拓扑空间是指集合 X 和其上定义的拓扑结构组成的二元组 (X, τ) , X^* 是 X 的共轭空间, 赋予弱*拓扑 $\omega^*(X^*, X)$. $\langle x^*, x \rangle$ 表示泛函 $x^* \in X^*$ 在点 $x \in X$ 的值, 即 $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$. 若 Z 是 X 的凸子集, Z° 表示 Z 的对偶锥, 即

$$Z^\circ := \{x^* \in X^* : \langle x^*, z \rangle \geq 0, \forall z \in Z\}.$$

$N_Z(z_0)$ 表示 Z 在 z_0 点的法锥, 定义为

$$N_Z(z_0) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, z - z_0 \rangle \leq 0, \forall z \in Z\}.$$

对任意的非空集合 T , 令 $\mathbb{R}^T$ 表示定义在 T 上的实值函数组成的空间并赋予乘积拓扑. 记 $\mathbb{R}_+^{(T)} := \{\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}^T : \text{最多只有有限个 } \lambda_t \neq 0\}$, $\mathbb{R}_+^{(T)}$ 为 $\mathbb{R}^{(T)}$ 的非负锥, 即

$$\mathbb{R}_+^{(T)} := \left\{ \lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}^{(T)} : \lambda_t \geq 0, \forall t \in T \right\}$$

令 δ_Z 表示 Z 的示性函数, 定义为

$$\delta_Z(x) := \begin{cases} 0, & x \in Z, \\ +\infty, & x \in X \setminus Z. \end{cases}$$

设 $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 是定义在 X 上的真函数, 分别定义 f 的有效定义域, 上图分别为

$$\text{dom } f := \{x \in X : f(x) < +\infty\},$$

$$\text{epi } f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

特别地, f 的经典共轭的定义为

$$f^*(x^*) := \sup \left\{ \langle x^*, x \rangle - f(x) : x \in X, \forall x^* \in X^* \right\}.$$

本文引入如下定义推广经典共轭。设 $c: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 是一个耦合函数, f 的广义共轭函数即 c -共轭函数 $f^c: Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 定义为

$$f^c(y) := \sup \{c(x, y) - f(x) : x \in X, \forall y \in Y\}.$$

由定义有

$$f(x) + f^c(y) \geq c(x, y), \forall (x, y) \in X \times Y.$$

类似地, $g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 的 c' -共轭函数 $g^{c'}: Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 定义为

$$g^{c'}(x) := \sup \{c(x, y) - g(y) : y \in Y, \forall x \in X\},$$

注意到, 由于 $c'(y, x) = c(x, y)$, 则该定义中的耦合函数 $c': Y \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 与之前一致。

由上述函数上图和 c -共轭函数定义, 可得若 f, h 是真函数, 则

$$f \leq h \Rightarrow f^c \geq h^c \Leftrightarrow \text{epi } f^c \subseteq \text{epi } h^c \quad (2.1)$$

引理 2.1 [19] 设 $c: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 是一个耦合函数, $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 是一个真函数。若对任意 $x \in \text{dom } f$ 和 $r \in \mathbb{R}$, 则

$$\text{epi}(f+r)^c = \text{epi } f^c - (0, r).$$

引理 2.2 [19] 设 $c: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 是一个耦合函数, $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 是真函数使得 $\text{dom } f \cap \text{dom } g \neq \emptyset$ 。若对任意 $u \in X, v, w \in Y$

$$c(u, v) + c(u, w) = c(u, v+w),$$

则下式成立

$$\text{epi } f^c + \text{epi } g^c \subseteq \text{epi}(f+g)^c.$$

3. 约束规范条件

令 A 表示系统 $\{x \in M : f_t(x) \leq 0, \forall t \in T\}$ 的可行解集, 即 $\emptyset \neq A := \{x \in M : f_t(x) \leq 0, \forall t \in T\}$ 。设 T 是任意索引集, X 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, M 是 X 中的非空凸子集, 其中 M 是闭凸集当且仅当它是有限个闭的半空间的交, $f, f_t: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, t \in T$ 是真函数。

借助文献[6]定义的特征锥 K , 本文基于推广的 c -共轭重新定义特征锥 K 如下

$$K := \text{epi}\delta_M^c + \text{cone}\left\{\bigcup_{t \in T} \text{epi}f_t^c\right\}.$$

对于任意 $\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 有 $f + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t \leq f + \delta_A$ ，再结合(2.1)和引理 2.1，则下式成立

$$\begin{aligned} \text{epi}f^c + K &\subseteq \text{epi}f^c + \text{epi}\delta_M^c + \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(\sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \\ &\subseteq \text{epi}f^c + \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(\delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \\ &\subseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(f + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \\ &\subseteq \text{epi}\left(f + \delta_A\right)^c \end{aligned} \quad (3.1)$$

为研究原问题 (P_f) 的推广的 Farkas 引理及 Lagrange 对偶，本文首先引入下列约束规范条件。

定义 3.1 若

$$\text{epi}\left(f + \delta_A\right)^c \subseteq \text{epi}f^c + K.$$

则称 f 满足 *conical epigraph hull property* (简称 *conical (EHP)_f*) 条件。

定义 3.2 若

$$\text{epi}\left(f + \delta_A\right)^c \subseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(f + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c.$$

则称 f 满足 *weak conical epigraph hull property* (简称 *conical (WEHP)_f*) 条件。

由(3.1)可知，

$$\text{conical (EHP)}_f \Rightarrow \text{conical (WEHP)}_f \quad (3.2)$$

4. 推广的 Farkas 引理

设 $\alpha \in \mathbb{R}$ ，研究系统 $\{x \in M, f_t(x) \leq 0 (t \in T), f(x) < \alpha\}$ 的可解性问题等同于研究对系统 $\{f(x) \geq \alpha, \forall x \in A\}$ 的不可解性，用 f 的所有线性扰动函数替代 f ，则进一步等同下列条件

$$f(x) - \langle p, x \rangle \geq \alpha, \forall p \in X^*, x \in A.$$

为进一步研究问题 (P_f) 的可解性问题，本文首先给出如下引理。

引理 4.1 设 $c: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 是一个耦合函数， $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 是一个真函数。对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ ，下列等价式成立

$$\left[f(x) \geq \alpha, \forall x \in A \right] \Leftrightarrow \left[(0, -\alpha) \in \text{epi}\left(f + \delta_A\right)^c \right].$$

证 ($\Rightarrow$)。由示性函数定义可知 $\delta_A(x) = 0$ ，则 $-(f + \delta_A)(x) \leq -\alpha$ 。

当 $x = 0$ 时， $c(0, y) = 0$ ，那么 $c(0, y) - (f + \delta_A)(0) \leq -\alpha$ ，即

$$\sup\{c(0, y) - (f + \delta_A)(0)\} \leq -\alpha.$$

由 c -共轭定义可知， $(f + \delta_A)^c(0) \leq -\alpha$ ，进一步，由上图定义可得 $(0, -\alpha) \in \text{epi}\left(f + \delta_A\right)^c$ 。

($\Leftarrow$)。证明过程与上述类似。证毕。

由(2.2)和引理 4.1 可得引理 4.2。

引理 4.2 若 $(0, -\alpha) \in \text{epi}f^c + K$ ，则 $(0, -\alpha) \in \text{epi}\left(f + \delta_A\right)^c$ 且对任意 $x \in A$ ， $f(x) \geq \alpha$ 成立。

命题 4.3 以下命题等价：

(i) 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$[f(x) \geq \alpha, \forall x \in A] \Leftrightarrow (0, -\alpha) \in \text{epif}^c + K.$$

(ii) 下面条件成立

$$\text{epi}(f + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = (\text{epif}^c + K) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

证 由(2.2)可知, (i) 等价于对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$(0, -\alpha) \in \text{epi}(f + \delta_A)^c \Leftrightarrow (0, -\alpha) \in \text{epif}^c + K \quad (4.1)$$

进一步地, (4.1) $\Leftrightarrow$ (ii), 则(i) $\Leftrightarrow$ (ii)。证毕。

定理 4.4 以下命题等价:

(i) 系统 $\{\delta_M; f_t : t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(EHP)_f$ 条件。

(ii) 对任意 $p \in X^*$, 有

$$\text{epi}(f - p + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = (\text{epi}(f - p)^c + K) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

(iii) 对任意 $p \in X^*$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$[f(x) \geq c(p, x) + \alpha, \forall x \in A] \Leftrightarrow (0, -\alpha - p) \in \text{epif}^c + K.$$

证 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)。由引理 2.1 可知,

$$\text{epi}(f - p)^c = \text{epif}^c + (0, p),$$

则对任意 $p \in X^*$, 有

$$(0, -\alpha) \in \text{epi}(f - p)^c + K \Leftrightarrow (0, -\alpha - p) \in \text{epif}^c + K \quad (4.2)$$

进一步地, 将 $f - p$ 应用于命题 4.2 中, 因此(ii)与(iii)等价。

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)。由引理 2.1 可知,

$$\text{epi}(f - p + \delta_A)^c = \text{epi}(f + \delta_A)^c + (0, p),$$

则有

$$\text{epi}(f - p + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \text{epi}(f + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) + (0, p).$$

由(4.2)可得

$$(\text{epi}(f - p)^c + K) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = (\text{epif}^c + K) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) + (0, p).$$

故(ii)等价于对任意 $p \in X^*$

$$\text{epi}(f + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = (\text{epif}^c + K) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

进一步地, 等价于满足 $\text{conical}(EHP)_f$ 条件, 即 $\text{epi}(f + \delta_A)^c = (\text{epif}^c + K)$ 成立。因此(i)与(ii)等价。证毕。

本文基于 c -共轭给出推广的 Farkas 引理如下:

若对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$(0, -\alpha) \in \text{epi}(f + \delta_A)^c \Leftrightarrow \left[\exists (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)} \text{ s.t. } (0, -\alpha) \in \text{epi}\left(f + \delta_A + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \right] \quad (4.3)$$

则系统 $\{f, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 Farkas 规则。

进一步地, 再由引理 2.1 和引理 4.1 可得若对任意 $p \in X^*$, 有

$$(0, -\alpha + p) \in \text{epi}(f + \delta_A)^c \Leftrightarrow \left[\exists (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)} \text{ s.t. } (0, -\alpha + p) \in \text{epi}\left(f + \delta_A + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \right] \quad (4.4)$$

则系统 $\{f + p, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足稳定 Farkas 规则。

式子(4.3)等价于以下式子

$$\text{epi}(f + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(f + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \quad (4.5)$$

因此, 系统 $\{f, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 Farkas 规则等价于式子(4.5)成立。

类似地, 系统 $\{f + p, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足稳定 Farkas 规则等价于以下式子成立

$$\text{epi}(f - p + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(f - p + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \quad (4.6)$$

定理 4.5 以下命题等价:

- (i) 系统 $\{f, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足稳定 Farkas 规则。
- (ii) 系统 $\{\delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{WEHP})_f$ 条件。

证 由引理 2.1 可知

$$\text{epi}(f - p + \delta_A)^c = \text{epi}(f + \delta_A)^c + (0, p).$$

则有

$$\text{epi}(f - p + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \text{epi}(f + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) + (0, p)$$

类似地, 可得

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(f - p + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(f + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) + (0, p). \end{aligned}$$

因此, 当且仅当

$$\text{epi}(f + \delta_A)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(f + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \quad (4.7)$$

成立时式(4.6)成立。

由于式(4.7)等价于

$$\text{epi}(f + \delta_A)^c = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}\left(f + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t\right)^c$$

成立, 即系统 $\{\delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{WEHP})_f$ 条件。同时, 式(4.6)等价于系统 $\{f, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足稳定 Farkas 规则, 因此(i)与(ii)等价。证毕。

推论 4.6 系统 $\{\delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{EHP})_f$ 条件当且仅当对任意 $p \in X^*$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$ 满足以下命题等价:

- (i) 对任意 $x \in A$, $f(x) \geq \alpha + \langle p, x \rangle$ 。
- (ii) $(0, -\alpha - p) \in \text{epi} f^c + K$ 。
- (iii) 对任意 $x \in M$, 存在 $(\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 使得,

$$f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t(x) \geq c(p, x) + \alpha.$$

证 ($\Rightarrow$)。假设系统 $\{\delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{EHP})_f$ 条件, 由(2.3)可知系统 $\{\delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{WEHP})_f$ 条件, 进一步地, 由定理 4.4 和定理 4.5 可证得。

($\Leftarrow$)。假设对任意 $p \in X^*$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, (i)等价于(ii)。由定理 4.4 可知(iii) $\Rightarrow$ (i), 故结论成立。证毕。

为验证 Farkas 规则与强对偶结论, 本文给出以下例子。

例 4.7 设 $X = \mathbb{R}^2$, 并且 $C, D \subseteq X$ 是闭凸锥, 具体形式如下

$$C := \{(x_1, x_2): x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$D := \{(x_1, x_2): x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

则 $C \cap D = \{(x_1, x_2): x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$ 并且 $(C \cap D)^\circ = C^\circ + D^\circ$ 。则 $\text{epi}(\delta_C + \delta_D)^* = \text{epi}\delta_C^* + \text{epi}\delta_D^*$ 。

那么系统 $\{\delta_C, f_1\}$ 满足 Farkas 引理, 即满足下列等式

$$\text{epi}(f - p + \delta_C)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}(f - p + \delta_D + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t)^c \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$$

同时原问题与对偶问题之间的强对偶成立。

5. Lagrange 强对偶及稳定强对偶

将 c -共轭应用到扰动函数中, 进一步利用扰动方法得到问题 (P_f) 的 Lagrange 问题为

$$(D_f) \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \left\{ \inf_{x \in M} \left\{ f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t(x) \right\} \right\}$$

令 $\nu(P_f)$ 和 $\nu(D_f)$ 分别是问题 (P_f) 和 (D_f) 的最优值, 则有

$$\nu(D_f) \leq \nu(P_f)$$

即问题 (P_f) 和 (D_f) 之间的 Lagrange 弱对偶成立。

若 $\nu(D_f) = \nu(P_f)$ 成立, 则问题 (P_f) 和 (D_f) 之间的 Lagrange 强对偶成立。

若对任意 $p \in X^*$, 问题 (P_{f-p}) 和 (D_{f-p}) 之间的 Lagrange 强对偶成立, 则问题 (P_f) 和 (D_f) 之间的 Lagrange 稳定强对偶成立。

为研究 Lagrange 强对偶成立的条件, 本文给出下列定理。

定理 5.1 原问题 (P_f) 和对偶问题 (D_f) Lagrange 强对偶成立的充要条件是系统 $\{f, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 Farkas 规则。

证 ($\Rightarrow$)。假设 $\nu(D_f) = \nu(P_f)$ 且 D_f 有一个最优解 $(\bar{\lambda}_t)_{t \in T}$, 令 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $x \in A$, $f(x) \geq \alpha$, 则 $\nu(D_f) = \inf_{x \in A} f(x) \geq \alpha$ 且

$$\inf_{x \in M} \left\{ f(x) + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t f_t(x) \right\} = \nu(D_f) = \nu(P_f) \geq \alpha.$$

因此, 系统 $\{f, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 Farkas 规则。

($\Leftarrow$)。假设系统 $\{f, \delta_M; f_t: t \in T\}$ 满足 Farkas 规则, 令 $\alpha := \nu(P_f)$ 且 $\alpha \neq -\infty$, 则对任意 $x \in A$, 有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且 $f(x) \geq \alpha$, 故

$$[f(x) \geq \alpha, x \in A] \Leftrightarrow [\exists (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)} \text{ s.t. } f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t(x) \geq \alpha, \forall x \in M].$$

进一步地, 问题 (P_f) 和 (D_f) 之间的 Lagrange 弱对偶自然成立, 则 $(\bar{\lambda}_t)_{t \in T}$ 是 D_f 的一个最优解且 $\nu(D_f) = \nu(P_f)$ 。

因此, 问题 (P_f) 和 (D_f) 之间的 Lagrange 强对偶成立。证毕。

将 $f - p$ 应用到定理 5.1 中, 再结合定理 4.5, 可得下列定理 5.2。

定理 5.2 系统 $\{\delta_C; f_t : t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{WEHP})_f$ 条件当且仅当问题 (P_f) 和 (D_f) 之间的 Lagrange 稳定强对偶成立。

推论 5.3 若系统 $\{\delta_C; f_t : t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{WEHP})_f$ 条件, 则问题 (P_f) 和 (D_f) 之间的 Lagrange 强对偶成立。

基于以上定理及推论, 当 $\text{conical}(\text{WEHP})_f$ 条件中 $f = 0$ 时, 给出下列定理。

定理 5.4 以下命题等价:

(i) 系统 $\{\delta_M; f_t : t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{WEHP})_0$ 条件, 即

$$\text{epi}\delta_A^c \subseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}(\delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t)^c$$

成立。

(ii) 若 h 为真函数, 使得系统 $\{\delta_A\}$ 满足 $\text{conical}(\text{EHP})_h$ 条件, 即

$$\text{epi}(h + \delta_A)^c = \text{epih}^c + \text{epi}\delta_A^c$$

则 (P_h) 和 (D_h) 之间的 Lagrange 强对偶成立。

证 (i) $\Rightarrow$ (ii)。假设命题(i)成立, 令 h 为真函数使得 $\text{epi}(h + \delta_A)^c = \text{epih}^c + \text{epi}\delta_A^c$ 成立, 由引理 2.2 和定理 5.1 得,

$$\begin{aligned} \text{epi}(h + \delta_A)^c &= \text{epih}^c + \text{epi}\delta_A^c \\ &= \text{epih}^c + \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}(\delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t)^c \\ &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \left(\text{epih}^c + \text{epi}(\delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t)^c \right) \\ &\subseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \text{epi}(h + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t)^c \end{aligned}$$

故系统 $\{\delta_M; f_t : t \in T\}$ 满足 $\text{conical}(\text{WEHP})_h$ 条件。进一步地, 由推论 5.3 可知(ii)成立。

(ii) $\Rightarrow$ (i)。假设(ii)成立, 由定理 5.1 可知

$$\text{epi}(h + \delta_A)^c = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} (h + \delta_M + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t)^c$$

令 $h = 0$ 可得(i)成立。证毕。

参考文献

- [1] Bot, R.I., Grad, S.M. and Wanka, G. (2009) Duality in Vector Optimization. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-02886-1>
- [2] Boş, R.I., Grad, S. and Wanka, G. (2008) A New Constraint Qualification for the Formula of the Subdifferential of Composed Convex Functions in Infinite Dimensional Spaces. *Mathematische Nachrichten*, **281**, 1088-1107. <https://doi.org/10.1002/mana.200510662>
- [3] Boş, R.I., Grad, S. and Wanka, G. (2008) New Regularity Conditions for Strong and Total Fenchel-Lagrange Duality in Infinite Dimensional Spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **69**, 323-336. <https://doi.org/10.1016/j.na.2007.05.021>
- [4] Boş, R.I. and Wanka, G. (2006) A Weaker Regularity Condition for Subdifferential Calculus and Fenchel Duality in Infinite Dimensional Spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **64**, 2787-2804. <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.09.017>
- [5] Burachik, R.S. and Jeyakumar, V. (2005) A New Geometric Condition for Fenchel's Duality in Infinite Dimensional Spaces. *Mathematical Programming*, **104**, 229-233. <https://doi.org/10.1007/s10107-005-0614-3>
- [6] Fang, D.H., Li, C. and Ng, K.F. (2010) Constraint Qualifications for Extended Farkas's Lemmas and Lagrangian

-
- Dualities in Convex Infinite Programming. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1311-1332. <https://doi.org/10.1137/080739124>
- [7] Moreau, J.J. (1970) Inf-Convolution, Sous-Additivit, Convexitdes Fonctions Numriques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **49**, 109-154()
 - [8] Fajardo, M.D., Goberna, M.A., Rodrguez, M.M.L. and Vicente-Prez, J. (2020) Even Convexity and Optimization, Handling Strict Inequalities. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-53456-1>
 - [9] Hadjisavvas, N., Komlsi, S. and Schaible, S. (2005) Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity. Springer. <https://doi.org/10.1007/b101428>
 - [10] Pallaschke, D. and Rolewicz, S. (1997) Foundations of Mathematical Optimization. Convex Analysis without Linearity. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-1588-1>
 - [11] Rubinov, A. (2000) Abstract Convexity and Global Optimization Nonconvex Optimization and Its Applications. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3200-9>
 - [12] Fajardo, M.D. and Vidal, J. (2017) A Comparison of Alternative C-Conjugate Dual Problems in Infinite Convex Optimization. *Optimization*, **66**, 705-722. <https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1295046>
 - [13] Fajardo, M.D. and Vidal, J. (2018) Necessary and Sufficient Conditions for Strong Fenchel-Lagrange Duality via a Coupling Conjugation Scheme. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **176**, 57-73. <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1209-x>
 - [14] Passy, U. and Prisman, E.Z. (1984) Conjugacy in Quasi-Convex Programming. *Mathematical Programming*, **30**, 121-146. <https://doi.org/10.1007/bf02591881>
 - [15] Penot, J. (2000) What Is Quasiconvex Analysis? *Optimization*, **47**, 35-110. <https://doi.org/10.1080/02331930008844469>
 - [16] Penot, J. and Volle, M. (1990) On Quasi-Convex Duality. *Mathematics of Operations Research*, **15**, 597-625. <https://doi.org/10.1287/moor.15.4.597>
 - [17] Martínez-Legaz, J.E. and Sosa, W. (2022) Duality for Quasiconvex Minimization over Closed Convex Cones. *Optimization Letters*, **16**, 1337-1352. <https://doi.org/10.1007/s11590-021-01766-5>
 - [18] Fang, D.H., Yang, T. and Liou, Y.C. (2022) Strong and Total Lagrange Dualities for Quasiconvex Programming. *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*, **6**, 1-15. <https://doi.org/10.23952/jnva.6.2022.1.01>
 - [19] Hu, L. and Fang, D. (2025) Optimality Conditions and Lagrange Dualities for Optimization Problems Involving-Convex Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*. Accepted for Publication.