

一类新的超混沌系统及其事件驱动同步研究

郝澎祥, 何凯丰, 代安定

湖南城市学院理学院, 湖南 益阳

收稿日期: 2025年7月5日; 录用日期: 2025年7月28日; 发布日期: 2025年8月6日

摘要

本文提出一个新的四维超混沌系统, 并对该超混沌系统的事件驱动同步问题展开研究。根据李雅普诺夫稳定性理论, 设计了指数同步的事件驱动的触发机制, 并设计了事件驱动机制下的间歇控制器, 提出了保证系统实现同步的充分性判据。最后借助python进行数据仿真, 验证了所设计控制器的正确性与有效性。

关键词

超混沌系统, 李雅普诺夫稳定, 事件驱动, 驱动响应同步

Research on a New Hyper-Chaotic System and Its Event-Driven Intermittent Synchronization

Pengxiang Hao, Kaifeng He, Anding Dai

College of Science, Hunan City University, Yiyang Hunan

Received: Jul. 5th, 2025; accepted: Jul. 28th, 2025; published: Aug. 6th, 2025

Abstract

This paper proposes a new four-dimensional hyperchaotic system and investigates its event-driven synchronization problem. Based on Lyapunov stability theory, an event-driven triggering mechanism for exponential synchronization is designed, and an intermittent controller under the event-driven mechanism is developed. Sufficient criteria for ensuring system synchronization are obtained, which balance synchronization accuracy and control resource utilization. Finally, numerical simulations using Python verify the correctness and effectiveness of the designed controller.

Keywords

Hyper-Chaotic System, Lyapunov Stability, Event-Driven, Drive-Response Synchronization

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

混沌系统作为非线性科学领域的重要研究对象，因其对初始条件的敏感依赖性、长期行为的不可预测性以及复杂的拓扑结构，在过去数十年间引发了学术界与工程界的广泛关注[1]-[3]。混沌同步作为混沌理论的核心研究方向之一，旨在实现两个或多个混沌系统的状态一致性，是混沌应用的关键基础[3] [4]。传统的混沌同步方法，如线性反馈控制[4]、自适应控制[5]-[7]等，虽已取得丰富成果，但在实际应用中常面临控制输入持续消耗能量、信息传输量巨大等问题，尤其在大规模网络系统或资源受限的场景中，这些问题更为突出。因此，如何在保证同步效果的前提下，降低控制成本、减少信息传输量，成为近年来混沌同步研究的重要挑战。

事件驱动控制机制作为一种新兴的控制策略，通过设定特定的触发条件，仅在系统状态满足条件时更新控制输入，打破了传统时间驱动控制的周期性限制，为解决上述问题提供了新思路[8] [9]。该机制能够根据系统实际动态特性自适应地决定控制更新时刻，显著减少不必要的控制动作和数据传输，在提升控制效率的同时降低资源消耗[10] [11]。然而，将事件驱动控制应用于超混沌系统的同步研究仍存在诸多理论与技术难题，如触发条件的合理设计、同步稳定性分析以及实际干扰因素的处理等，亟需深入探讨。

本文针对一类新构建的四维超混沌系统，对其驱动-响应同步问题进行了研究。首先，在Lorenz混沌系统基础上通过添加线性项与非线性项构造出一个新的超混沌系统。其次，基于李雅普诺夫稳定性理论，设计事件驱动控制器，给出了系统同步的充分条件，在保证同步精度的同时，实现控制资源的优化利用。最后，数值仿真验证所提结论的正确性。

2. 新超混沌系统介绍

本文在洛伦兹混沌系统上添加了几个线性项和非线性项，提出一个四维超混沌系统，其微分方程描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) + cw \\ \dot{y} = y(k-z) - dw \\ \dot{z} = xy - kz + kw \\ \dot{w} = bx - bw - xz \end{cases} \quad (1)$$

其中 x, y, z, w 为状态变量， a, b, c, d, k 是系统(1)的参数。新系统总共有 12 项，其中有 8 个线性项，有 4 个非线性项。当参数为 $a = 33, b = 2, c = 2.59, d = -13, k = 0.7$ 时，该系统处于混沌状态。该系统在 xyz 空间上的相轨图及其相位图，如图 1 和图 2 所示。

将初始条件为 $x = 4.0, y = -0.2, z = 3.0, w = 0.7$ 代入系统，对系统(1)进行计算，得到李雅普诺夫指数数值为： $\lambda_1 = 3.8191, \lambda_2 = 0.4566, \lambda_3 = -0.1622, \lambda_4 = -5.0189$ 。求出的李雅普诺夫指数有两个数值为正数，这证实了该系统处于超混沌状态。

Hyperchaotic Lorenz System: 3D Phase Portrait (X-Y-Z)

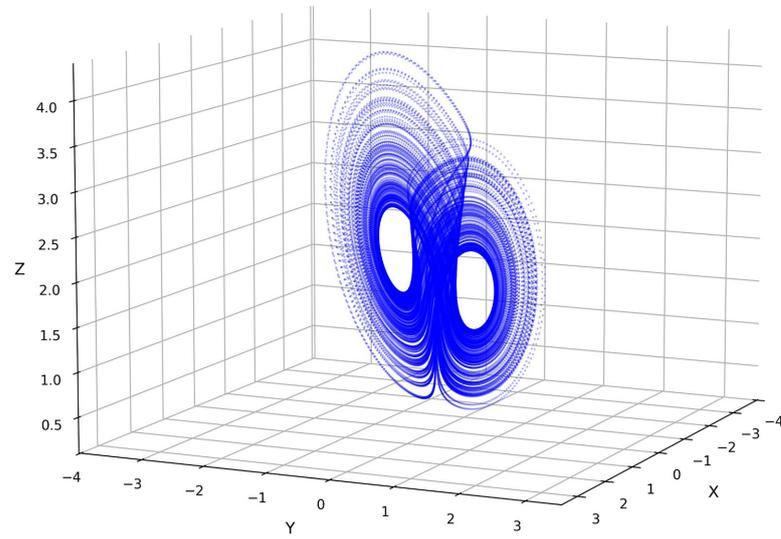


Figure 1. Phase trajectory of system (1) in xyz -space
图 1. 系统(1)在 xyz 空间上的相轨迹图

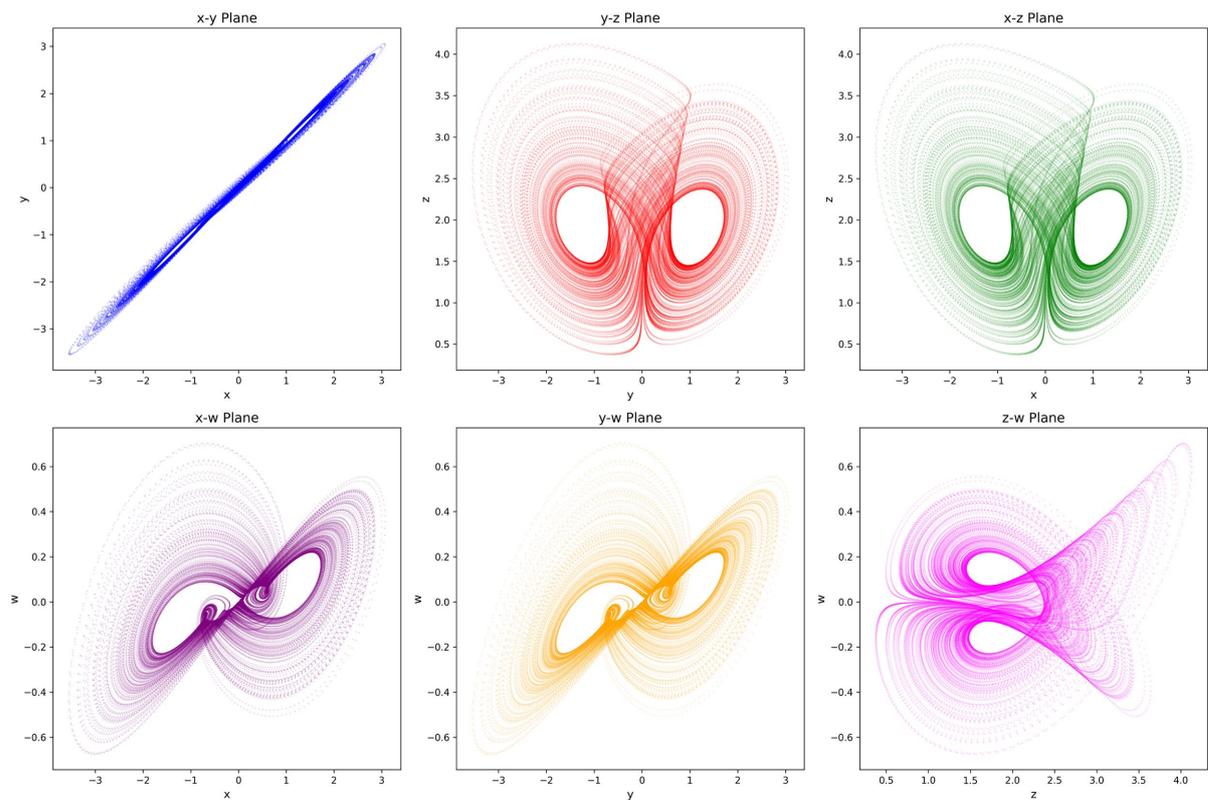


Figure 2. Phase-space trajectories of system (1) across multiple planes
图 2. 系统(1)在各个平面上的相位图

3. 新超混沌系统的反馈同步

针对驱动系统(1)，我们构建相应的响应系统：

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + cy_4 + u_1 \\ \dot{y}_2 = y_2(k - y_3) - dy_4 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - ky_3 + ky_4 + u_3 \\ \dot{y}_4 = by_1 - by_4 - y_1y_3 + u_4 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $y_1, y_2, y_3, y_4 \in R^4$, a, b, c, d, k 为系统的参数, 且为实常数, $u_i \in R (i=1, 2, 3, 4)$ 表示控制输入。将同步误差定义为 $e_i = y_i - x_i (i=1, 2, 3, 4)$ 。通过系统(1)和(2)可以得到如下微分方程:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + ce_4 + u_1 \\ \dot{e}_2 = ke_2 + (x_2x_3 - y_2y_3) - de_4 + u_2 \\ \dot{e}_3 = (y_2y_1 - x_2x_1) - ke_3 + ke_4 + u_3 \\ \dot{e}_4 = be_1 - be_4 - (y_1y_3 - x_1x_3) + u_4 \end{cases} \quad (3)$$

针对系统(3), 设计如下的控制器

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -r_1e_2 + e_2x_3 - (y_1 + y_2)e_3 \\ u_3 = -e_1x_2 - r_2e_3 \\ u_4 = x_3e_1 + e_3y_1 - r_3e_4 \end{cases} \quad (4)$$

其中, r_1, r_2, r_3 为待定的反馈增益, u_1 为零表示变量 x_1 不需要施加控制器。

结论1: 针对系统(1)和系统(2), 在控制器(4)下, 如果以下不等式成立

$$J = \begin{pmatrix} -a & \frac{a}{2} & 0 & \frac{c+d}{2} \\ \frac{a}{2} & k-r_1 & 0 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 0 & -(k-r_2) & \frac{k}{2} \\ \frac{c+d}{2} & -\frac{d}{2} & \frac{k}{2} & -b-r_3 \end{pmatrix} < 0 \quad (5)$$

则系统(2)将同步到系统(1)。

证明: 选择一个合适Lyapunov的函数为

$$v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 e_i^2.$$

对上式两边求导, 可以得到

$$\dot{v} = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4.$$

将误差系统和控制器代入上式, 进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{v} &= e_1 [a(e_2 - e_1) + ce_4 + u_1] + e_2 [ke_2 + (x_2x_3 - y_2y_3) - de_4 + u_2] \\ &\quad + e_3 [(y_1y_2 - x_1x_2) - ke_3 + ke_4 + u_3] + e_4 [be_1 - be_4 - (y_1y_3 - x_1x_3) + u_4] \\ &= -ae_1^2 + ae_1e_2 + ce_1e_4 + (k - r_1)e_2^2 - de_2e_4 + e_2(x_2x_3 - y_2y_3) + e_2^2x_3 - (y_1 + y_2)e_2e_3 \\ &\quad - (k + r_2)e_3^2 + ke_3e_4 + e_3(y_1y_2 - x_1x_2) - x_2e_1e_3 + be_1e_4 - (b + r_3)e_4^2 - e_4(y_1y_3 - x_1x_3) \\ &\quad + x_3e_1e_4 + y_1e_3e_4. \end{aligned} \quad (6)$$

由于,

$$\begin{aligned} e_2(x_2x_3 - y_2y_3) + e_2^2x_3 - (y_1 + y_2)e_2e_3 + e_3(y_1y_2 - x_1x_2) - x_2e_1e_3 &= 0, \\ -e_4(y_1y_3 - x_1x_3) + x_3e_1e_4 + y_1e_3e_4 &= 0. \end{aligned}$$

将上式代入(6)并化简, 可得

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -ae_1^2 + ae_1e_2 + ce_1e_4 + (k - r_1)e_2^2 - de_2e_4 - (k + r_2)e_3^2 + ke_3e_4 + be_1e_4 - (b + r_3)e_4^2 \\ &= e^T J e. \end{aligned}$$

由式(5)知, J 是负定的, 即 $\dot{v}(e, t) < 0$, 则误差系统(2.2)是渐近稳定的, 即系统(2)和系统(1)将会实现同步。

4. 四维超混沌系统的事件驱动同步

4.1. 事件驱动控制器设计

本节采用事件驱动机制来设计控制器, 以此来降低混沌同步的控制成本, 减少信息的传输量。驱动系统, 响应系统和误差系统与上一节相同, 分别为(1), (2)和(3)。

为了确保误差系统能够稳定地趋向零点, 设计出事件驱动同步控制器为

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^*(t), & V(t) \geq B_1(t); \\ 0, & V(t) \leq B_2(t); \\ u_i^*(-t), & B_2(t) \leq V(t) \leq B_1(t); \end{cases} \quad (7)$$

其中, $u_i^*(t)$ 与控制器(4)相同, $B_1(t), B_2(t)$ 是关于时间 t 的函数, 其表达式为

$$B_1(t) = c_1 * V(t_0) * e^{-a_1 t}, \quad B_2(t) = c_2 * V(t_0) * e^{-a_2 t},$$

$a_1 < a_2, c_1 > c_2$ 都是不为零的正数。

事件驱动同步控制的工作原理如图3所示。当 $V(t) > B_1(t)$ 时, 事件驱动控制器被激活; 当 $V(t) < B_2(t)$ 时, 事件驱动控制器关闭; 当 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$ 时, 事件驱动控制器由前一个时刻的控制状态决定[11]。

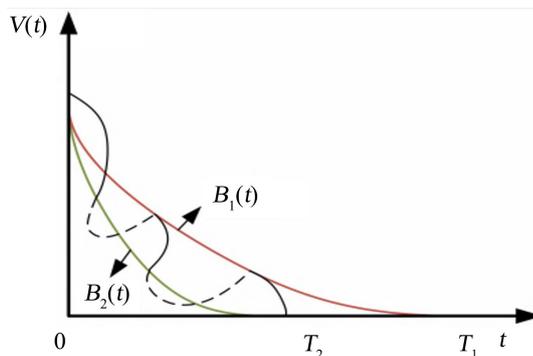


Figure 3. Schematic diagram of the control mechanism [11]

图 3. 控制机制示意图[11]

4.2. 事件驱动同步结论

结论2: 针对驱动系统(1)和响应系统(2), 在事件驱动控制器(7)下, 若 $\|J\| \leq -\lambda$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} -a & \frac{a}{2} & 0 & \frac{c+d}{2} \\ \frac{a}{2} & k-r_1 & 0 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 0 & -(k-r_2) & \frac{k}{2} \\ \frac{c+d}{2} & -\frac{d}{2} & \frac{k}{2} & -b-r_3 \end{pmatrix}, \lambda > 0,$$

则驱动系统(1)和响应系统(2)能实现同步。

证明：构造合适的李雅普诺夫函数

$$V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2).$$

对 $V(e)$ 求导并代入误差方程

$$\dot{V}(e) = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 + \dot{e}_4 e_4.$$

展开后得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = & e_1 [a(y_2 - y_1) + ce_4 + u_1] + e_2 [ke_2(x_2 x_3 - y_2 y_3) - de_4 + u_2] \\ & + e_3 [(y_1 y_2 - x_1 x_2) - ke_3 + ke_4 + u_3] + e_4 [-(y_1 y_3 - x_1 x_3) - be_4 + ke_3 + u_4] \end{aligned}$$

根据结论1的证明过程，有

$$\dot{V}(e) \leq -2\lambda V(e). \tag{8}$$

根据事件驱动同步控制器(7)，会有以下几种情况：

若 $V(t)$ 大于 $B_1(t)$ ，那么就意味着 $V(t)$ 的曲线会在 $B_1(t)$ 的曲线上方，控制器就将处于开启的状态。若 $V(t)$ 一直在 $B_2(t)$ 的上方，则控制器一直开启，即(8)式成立。根据结论 1 可知，系统(1)和系统(2)能同步。

若在控制器的作用下， $V(t)$ 达到或小于 $B_2(t)$ 时，控制器关闭。之后，若 $V(t)$ 一直在 $B_1(t)$ 的下方，根据 $B_1(t)$ 的轨迹可知，系统(1)和系统(2)能同步。

若 $V(t)$ 的值不断在小于 $B_1(t)$ 和大于 $B_2(t)$ 来回切换，即控制器不断开启与关闭，则在控制器的作用下 $V(t)$ 的值将介于这两者之间。由于 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 将重合并趋于 0，则 $V(t)$ 的值将趋于 0，即系统(1)和系统(2)能同步。

综上所述，在事件驱动同步控制器(7)的作用下，若 J 负定时，系统(1)和系统(2)能同步，即结论2是成立的。

注 1: 本文所设计的控制器(7)不会出现芝诺现象。设控制器第 k 次触发的时间为 t_k ，即 $V(t_k) \geq B_1(t_k)$ ，第 k 次关闭的时间为 t_{k+1} ，即 $V(t_{k+1}) = B_2(t_{k+1})$ ，第 $k+1$ 次触发的时间为 t_{k+2} 。由(8)可知， $V(t) = V(t_k)e^{-2\lambda(t-t_k)}$ 。

因此， $e^{2\lambda(t_{k+1}-t_k)} = \frac{V(t_k)}{V(t_{k+1})} = \frac{B_1(t_k)}{B_2(t_{k+1})}$ 。由触发函数 $B_i(t)$ 的定义，它是单调递减的，所以

$$e^{2\lambda(t_{k+1}-t_k)} \geq \frac{B_1(t_k)}{B_2(t_k)} = \frac{c_1 V(t_0) e^{-a_1 t_k}}{c_2 V(t_0) e^{-a_2 t_k}} = \frac{c_1}{c_2} e^{(a_2 - a_1)t_k},$$

$$\text{即 } (t_{k+1} - t_k) \geq \frac{1}{2\lambda} \ln \left(\frac{c_1}{c_2} \right).$$

因此, 最小触发间隔 $\tau = t_{k+2} - t_k > t_{k+1} - t_k \geq \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right) > 0$ 。因此, 不会出现芝诺现象。

5. 数值仿真

仿真一:

驱动系统和响应系统的参数值分别取 $a = 33, b = 2, c = 2.59, d = -13, k = 0.7$, 驱动系统的初值和响应系统的初值分别为:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, y_1 = 2, y_2 = -2, y_3 = 3, y_4 = -3.$$

若反馈增益为 $r_1 = 15, r_2 = 8, r_3 = 10$, 将其代入结论2中的 J , 可求得 J 的特征值分别为:

$$\lambda_1 = -42.6726, \lambda_2 = -0.7831, \lambda_3 = -16.4423, \lambda_4 = -8.6920.$$

根据特征值可知 J 是负定的。因此, 结论2成立, 即驱动系统和响应系统在控制器(7)下实现同步, 其中事件驱动函数的参数值选取为: $a_1 = 2, a_2 = 4, c_1 = 0.8, c_2 = 0.6$ 。

仿真结果如图4~6所示。由图4可观察到, 所有误差变量曲线迅速稳定至零, 这说明驱动系统和响应系统能实现同步。图5为红色曲线为函数 V 的变化趋势, 从图中可看出, 函数 V 介于函数 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 之间, 这说明事件驱动控制器在正常的工作, 所设计的控制器是有效的。图6为控制器工作或休息的轨迹图。

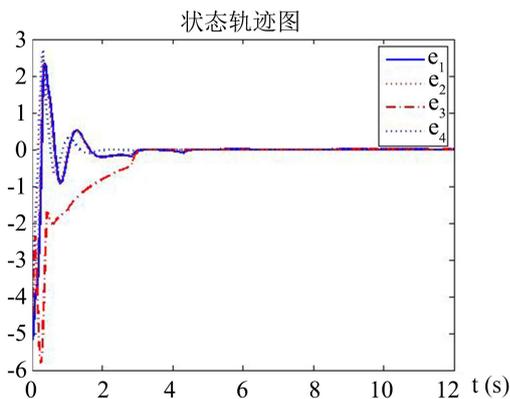


Figure 4. Synchronization error curve

图4. 同步误差曲线图

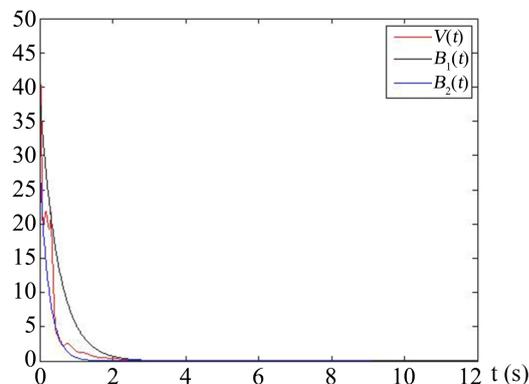


Figure 5. Event-Driven control trajectory

图5. 事件驱动控制轨迹

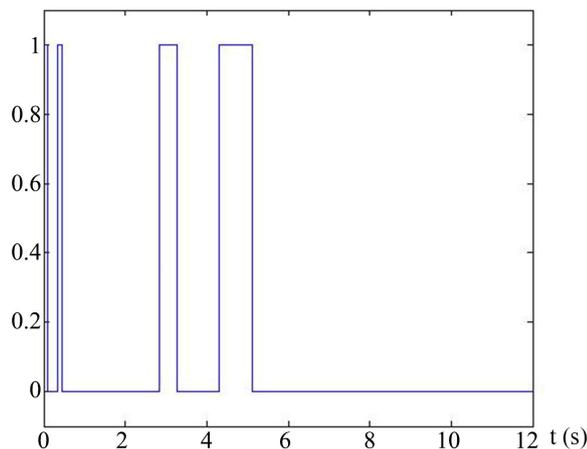


Figure 6. The triggering trajectory of controller (7)

图 6. 控制器(7)的工作触发轨迹

仿真二:

为了验证控制器(7)的有效性,本仿真将其与反馈控制器(4)进行对比分析。系统的参数与仿真一保持一致。控制能耗的定义如下: $Q = \int_0^{12} u'udt$ 。

在反馈控制器(4)作用下,当控制器工作的判别标准设定为“控制器各分量绝对值的最大值大于0.01”时,控制器工作时间为1.2,对应控制能耗为748.3868;若将判别标准提高至0.001,则反馈控制器工作时间延长至1.52。相比之下,在事件驱动控制器(7)作用下,控制器工作时间为1.48,控制能耗为655.0146。对比结果表明,事件驱动控制方法在工作时间方面与反馈控制相近,但能显著降低能耗,节能效果达到12.48%。这说明事件驱动控制机制能有效节省能耗。

6. 结论

本文提出了一个新的超混沌系统,给出了其李雅普诺夫指数,平衡点,且进行了耗散性分析。利用事件驱动机制对该超混沌系统的驱动-响应同步进行了研究,提出保证系统实现同步的充分性判据。该判据不仅能保证系统实现同步,而且能有效减少控制输入和信息的传输量。最后,通过仿真算例验证所提控制策略的可行性。不过这次研究也存在局限。实际应用中的复杂干扰因素未深入探讨。此外,可以把研究成果和实际工程结合起来,比如在加密通信、电力系统控制这些领域做进一步的实践验证。

基金项目

本论文受湖南省教育厅重点项目(项目编号: 21A0498)资助。

参考文献

- [1] 张化光, 王智良, 黄玮. 混沌系统的控制理论[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003.
- [2] 赵耿, 李文健, 马英杰. 基于变参数的 logistic 混沌系统图像加密算法[J]. 计算机应用与软件, 2023, 40(12): 325-331.
- [3] 刘洋, 彭良玉, 董胡. 统一混沌系统同步及其保密通信[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(3): 133-135.
- [4] 陶朝海, 陆君安, 吕金虎. 统一混沌系统的反馈同步[J]. 物理学报, 2002, 51(7): 1497-1501.
- [5] 杨阳, 摆玉龙, 李艳, 等. 多翼瞬态混沌系统及有限时间同步研究[J]. 计算机科学, 2024, 51(S2): 995-1000.
- [6] 关新平, 范正平, 彭海朋, 等. 陈氏混沌系统的自适应控制[J]. 物理学报, 2001, 50(11): 2108-2111.
- [7] 陶思言, 林达, 曾晓辉. 参数不确定统一混沌系统鲁棒最优控制[J]. 测控技术, 2016, 35(2): 96-103.

-
- [8] Wang, Q.Z., He, Y., Tan, G.Z., *et al.* (2017) State-Dependent Intermittent Control of Non-Linear Systems. *IET Control Theory & Applications*, **11**, 1884-1893. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2016.1385>
- [9] He, C. and Li, J.M. (2020) Event-Based Aperiodically Intermittent Pinning Synchronization Control Strategy for Linearly Coupled Complex Networks. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **36**, Article 100836. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2019.100836>
- [10] 梁志鸿, 丁三波, 解相朋. 基于事件驱动间歇控制的离散复杂网络有限时间同步[J]. 聊城大学学报: 自然科学版, 2023, 36(1): 1-10+31.
- [11] 王健安, 杨泽林, 王昕. 基于事件相关间歇控制的时滞复杂网络有限时间同步[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3673-3680.