

独立符号双罗马控制

李 柠*, 李 鹏

重庆理工大学理学院, 重庆

收稿日期: 2025年7月21日; 录用日期: 2025年8月14日; 发布日期: 2025年8月25日

摘 要

图 $G=(V,E)$ 上的独立符号双罗马控制函数(ISDRDF)是函数 $f:V(G)=(-1,1,2,3)$, 其中: 1) $f(v)=-1$ 的每个顶点 v 与至少两个赋值为2的顶点相邻或与至少一个赋值为3的顶点相邻; 2) $f(v)=1$ 的每个顶点 v 与至少一个 $f(u)\geq 2$ 的顶点 u 相邻; 3) 对任意顶点 v , 都满足 $f(N[v])=\sum_{u\in N[v]}f(u)\geq 1$; 4) 所有赋值为正权重的顶点的集合是独立的。ISDRDF f 的权重是 $w(f)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$, 且独立符号双罗马控制数 $i_{sdR}(G)$ 是 G 中ISDRDF的最小权。本文研究了独立符号双罗马控制问题, 首先给出了在 P_n 和 C_n 中的 $i_{sdR}(G)$, 然后讨论了完全图中 $i_{sdR}(G)$ 的上界; 最后证明了在二部图上ISDRD问题是NP-完全的。

关键词

独立符号双罗马控制数, 独立双罗马控制函数, 双罗马控制函数, 符号双罗马控制函数

Independent Signed Double Roman Domination

Ning Li*, Peng Li

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Jul. 21st, 2025; accepted: Aug. 14th, 2025; published: Aug. 25th, 2025

Abstract

An independent signed double Roman dominating function (ISDRDF) on a graph $G=(V,E)$ is a function $f:V(G)\rightarrow\{-1,1,2,3\}$ such that: 1) every vertex v with $f(v)=-1$ is adjacent to either

*通讯作者。

at least two vertices assigned 2 or at least one vertex assigned 3; 2) every vertex v with $f(v)=1$ is adjacent to at least one vertex u with $f(u) \geq 2$; 3) for every vertex v , the closed neighborhood weight satisfies $f(N[v]) = \sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1$; and 4) the set of vertices with positive weights is independent. The weight of an ISDRDF f is $w(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$, and the independent signed double Roman domination number $i_{sdr}(G)$ is the minimum weight of an ISDRDF on G . In this paper, we first determined the $i_{sdr}(G)$ for paths P_n and cycles C_n . Moreover, we characterize upper bound for $i_{sdr}(G)$ in complete graphs. Finally, we show that determining NP-completeness of the ISDRD problem for bipartite graphs.

Keywords

Independent Signed Double Roman Dominating Function, Independent Double Roman Dominating Function, Double Roman Dominating Function, Signed Double Roman Dominating Function

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

2004年, Cockayne等人[1]定义了图 $G=(V, E)$ 上的罗马控制函数(RDF)为函数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$, 满足: $f(u)=0$ 的每个顶点 u 都与至少一个 $f(v)=2$ 的顶点 v 相邻。如果集合 $\{u \in V(G) | f(u) \geq 1\}$ 是独立集, 则罗马控制函数 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 称为独立罗马控制函数(IRDF), 独立罗马控制数 $i_R(G)$ 是IRDF在 G 上的最小权。

2016年, Beeler等人[2]提出了图的双罗马控制的概念。图 G 上的一个双罗马控制函数(DRDF)是一个函数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$, 它具有如下性质: 如果 $f(v)=0$, 则顶点 v 在 f 下至少有两个赋值为2的邻居或一个赋值为3的邻居; 如果 $f(v)=1$, 则顶点 v 至少有一个邻居 w , 其中 $f(w) \geq 2$ 。图 G 的双罗马控制数 $\gamma_{dr}(G)$ 是图 G 上的一个DRDF的最小权。双罗马控制这一模型在应急服务部署、网络安全、军事防御等领域具有广泛的实际应用[3]。

2020年, Maimani等人[4]在双罗马控制的基础上提出了独立双罗马控制。如果集合 $\{u \in V(G) | f(u) \geq 1\}$ 是独立集, 则DRDF $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ 称为独立双罗马控制函数(IDRDF)。独立双罗马控制数 $i_{dr}(G)$ 是 G 上IDRDF的最小权, 具有权 $i_{dr}(G)$ 的 G 的IDRDF称为 G 的 i_{dr} -函数或 $i_{dr}(G)$ -函数。

2018年, Ahangar等人[5]定义了图 $G=(V, E)$ 上的符号双罗马控制函数(SDRDF)是一个函数 $f: V(G) \rightarrow \{-1, 1, 2, 3\}$, 使得: 1) $f(v)=-1$ 的每个顶点 v 与至少两个赋值为2的顶点相邻或与至少一个赋值为3的顶点相邻; 2) $f(v)=1$ 的每个顶点 v 与至少一个 $f(w) \geq 2$ 的顶点 w 相邻; 3) $f(N[v]) = \sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1$, 对任意顶点 v 成立。符号双罗马控制数 $\gamma_{sdr}(G)$ 是 G 上SDRDF的最小权, 因此具有最小权的SDRDF称为 $\gamma_{sdr}(G)$ -函数。

据我们目前所知, 不同图类(二分图、弦图、区间图、块图、树)在控制、符号控制、罗马控制、双罗马控制、独立双罗马控制、符号双罗马控制中的研究情况如表1所示。值得注意的是, 符号控制, 独立双罗马控制问题和符号双罗马控制在区间图、块图和树中的研究仍待探索。这些开放问题可结合图的结构特性探索动态规划或分治策略, 其解决将深化对控制问题的理论理解, 并为复杂图类的应用奠定基础。

Table 1. Algorithmic complexity of domination variants in special graphs
表 1. 在特殊图中控制变体的算法复杂性

图类	控制	符号控制	罗马控制	双罗马控制	独立双罗马控制	符号双罗马控制
二分图	$NP-C$ [6]	$NP-C$ [10]	$NP-C$ [11]	$NP-C$ [14]	$NP-C$ [18]	$NP-C$ [19]
弦图	$NP-C$ [7]	$NP-C$ [10]	open	$NP-C$ [14]	$NP-C$ [18]	$NP-C$ [19]
区间图	$O(n+m)$ [8]	open	$O(n)$ [12]	$O(n+m)$ [15]	open	open
块图	$O(n+m)$ [9]	open	$O(n+m)$ [13]	$O(n+m)$ [16]	open	open
树	$O(n+m)$ [9]	open	$O(n+m)$ [1]	$O(n+m)$ [17]	open	open

设 $f:V(G)\rightarrow\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 是一个函数, 令 $V_{x_i}=\{v\in V(G):f(v)=x_i\}$, 记 $f=(V_{x_1},V_{x_2},\cdots,V_{x_k})$ (或 $f=(V_{x_1}^f,V_{x_2}^f,\cdots,V_{x_k}^f)$)。

在上述工作的启发下,我们研究了一类新的控制函数——独立符号双罗马控制函数,缩写为ISDRDF。

一个图 $G=(V,E)$ 上的独立符号双罗马控制函数(ISDRDF)为满足以下条件的控制函数

$f:V(G)\rightarrow\{-1,1,2,3\}$, 其中: 1) $f(v)=-1$ 的每个顶点 v 与至少两个赋值为 2 的顶点相邻或与至少一个赋值为 3 的顶点相邻; 2) $f(v)=1$ 的每个顶点 v 与至少一个赋值不小于 2 的顶点相邻; 3)

$f[v]=f(N[v])=\sum_{u\in N[v]}f(u)\geq 1$, 对任意顶点 v 成立; 4) 集合 $\{u\in V(G)\mid f(u)\geq 1\}$ 是独立集。ISDRDF f 的权重是值 $f(V(G))=\sum_{v\in V(G)}f(v)$, 且独立符号双罗马控制数 $i_{sdR}(G)$ 是 G 中 ISDRDF 的最小权, 因此权重为 $i_{sdR}(G)$ 的 ISDRDF 称为 $i_{sdR}(G)$ -函数。

2. 基础知识

一般地, 下文中使用文献[20]中的记号和图论术语。令 $G=(V,E)$ 是一个边集为 E , 顶点集为 V 且阶数为 n 的图。顶点 v 的开邻域记为 $N(v)=\{u\in V\mid uv\in E\}$, 闭邻域记为 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ 。用 P_n 表示 n 阶的路径, 用 C_n 表示 n 阶的圈, 用 K_n 表示 n 阶的完全图。设 $V'\subseteq V(G)$, 以 G 中两端点都在 V' 为顶点集, 以 V' 中的边的全体为边集所组成的子图, 称为图 G 由顶点集 V' 导出的子图, 简称为图 G 的点导出子图, 记为 $G[V']$ 。如果 D 中没有两个顶点由边连接, 则集合 $D\subseteq V$ 是独立的。控制数 $\gamma(G)$ 等于图中控制集的最小基数。对于一个实数 x , 将不大于 x 的最大整数写成 $\lfloor x \rfloor$, 将不小于 x 的最小整数写成 $\lceil x \rceil$, 有: $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$ 。为了方便读者理解数学符号, 表 2 总结了本文出现的重要数学符号, 以供查阅。

Table 2. Overview table of important mathematical symbols
表 2. 重要数学符号总览表

符号	解释说明
SDRDF	符号双罗马控制函数
$\gamma_{sdR}(G)$	图 G 的符号双罗马控制数
ISDRDF	独立符号双罗马控制函数
$i_{sdR}(G)$	图 G 的独立符号双罗马控制数
ISDRDF f	独立符号双罗马控制函数 f
ISDRD	独立符号双罗马控制

3. 主要结果

3.1. 一般图结果

结论 1: 对任意图 G , 有 $i_{sdR}(G) \geq \gamma_{sdR}(G)$ 。

证明: 由于 G 上任意一个 ISDRDF 均满足 SDRDF 的定义, 所以 G 上任意一个 ISDRDF 也是一个 SDRDF。又由于任意一个 ISDRDF 中所有赋值为正权重的顶点的集合是独立的, 则一定有

$$i_{sdR}(G) \geq \gamma_{sdR}(G)。$$

□

结论 2: 对于任意图 G , 都有一个 $i_{sdR}(G)$ -函数 $f = (V_{-1}, V_1, V_2, V_3)$, 可使得 $V_1 = \emptyset$ 。

证明: 设 $h = (V_{-1}, V_1, V_2, V_3)$ 是一个使得 $|V_1|$ 尽可能小的 $i_{sdR}(G)$ -函数。如果 $V_1 \neq \emptyset$, 则至少存在一个 $v \in V_1$, 且 v 在 $V_2 \cup V_3$ 中有一个邻居 u 。然而由 $f(v) = -1$, $f(u) = 3$ 和 $f(x) = h(x)$ 定义的函数 $f = (V_{-1} \cup \{v\}, V_1 \setminus \{v\}, V_2 \setminus \{u\}, V_3 \cup \{u\})$ 也是一个 $i_{sdR}(G)$ -函数, 使得 $|V_1^f| < |V_1^h|$, 这与 h 的选择是矛盾的。故 $V_1 = \emptyset$ 。

□

3.2. 路径与圈结果

在探讨了一般图中独立符号双罗马控制函数的基本性质后, 我们将研究路径 P_n 与圈 C_n 的独立符号双罗马控制数, 这对于深入理解该函数在特殊图类中的特性有关键意义。

$$\text{引理 3 [21]: 设 } G \text{ 为 } P_n, \text{ 对于 } n \geq 2, \gamma_{sdR}(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{3}, & \text{若 } n \equiv 0(\text{mod } 3), \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1, & \text{若 } n \equiv 1, 2(\text{mod } 3). \end{cases}$$

推论 4: 设 G 为 P_n , 对于 $n \geq 2$, $i_{sdR}(P_n) = \gamma_{sdR}(P_n)$ 。

证明: 先证 $i_{sdR}(P_n) \leq \gamma_{sdR}(P_n)$ 。设 $P_n = v_1 v_2 \cdots v_n$, 定义 $f: V(P_n) \rightarrow \{-1, 1, 2, 3\}$ 满足如下条件: 若 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, 则令 $f(v_{3i+2}) = 3 \left(0 \leq i \leq \frac{n-3}{3} \right)$, 否则 $f(x) = -1$, 此时 $w(f) = \frac{n}{3}$; 若 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, 则设 $f(v_n) = 2$, $f(v_{3i+2}) = 3 \left(0 \leq i \leq \frac{n-4}{3} \right)$, 否则 $f(x) = -1$, 此时 $w(f) = \frac{n+2}{3} + 1$; 若 $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, 则令 $f(v_{3i+2}) = 3 \left(0 \leq i \leq \frac{n-2}{3} \right)$, 否则 $f(x) = -1$, 此时 $w(f) = \frac{n+1}{3} + 1$ 。根据以上赋值条件可知: 当 $n \equiv 0, 2(\text{mod } 3)$ 时, P_n 上的所有点均用 -1 和 3 交替赋值, 则满足 ISDRDF 的四个条件; 当 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ 时, P_n 上的所有点除了顶点 v_n 赋值为 2 , 其余顶点均用 -1 和 3 交替赋值。又有 $f[v_n] = 1$, 从而满足 ISDRDF 的四个条件。因此 f 是 P_n 的 ISDRDF, 综上可知当 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ 时, $i_{sdR}(P_n) \leq \frac{n}{3}$; 当 $n \neq 0(\text{mod } 3)$ 时, $i_{sdR}(P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1$ 。

由结论 1 有 $i_{sdR}(G) \geq \gamma_{sdR}(G)$, 故该推论成立。

□

$$\text{引理 5 [22]: 设 } G \text{ 为 } C_n, \text{ 对于 } n \geq 3, \gamma_{sdR}(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{3}, & \text{若 } n \equiv 0(\text{mod } 3), \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2, & \text{若 } n \equiv 1(\text{mod } 3), \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1, & \text{若 } n \equiv 2(\text{mod } 3). \end{cases}$$

推论 6: 设 G 为 C_n , 对于 $n \geq 3$, $i_{sdR}(C_n) = 4 \times \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - n = \gamma_{sdR}(C_n)$ 。

证明: 先证 $i_{sdR}(C_n) \leq \gamma_{sdR}(C_n)$ 。设 $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$, 定义 $f: V(C_n) \rightarrow \{-1, 1, 2, 3\}$ 如下, 若 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, 则令 $f(v_{3i+2}) = 3 \left(0 \leq i \leq \frac{n-3}{3} \right)$, 否则 $f(x) = -1$, 此时 $w(f) = 4 \times \frac{n}{3} - n = \frac{n}{3}$; 若 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, 则设 $f(v_n) = 3$, $f(v_{3i+2}) = 3 \left(0 \leq i \leq \frac{n-4}{3} \right)$, 否则 $f(x) = -1$, 此时 $w(f) = 4 \times \frac{n+2}{3} - n = 4 \times \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - n$; 若 $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, 则令 $f(v_{3i+2}) = 3 \left(0 \leq i \leq \frac{n-2}{3} \right)$, 否则 $f(x) = -1$, 此时 $w(f) = 4 \times \frac{n+1}{3} - n = 4 \times \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - n$ 。根据以上赋值条件可知: 当 $n \equiv 0, 1, 2(\text{mod } 3)$ 时, C_n 上的所有点均用 -1 和 3 交替赋值, 则满足 ISDRDF 的四个条件。因此 f 是 C_n 的 ISDRDF, 则 $i_{sdR}(C_n) \leq 4 \times \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - n$, 即 $i_{sdR}(C_n) \leq \gamma_{sdR}(C_n)$ 。

又由结论 1, 有 $i_{sdR}(G) \geq \gamma_{sdR}(G)$ 。因此当 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ 时, $i_{sdR}(C_n) \geq \frac{n}{3} = 4 \times \frac{n}{3} - n$; 当 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ 时, $i_{sdR}(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2 = 4 \times \left(\frac{n-1}{3} + 1 \right) - n$; 当 $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ 时, $i_{sdR}(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1 = 4 \times \left(\frac{n-2}{3} + 1 \right) - n$ 。综上所述可知, $i_{sdR}(C_n) = 4 \times \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - n = \gamma_{sdR}(C_n)$ 。□

3.3. 完全图结果

在明确了 $i_{sdR}(P_n)$ 与 $i_{sdR}(C_n)$ 后, 我们将进一步研究完全图。用 K_n 表示 n 个顶点上的完全图, 其所有顶点两两相邻的特殊性质与 P_n 与 C_n 差异显著, 必然会对 $i_{sdR}(G)$ 产生影响。接下来, 让我们深入探究 $i_{sdR}(K_n)$ 的上界。

结论 7: 设 G 为 K_n , 对于 $n \geq 3$, $i_{sdR}(K_n)$ 有以下结论成立:

- 1) 当 $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, $i_{sdR}(K_n) = 1$;
- 2) 当 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, $i_{sdR}(K_n) \leq 2$;
- 3) 当 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, $i_{sdR}(K_n) \leq \begin{cases} 3, & \text{若 } n \equiv 0, 1(\text{mod } 4), \\ 2, & \text{若 } n \equiv 2(\text{mod } 4), \\ 1, & \text{若 } n \equiv 3(\text{mod } 4). \end{cases}$

证明: 设 $G = (V, E)$ 为完全图, 考虑 f 是一个 $i_{sdR}(K_n)$ -函数, 对任意顶点 $v \in V(G)$, 有 $w(K_n) = f[v] \geq 1$, 故 $i_{sdR}(K_n) = w(f) \geq 1$ 。

若 $f = (V_{-1}, V_1, V_2, V_3) = (V_{-1}, \emptyset, V_2, \emptyset)$, 则假设将 t 个顶点赋值为 2 , $w(f) = 3t - n$; 若 $f' = (V_{-1}, V_1, V_2, V_3) = (V_{-1}, \emptyset, \emptyset, V_3)$, 则假设将 $t - a$ 个顶点赋值为 3 , $w(f') = 4(t - a) - n$ 。令 $w(f) \geq w(f')$, 解得 $a \geq \frac{t}{4}$, 由于 a 为正整数, 则 $a \geq \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$ 。

1) 当 $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ 时, 则将 $\frac{n+1}{3}$ 个顶点赋值为 2 , 其余顶点赋值为 -1 。有: $w(K_n) \leq 1$, 因此, 当 $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, $i_{sdR}(K_n) = 1$ 。

2) 当 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ 时, 假设将 $\frac{n+2}{3}$ 个顶点赋值为 2 , 其余顶点赋值为 -1 , 有 $w(f) = 2$; 假设将

$\frac{n+2}{3} - \left\lfloor \frac{\frac{n+2}{3}}{4} \right\rfloor$ 个顶点赋值为 3, 其余顶点赋值为 -1, 有 $w(f') = 4 \times \left(\frac{n+2}{3} - \left\lfloor \frac{n+2}{12} \right\rfloor \right) - n$, 整理 $w(f')$ 可得

$w(f') = 2 + 4 \times \frac{(n+2)}{12} - 4 \times \left\lfloor \frac{n+2}{12} \right\rfloor$ 。由向下整函数的定义, 可知 $0 \leq \frac{(n+2)}{12} - \left\lfloor \frac{n+2}{12} \right\rfloor \leq 1$, 则 $w(f) \leq w(f')$ 。

因此 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ 时, $i_{sdR}(K_n)$ -函数 $f = (V_{-1}, V_1, V_2, V_3) = (V_{-1}, \emptyset, V_2, \emptyset)$ 且 $i_{sdR}(K_n) \leq 2$ 。

3) 当 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ 时, 若将 $\frac{n}{3}$ 个顶点赋值为 2, 其余顶点赋值为 -1, 有 $w(f) = 0 < 1$, 不满足要求。

假设将 $\frac{n}{3} + 1$ 个顶点赋值为 2, 其余顶点赋值为 -1, 有 $w(f) = 3$; 若 $\frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{\frac{n}{3}}{4} \right\rfloor$ 个顶点赋值为 3, 其余顶点赋

值为 -1, 有 $w(f') = 4 \times \left(\frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor \right) - n$, 整理 $w(f')$ 可得 $w(f') = 4 \times \frac{n}{12} - 4 \times \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor \leq 4$ 。在 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ 的条件下, 对同时满足 $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ 的情形展开进一步探讨:

情况 1: 假设 $n \equiv 0(\text{mod } 4)$, 若将 $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ 个顶点赋值为 3, 其余顶点赋值为 -1, 则 $w(f) = 0$, 不满足要求; 若 $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$ 个顶点赋值为 3, 其余顶点赋值为 -1, 则 $w(f) = 4 > 3$, 此时将 $\frac{n}{3} + 1$ 个顶点赋值为 2 的权重更小;

情况 2: 假设 $n \equiv 1(\text{mod } 4)$, 若将 $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ 个顶点赋值为 3, 其余顶点赋值为 -1, 则 $w(f) = 3$;

情况 3: 假设 $n \equiv 2(\text{mod } 4)$, 若将 $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ 个顶点赋值为 3, 其余顶点赋值为 -1, 则 $w(f) = 2$;

情况 4: 假设 $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, 若将 $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ 个顶点赋值为 3, 其余顶点赋值为 -1, 则 $w(f) = 1$ 。

综上, 当 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ 时, 有 $i_{sdR}(K_n) \leq \begin{cases} 3, & \text{若 } n \equiv 0, 1(\text{mod } 4), \\ 2, & \text{若 } n \equiv 2(\text{mod } 4), \\ 1, & \text{若 } n \equiv 3(\text{mod } 4). \end{cases}$ □

3.4. 独立符号双罗马控制问题的完全性

在分析完 $i_{sdR}(P_n)$ 、 $i_{sdR}(C_n)$ 与 $i_{sdR}(K_n)$ 的独立符号双罗马控制数分析后, 我们将通过证明 IDSRD 问题对于二部图是 NP-完全的, 从而揭示其内在复杂性特征。

IDSRD 问题

实例: 图 $G = (V, E)$, 正整数 $k \leq |V|$ 。

问题: G 是否有一个权重至多为 k 的 IDSRDF?

Hickey [23] 等人证明了 X3C3 是 NP-完全的, 因此我们可以通过将 X3C3 归约为 IDSRD, 从而证明 IDSRD 问题是 NP-完全的。

X3C3

实例: 假设存在一个大小为 $3q$ 的集合 X 和 X 的三个元素子集的集合 $C = \{C_1, \dots, C_{3q}\}$, 使得每个元素 $x_i \in X$ 正好在 C 的三个子集中。

问题: C 是否包含 X 的一个精确覆盖, 即 C 是否存在一个子集合 $C' \subset C$, 使得 X 中的每个元素 $x_i \in X$ 都恰好在 C' 的一个元素中?

现将 $X3C3$ 归约为 $ISRD$ 问题, 则当且仅当第二个实例有解时, 第一个实例有解。

定理 8: 独立符号罗马双控制问题对于二部图是 NP-完全的。

证明: 因为可以在多项式时间内验证一个函数 $f: V \rightarrow \{-1, 1, 2, 3\}$ 是否是 $ISDRDF$ 并且其权重至多为 k , 所以 $ISRD$ 问题是 NP 的。设 $X = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$, $C = \{C_1, \dots, C_{3q}\}$ 是 $X3C3$ 的一个实例。设集合 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{3q}\}$ 和 $Z = \{c_1, c_2, \dots, c_{3q}\}$ 。对于集合 X 中的顶点 x_i , 创建一条路 $P_2 = x_i w_i$ 。构造一个顶点集为 $V = \{v_1^j, v_2^j, \dots, v_8^j\}$, 边集为 $E = \{v_1^j v_2^j, v_2^j v_3^j, v_3^j v_4^j, v_4^j v_5^j, v_5^j v_6^j, v_6^j v_7^j, v_7^j v_8^j, v_8^j v_1^j, v_1^j v_4^j, v_3^j v_6^j, v_6^j v_3^j\}$ 的图 Γ_j 。对每一个 $c_j \in C$, 可通过在图 Γ_j 的基础上添加两条边 $c_j v_1^j, c_j v_3^j$ 来构造了一个图 H_j 。如果 $x_i \in C_j$, 我们可以通过添加边 $c_j x_i$, 得到一个图 G 。显然这个 G 是一个二部图, 设 $k = 25q$, 图 1 是 $q = 2$ 的一个图 G 。

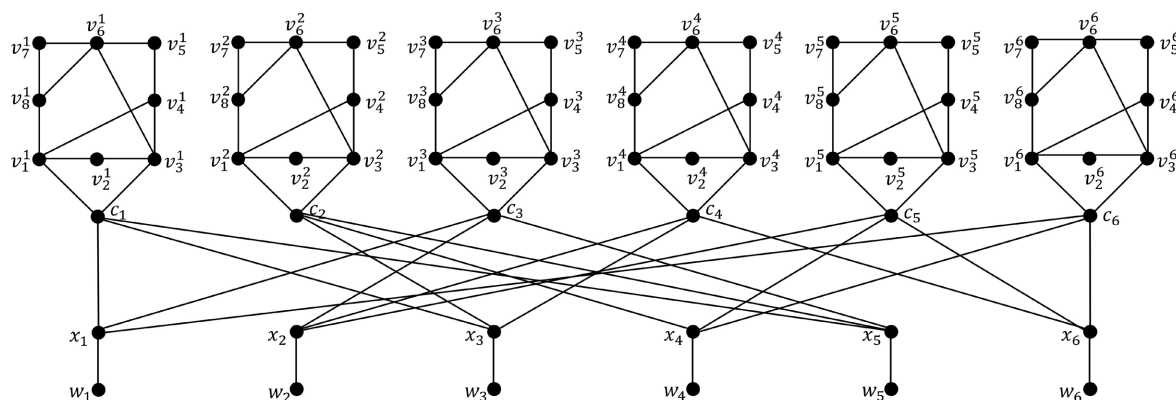


Figure 1. A graph G with $q = 2$

图 1. $q = 2$ 的一个图 G

假设 $X3C3$ 的实例存在一个解 C' 。下面在 G 上构造一个权重为 k 的独立符号双罗马控制函数, 构造方法如下: 1) 将值 -1 和 2 分别赋值给每个 x_i 和 w_i ; 2) 对于每个 $c_j \in C'$, 将 2 赋值给 c_j, v_1^j, v_3^j ; 将 3 赋值给 v_5^j, v_7^j ; 并将 -1 赋值给 H_j 的其余顶点; 3) 对于每个 $c_j \notin C'$, 将值 3 给 $v_1^j, v_3^j, v_4^j, v_6^j$, 并将 -1 赋值给 H_j 的其余顶点。因为已知 $X3C3$ 实例是存在一个解集 C' 的, 且 C 中的每一个元素都会对应 X 中的三个元素, X 中的每个元素也正好在 C 的三个子集中。所以在精确覆盖的前提下, X 中的 $3q$ 个元素必然对应 q 个 C' 中的元素, 即 $|C'| = q$, 因此集合 Z 中 c_j 的基数为 q 赋值为 2 且每一个 w_i 都赋值为 2。而 C' 是 $X3C3$ 的解, 所以 X 中的每个顶点都与两个赋值为 2 的顶点相邻。根据以上赋值条件可知: 每个顶点 x_i 均赋值为 -1 且都与两个赋值为 2 的顶点相邻; H_j 中赋值为 2 和 3 的顶点之间均没有连线而 H_j 中赋值为 -1 其余顶点经检验均满足要求, 函数 f 满足 $ISDRDF$ 的四条约束。因此函数 f 是一个 $ISDRDF$, 其权重为 $f(V) = 7 \times (3q - q) + 8q + (-1 + 2) \times 3q = 25q = k$ 。

反之, 假设 G 有一个权重最大为 k 的 $ISDRDF$ 。设图 H 是由图 G 的顶点子集 $\{v_1^j, v_2^j, \dots, v_8^j\}$ 所生成的点导出子图, 图 R 是由图 G 的顶点子集 $\{x_i, w_i\}$ 所生成的点导出子图。定义 $i_{sdr}(G)$ -函数 $g = (V_{-1}, V_1, V_2, V_3)$, 使得 $V_{-1} = \emptyset$, 且满足如下条件:

- 1) $|X \cap V_{-1}|$ 被最大化;
- 2) 受条件(1)约束: $|Z \cap V_3|$ 被最小化;
- 3) 根据条件(1)和(2): $|W \cap V_3|$ 被最小化。

因此作如下要求:

a) 由于 C 中的每一个元素都会对应 X 中的三个元素, 因此当 $g(c_j) = -1$ 和 $g(c_j) \neq -1$ 时, 子图 H_j 上所对应的最优赋值方案如图 2 所示, 则 $g(H_j) = \begin{cases} 7, g(c_j) = -1, \\ 8, g(c_j) \neq -1. \end{cases}$

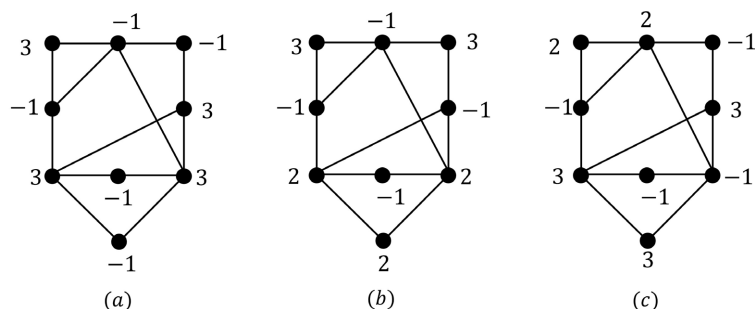


Figure 2. The optimal assignment scheme related to $g(c_j)$ on the subgraph H_j

图 2. 子图 H_j 上与 $g(c_j)$ 相关的最优赋值方案

b) 由(a), 任意顶点 c_j 都不需要被顶点 x_i 保护, 且子图 H_j 上有: $g(N[c_j]) = \begin{cases} 5, g(c_j) = -1, \\ 6, g(c_j) \neq -1. \end{cases}$

c) 任意顶点 x_i 都不被赋值为 2 或 3。事实上, 不妨设 X 中的某一顶点 x_1 , 若 $g(x_1) = 2$, 则 x_1 对应的邻点 w_1 , 有: $g(w_1) = 2$, 根据(b), 此时权重 $w(x_1 w_1) = 4$; 若 $g'(x_1) = 3$, 则 x_1 对应的邻点 w_1 , 有: $g'(w_1) = -1$, 根据(b), 此时权重 $w'(x_1 w_1) = 2 < w(x_1 w_1)$; 而 $N(x_1) \cap Z$ 的一个顶点赋值大于等于 2, 则通过重新分配定义 $g'' = (V_{-1} \cup \{x_1\} \setminus \{w_1\}, V_1, V_2 \cup \{w_1\}, V_3 \setminus \{x_1\})$ 。显然函数 g'' 的权重比函数 g 和函数 g' 的权重更小, 矛盾。从而 X 中有更多顶点被赋值了 -1;

d) 任意顶点 c_j 都不被赋值为 3。事实上, 不妨设 Z 中某一顶点 c_1 , 有 $g(c_1) = 3$, 则由(a)可得 $g(V(H_1)) = 8$ 。

下面在图 G 上定义一个新的 $i_{sdr}(G)$ -函数 $g' = (V_{-1}, V_1, V_2, V_3)$ 通过赋值 $g(c_1) = g(v_1^1) = g(v_3^1) = 2$, $g(v_6^1) = g(v_8^1) = 3$, $g(v_2^1) = g(v_4^1) = g(v_6^1) = g(v_8^1) = -1$, 并且对任意顶点 $v \in \{G \setminus H_1\}$, 有 $g'(v) = g(v)$ 。

此时 $w(g') = w(g)$, 故当集合 Z 中有赋值为 3 的顶点时, 可以用一个权重相同的独立符号双罗马控制函数 g' 对其进行替换, 从而任意顶点 c_j 都不被赋值为 3;

e) 任意顶点 w_i 都不被赋值为 3。事实上, 由(b)项和独立符号双罗马控制函数的定义, 任意一个顶点 $x_i \in X$ 与 Z 中三个顶点相邻, 其中两个顶点被赋值为 -1, 一个顶点被赋值为 2 的顶点。此时满足: $\sum f(N[x_i]) \geq 1$, 即: $f(w_i) \geq 2$ 。要使得整体权重之和较小, 因此 $f(w_i) = 2$ 。否则将会影响 C' 中 c_j 的赋值, 矛盾。

因此, 根据前面的条件, 可以得出 $X \subset V_{-1}$, $Z \cap V_3 = \emptyset$, $W \cap V_3 = \emptyset$ 。因此, $Z \subset V_2$ 。显然 $Z \cap V_2 \neq \emptyset$, 不妨设 $b = |Z \cap V_2|$, 而 C 中的每个顶点在 W 中正好有三个邻居, 则 $b \geq q$ 。此外, 由于 $g(V(H)) + g(V(R)) = 7 \times (3q - b) + 8b + (-1 + 2) \times 3q \leq 25q$, 有 $b \leq q$, 因此 $b = q$ 。又由于每个 c_j 在 X 中正好有三个近邻, 故 $C' = \{C_j : g(c_j) = 2\}$ 是 C 的精确覆盖。□

4. 总结与展望

本研究定义了图 G 上的 ISDRDF, 要求函数 $f: V(G) \rightarrow \{-1, 1, 2, 3\}$ 满足特定邻域条件且正权重顶点集

为独立集, 其最小权值为 $i_{sdR}(G)$ 。

我们首先根据 $i_{sdR}(G)$ 和 $\gamma_{sdR}(G)$ 的关系, 推导出了 $i_{sdR}(P_n)$ 和 $i_{sdR}(C_n)$ 的值在不同情况下的具体表达式。接着我们探讨了 $i_{sdR}(K_n)$ 的上界, 根据三种不同情况分别给出结果。最后我们通过将 $X3C3$ 问题归约, 证明了二部图上 ISDRD 是 NP-完全的。

这个研究结果为图的控制理论提供了新视角, 未来 ISDRDF 的研究可进一步探索在其他图类上的 $i_{sdR}(G)$ 及相关算法优化。由于独立符号双罗马控制融合了 IDR D 的独立性约束与 SDR D 的权重灵活性, 未来可以在需要“非相邻节点协同”且“动态平衡资源损益”的场景中发挥作用。例如, 在城市公共设施布局中, 独立条件可确保公园、医疗站等设施分布在非相邻区域以均衡服务范围, 负权重代表设施建设与维护成本, 正权重代表设施的服务覆盖强度, 该模型可辅助规划部门在有限预算内选择最优设施点位, 既避免资源浪费在相邻区域, 又实现服务覆盖与成本消耗的动态平衡。

基金项目

本研究得到了国家自然科学基金(编号: 11701059)和重庆市自然科学基金创新发展联合基金(市教委)(编号: CSTB2022NSCQ-LZX0003)的资助。

参考文献

- [1] Cockayne, E.J., Dreyer Jr, P.A., Hedetniemi, S.M. and Hedetniemi, S.T. (2004) Roman Domination in Graphs. *Discrete Mathematics*, **278**, 11-22. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.06.004>
- [2] Beeler, R.A., Haynes, T.W. and Hedetniemi, S.T. (2016) Double Roman Domination. *Discrete Applied Mathematics*, **211**, 23-29. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.03.017>
- [3] Rupnik Poklukar, D. and Žerovnik, J. (2023) Double Roman Domination: A Survey. *Mathematics*, **11**, Article 351. <https://doi.org/10.3390/math11020351>
- [4] Maimani, H., Momeni, M., Nazari Moghaddam, S., Rahimi Mahid, F. and Sheikholeslami, S.M. (2019) Independent Double Roman Domination in Graphs. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **46**, 543-555. <https://doi.org/10.1007/s41980-019-00274-8>
- [5] Ahangar, H.A., Chellali, M. and Sheikholeslami, S.M. (2019) Signed Double Roman Domination of Graphs. *Filomat*, **33**, 121-134. <https://doi.org/10.2298/fil1901121a>
- [6] Bertossi, A.A. (1984) Dominating Sets for Split and Bipartite Graphs. *Information Processing Letters*, **19**, 37-40. [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(84\)90126-1](https://doi.org/10.1016/0020-0190(84)90126-1)
- [7] Müller, H. and Brandstädt, A. (1987) The NP-Completeness of Steiner Tree and Dominating Set for Chordal Bipartite Graphs. *Theoretical Computer Science*, **53**, 257-265. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(87\)90067-3](https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90067-3)
- [8] Chang, M.S. (1998) Efficient Algorithms for the Domination Problems on Interval and Circular-Arc Graphs. *SIAM Journal on Computing*, **27**, 1671-1694. <https://doi.org/10.1137/s0097539792238431>
- [9] Brandstädt, A., Chepoi, V.D. and Dragan, F.F. (1998) The Algorithmic Use of Hypertree Structure and Maximum Neighbourhood Orderings. *Discrete Applied Mathematics*, **82**, 43-77. [https://doi.org/10.1016/s0166-218x\(97\)00125-x](https://doi.org/10.1016/s0166-218x(97)00125-x)
- [10] Henning, M.A. (1995) The Algorithmic Complexity of Signed Domination in Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **12**, 101-112.
- [11] Padamutham, C. and Palagiri, V.S.R. (2020) Algorithmic Aspects of Roman Domination in Graphs. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **64**, 89-102. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01345-4>
- [12] Liedloff, M., Kloks, T., Liu, J. and Peng, S.L. (2008) Efficient Algorithms for Roman Domination on Some Classes of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **156**, 3400-3415. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.01.011>
- [13] Chellali, M., Jafari Rad, N., Sheikholeslami, S.M. and Volkmann, L. (2020) Roman Domination in Graphs. In: *Developments in Mathematics*, Springer International Publishing, 365-409. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51117-3_11
- [14] Abdollahzadeh Ahangar, H., Chellali, M. and Sheikholeslami, S.M. (2017) On the Double Roman Domination in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **232**, 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.06.014>
- [15] Poureidi, A. (2022) Algorithm and Hardness Results in Double Roman Domination of Graphs. *Theoretical Computer Science*, **911**, 70-79. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2022.02.006>

-
- [16] Banerjee, S., Henning, M.A. and Pradhan, D. (2019) Algorithmic Results on Double Roman Domination in Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **39**, 90-114. <https://doi.org/10.1007/s10878-019-00457-3>
 - [17] Zhang, X., Li, Z., Jiang, H. and Shao, Z. (2018) Double Roman Domination in Trees. *Information Processing Letters*, **134**, 31-34. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2018.01.004>
 - [18] Padamutham, C. and Palagiri, V.S.R. (2021) Complexity Aspects of Variants of Independent Roman Domination in Graphs. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **47**, 1715-1735. <https://doi.org/10.1007/s41980-020-00468-5>
 - [19] Ahangar, H.A., Chellali, M. and Sheikholeslami, S.M. (2019) Signed Double Roman Domination in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **257**, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.09.009>
 - [20] Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater, P.J. (1998) Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker Inc.
 - [21] Ahangar, H.A., Amjadi, J., Chellali, M., Nazari-Moghaddam, S. and Sheikholeslami, S.M. (2019) Trees with Double Roman Domination Number Twice the Domination Number Plus Two. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, **43**, 1081-1088. <https://doi.org/10.1007/s40995-018-0535-7>
 - [22] Amjadi, J., Nazari-Moghaddam, S., Sheikholeslami, S.M. and Volkmann, L. (2018) An Upper Bound on the Double Roman Domination Number. *Journal of Combinatorial Optimization*, **36**, 81-89. <https://doi.org/10.1007/s10878-018-0286-6>
 - [23] Hickey, G., Dehne, F., Rau-Chaplin, A. and Blouin, C. (2008) SPR Distance Computation for Unrooted Trees. *Evolutionary Bioinformatics*, **4**, S419. <https://doi.org/10.4137/ebo.s419>