Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(8), 302-307
Published Online August 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.148390

Hans汉斯

导数的应用实例

金振宇[1]**，田恪明**[2*]

[1]苏州科技大学数学科学学院，江苏 苏州
[2]苏州科技大学天平学院公共教学部，江苏 苏州

收稿日期：2025年7月21日；录用日期：2025年8月14日；发布日期：2025年8月25日

摘 要

导数是高等数学课程中的核心概念之一，它不仅可以解决数学中的问题，还可以解决物理学、工程学、经济学等领域的诸多问题。本文通过八个实例，详细探讨了导数在数学、物理学、工程学、经济学这四个领域中的具体应用，旨在帮助学生更充分地理解导数的基本概念以及导数在实际问题中的应用，提高学生的学习兴趣和应用能力。

关键词

导数，高等数学，应用实例

Examples of Derivatives in Use

Zhenyu Jin[1]**, Keming Tian**[2*]

[1]School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu
[2]Department of General Education, Tianping College of Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Jul. 21st, 2025; accepted: Aug. 14th, 2025; published: Aug. 25th, 2025

Abstract

Derivative is one of the core concepts in advanced mathematics courses, which can not only solve problems in mathematics, but also solve many problems in physics, engineering, economics and other fields. This paper discusses the specific application of derivatives in mathematics, physics, engineering, and economics in detail through eight examples, aiming to help students fully understand the basic concepts of derivatives and the application of derivatives in practical problems, and improve students' learning interest and application ability.

*通讯作者。

文章引用: 金振宇, 田恪明. 导数的应用实例[J]. 应用数学进展, 2025, 14(8): 302-307. DOI: 10.12677/aam.2025.148390

Keywords

Derivatives, Advanced Mathematics, Application Examples

1. 引言

高等数学是高校理工类和经管类专业的一门重要基础课程，它不仅锻炼学生的逻辑思维能力和抽象思维能力，还和学生后续学习的专业课程相关联。导数作为高等数学中的一个核心概念，具有丰富的理论内涵和广泛的应用价值。近年来，众多学者从不同角度对导数的应用进行了深入研究，涉及数学、物理学、工程学、经济学等多个领域。

2010 年，辛春元[1]对导数在高等数学中的应用进行了系统总结；同年，郝卜[2]等人探讨了导数在大学物理课程中的应用。2012 年，毛敏芳和何朝晖[3]，通过具体实例展示了导数在解决高等数学问题中的应用。2013 年，张海燕和唐学明[4]进一步探讨了导数在物理学中的应用；同年，杨苗苗[5]通过多个实例展示了导数在高等数学中的应用，进一步强调了导数在高等数学中的重要性。2014 年，张蕾[6]详细阐述了导数的概念以及在高等数学中的应用。2016 年，周同和杜珍珍[7]通过具体工程实例探讨了导数在工程学问题中的应用；同年，陶秋媛[8]从教育的角度探讨了导数在高等数学教学中的应用。2017 年，周建兰[9]探讨了导数在物理学中的应用，发现了导数可以帮助学生更好地理解物理概念，如速度和加速度，并通过实例展示了如何借助导数的应用解决物理问题，提高了物理教学的效果。2018 年，陈林水和杨爱华[10]研究了导数在经济学中的应用，发现了导数在经济学中的边际分析、成本优化和利润最大化等问题中具有重要作用，通过导数可以精确地分析经济变量的变化规律，为经济决策提供科学依据。2021 年，周小红[11]对导数的概念进行了深入剖析，详细介绍了导数的计算方法及其在高等数学中的应用，为学生学习导数提供了系统的理论基础。同年，韦巧瑜[12]探讨了导数在工程学中的应用，发现了导数在地形地貌分析和测量误差控制中具有重要作用，通过导数可以精确地计算地形坡度和评估误差传播规律，提高了工程测量的精度和效率。2023 年，Shahhosseini 等人[13]研究了符号－数值混合计算方法在动力学和控制领域的应用，该方法不仅能够显著提高计算效率，还能提高求解的稳定性和精度，为复杂系统的数值模拟提供了一种新的高效工具。2025 年，Pundir 和 Kammer [14]探究了一种基于自动微分的快速傅里叶变换方法，简化了固体力学中的计算过程，提高了固体力学中复杂问题的计算效率和精度。同年，陈楚琪等人[15]详细分析了自动微分在训练神经网络中的应用，通过借助自动微分能够高效准确地计算神经网络的梯度，从而加快训练过程。

综上所述，导数作为一种重要的工具，在数学、物理学、工程学、经济学等多个领域都具有广泛的应用价值。然而，在实际教学过程中，许多学生对导数的应用理解不够深入，缺乏将理论知识与实际问题相结合的能力。因此，通过具体的实例来探讨导数的应用，不仅可以帮助学生更好地理解导数的概念，还可以提高学生的学习兴趣和应用能力。

2. 导数在数学中的应用实例

本节主要通过判断函数的单调性和求函数的极值这两个例子来探究导数在数学中的应用。

2.1. 判断函数的单调性

实例 1：判断函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的单调性。

具体解题步骤如下：

1) 求一阶导数：计算 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$；

2) 求一阶导数的零点：解方程 $f'(x)=0$，即 $3(x+1)(x-3)=0$，因此导数的零点为 $x_1=-1$，$x_2=3$；

3) 判断一阶导数的符号：将整个区间 $(-\infty,+\infty)$ 分为三部分：$(-\infty,-1)$、$(-1,3)$、$(3,+\infty)$，在三段区间上分别任意取点，判断 $f'(x)$ 的符号。

① 在区间 $(-\infty,-1)$ 内，取 $x=-2$，则 $f'(-2)=15>0$，函数 $f(x)$ 在该区间内单调递增；

② 在区间 $(-1,3)$ 内，取 $x=1$，则 $f'(1)=-12<0$，函数 $f(x)$ 在该区间内单调递减；

③ 在区间 $(3,+\infty)$ 内，取 $x=4$，则 $f'(4)=15>0$，函数 $f(x)$ 在该区间内单调递增。

综上可得结论：函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$ 内单调递增，在区间 $(3,+\infty)$ 内单调递减。

2.2. 求函数的极值

实例 2：求函数 $f(x)=2x^3+6x^2-48x+20$ 的极值。

具体解题步骤如下：

1) 求一阶导数：计算 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)=6x^2+12x-48=6(x+4)(x-2)$；

2) 求一阶导数的零点：解方程 $f'(x)=0$，即 $6(x+4)(x-2)=0$，因此，导数的零点为 $x_1=-4$，$x_2=2$；

3) 判断极值：计算二阶导数 $f''(x)=12x+12$，当 $x=-4$ 时，$f''(-4)=-36<0$，因此 $x=-4$ 是极大值点；当 $x=2$ 时，$f''(2)=36>0$，因此 $x=2$ 是极小值点；

4) 计算极值：极大值 $f(-4)=180$，极小值 $f(2)=-36$。

综上可得结论：函数 $f(x)=2x^3+6x^2-48x+20$ 在 $x=-4$ 处取得极大值 180，在 $x=2$ 处取得极小值 -36。

3. 导数在物理学中的应用实例

本节主要通过求物体的瞬时速度和物体的加速度这两个例子来探究导数在物理学中的应用。

3.1. 求物体的瞬时速度

实例 3：已知某物体在运动过程中的位移函数为 $S(t)=t^4+t^2-4t$，其中 S 表示物体的位移(单位：米)，t 表示时间(单位：秒)，求物体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度。

具体解题步骤如下：

1) 求一阶导数：计算位移函数 $S(t)$ 的一阶导数 $S'(t)=4t^3+2t-4=v(t)$；

2) 计算瞬时速度：将 $t=1$ 代入一阶导数得 $S'(1)=4\times1^3+2\times1-4=2=v(1)$。

综上可得结论：物体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度为 2 米/秒。

3.2. 求物体的加速度

实例 4：已知某物体在运动过程中的位移函数为 $S(t)=t^3+2t^2-t$，其中 S 表示物体的位移(单位：米)，t 表示时间(单位：秒)，求物体在 $t=2$ 秒时的加速度。

具体解题步骤如下：

1) 求一阶导数：计算位移函数 $S(t)$ 的一阶导数 $S'(t)=3t^2+4t-1=v(t)$；

2) 求二阶导数：计算位移函数 $S(t)$ 的二阶导数 $S''(t)=6t+4=v'(t)=a(t)$；

3) 计算瞬时速度：将 $t=2$ 代入二阶导数得 $S''(2)=6\times2+4=16=v'(2)=a(2)$。

综上可得结论：物体在 $t=2$ 秒时的加速度为 16 米/秒 ^{2}。

4. 导数在工程学中的应用实例

本节主要通过求控制系统中的瞬时误差变化率和信号的瞬时频率这两个例子来探究导数在工程学中的应用。

4.1. 控制系统

实例 5：已知某工厂有一个温度控制系统，其目标是将温度保持在 100℃。系统的实际温度是由一个温度传感器测量，而 PID 控制器是根据测量值和目标值之间的误差来调整加热器的功率。在这个系统中，误差 $e(t)=r(t)-c(t)$，其中 $r(t)$ 表示目标温度(100℃)，$c(t)$ 表示实际温度，它是关于时间 t （单位：s）的函数。已知 $c(t)=3t^2+90$，求在 $t=1$ s 时的瞬时误差变化率。

具体解题步骤如下：

1) 求误差函数：$e(t)=100-3t^2-90=-3t^2+10$；

2) 求误差函数的一阶导数：计算误差函数 $e(t)$ 的一阶导数 $e'(t)=-6t$；

3) 计算瞬时误差变化率：将 $t=1$ 代入一阶导数得 $e'(1)=-6$。

综上可得结论：在 $t=1$ s 时的瞬时误差变化率为−6。导数为负值表示误差正在减少，因为实际温度正在向目标温度靠近。PID 控制器会根据导数来调节加热器的功率，从而使实际温度接近目标值。

4.2. 信号处理

实例 6：已知一个波形信号的函数为 $y(t)=3\sin(\pi t)+8\cos(\pi t)$，其中 y 表示信号的幅度，t 表示时间，求该信号在 $t=0.5$ 秒时的瞬时频率。

具体解题步骤如下：

1) 求一阶导数：计算信号函数 $y(t)$ 的一阶导数 $y'(t)=3\pi\cos(\pi t)-8\pi\sin(\pi t)$；

2) 计算瞬时频率：瞬时频率 $f(t)=\frac{|y'(t)|}{2\pi}$，将 $t=0.5$ 代入瞬时频率得

$$f(0.5)=\frac{|y'(0.5)|}{2\pi}=\frac{|3\pi\cos(0.5\pi)-8\pi\sin(0.5\pi)|}{2\pi}=4。$$

综上可得结论：信号在 $t=0.5$ 秒时的瞬时频率为 4。

5. 导数在经济学中的应用实例

本节主要通过边际分析和求解最优化问题这两个例子来探究导数在经济学中的应用。

5.1. 边际分析

实例 7：已知某企业生产某产品的 Cobb-Douglas 生产函数为 $Y=\frac{1}{200}K^2L^2$，其中 Y 表示产出量(单位：千件)，K 表示资本投入(单位：万元)，L 表示劳动投入(单位：万元)，求 $K=20, L=10$ 时的资本边际报酬和劳动边际报酬。

具体解题步骤如下：

1) 求关于 K 的一阶偏导数：计算生产函数 Y 关于 K 的一阶偏导数 $\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{1}{100}KL^2$；

2) 计算资本边际报酬：将 $K=20, L=10$ 代入关于 K 的一阶偏导数得

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial K}\right|_{K=20,L=10}=\left.\frac{1}{100}KL^2\right|_{K=20,L=10}=20\text{；}$$

3) 求关于 L 的一阶偏导数：计算生产函数 Y 关于 L 的一阶偏导数 $\frac{\partial Y}{\partial L}=\frac{1}{100}K^2L$；

4) 计算劳动边际报酬：将 $K=20, L=10$ 代入关于 L 的一阶偏导数得

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial L}\right|_{K=20,L=10}=\left.\frac{1}{100}K^2L\right|_{K=20,L=10}=40\text{。}$$

综上可得结论：当 $K=20, L=10$ 时，资本边际报酬为 20 万元，劳动边际报酬为 40 万元。

5.2. 最优化问题

实例 8：已知某公司生产某种产品的成本函数为 $C(x)=0.05x^2+2x+100$，收益函数为 $R(x)=20x-0.05x^2$，其中 C 表示成本(单位：元)，R 表示收益(单位：元)，x 表示产量(单位：件)，求公司生产该产品的最大利润及对应产量。

具体解题步骤如下：

1) 求利润函数：利润函数可表示为

$$L(x)=R(x)-C(x)=\left(20x-0.05x^2\right)-\left(0.05x^2+2x+100\right)=18x-0.1x^2-100\text{；}$$

2) 求一阶导数：计算利润函数的一阶导数 $L'(x)=18-0.2x$；

3) 求一阶导数的零点：解方程 $L'(x)=0 \Rightarrow 18-0.2x=0 \Rightarrow x=90$；

4) 验证极值：计算利润函数二阶导数 $L''(x)=-0.2<0$，即 $x=90$ 是利润函数的极大值点，根据实际问题存在最大值，因此该极大值点就是最大值点；

5) 计算最大利润：$L(90)=18\times 90-0.1\times 90^2-100=710$。

综上可得结论：公司的最大利润为 710 元，且对应产量为 90 件。

6. 结论

通过上述八个实例的探讨，我们可以发现导数在数学中判断函数的单调性和极值，在物理学中求物体的瞬时速度和加速度，在工程学中的控制系统和信号处理分析，以及在经济学中进行边际分析和求解最优化问题都发挥了重要的作用。通过具体的实例，帮助学生更好地理解了导数的概念以及在实际问题中的应用，提高了学生的学习兴趣和应用能力。

基金项目

本文为 2024 年苏州科技大学天平学院校级重点课程建设项目(2024TPKC-12)阶段性成果。

参考文献

[1] 辛春元. 导数的应用研究[J]. 现代商贸工业, 2010, 22(19): 274-275.

[2] 郝卜, 呼方涛, 王猛, 等. 浅析大学物理中高等数学的应用技巧[J]. 科技信息, 2010(21): 659+720.

[3] 毛敏芳, 何朝晖. 导数应用的一个实例[J]. 佳木斯教育学院学报, 2012(12): 113+123.

[4] 张海燕, 唐学明. 高等数学在物理学中的应用[J]. 佳木斯教育学院学报, 2013(5): 208-209.

[5] 杨苗苗. 例谈导数在高等数学中的应用[J]. 才智, 2013(35): 102.

[6] 张蕾. 浅析高等数学中导数及导数的应用[J]. 才智, 2014(9): 94.

[7] 周同, 杜珍珍. 例谈高等数学知识在工程问题中的应用[J]. 铜陵职业技术学院学报, 2016, 15(1): 73-75+81.

[8] 陶秋媛. 浅析高等数学中导数及导数的应用[J]. 课程教育研究, 2016(10): 150.

[9] 周建兰. 导数在物理教学中的应用[J]. 中学物理教学参考, 2017, 46(16): 12-13.

[10] 陈林水, 杨爱华. 高等数学中导数在经济学中的应用[J]. 现代营销(经营版), 2018(6): 78-79.

[11] 周小红. 浅析高等数学中导数的概念[J]. 数学学习与研究, 2021(32): 8-10.

[12] 韦巧瑜. 高等数学在工程测量技术中的应用探析[J]. 四川水泥, 2021(3): 65-66.

[13] Shahhosseini, A., Tien, M. and D'Souza, K. (2023) Efficient Hybrid Symbolic-Numeric Computational Method for Piecewise Linear Systems with Coulomb Friction. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **18**, Article ID: 071004. https://doi.org/10.1115/1.4062203

[14] Pundir, M. and Kammer, D.S. (2025) Simplifying FFT-Based Methods for Solid Mechanics with Automatic Differentiation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **435**, Article ID: 117572. https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117572

[15] Chen, C., Yang, Y., Xiang, Y. and Hao, W. (2025) Automatic Differentiation Is Essential in Training Neural Networks for Solving Differential Equations. *Journal of Scientific Computing*, **104**, Article No. 54. https://doi.org/10.1007/s10915-025-02965-3