Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(8), 141-146
Published Online August 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.148378

Hans汉斯

基于积分中值定理对信号系统中冲击函数做进一步推广

凌洪涛

安徽国际商务职业学院信息工程学院，安徽 合肥

收稿日期：2025年7月12日；录用日期：2025年8月5日；发布日期：2025年8月14日

摘　要

冲击函数(δ函数)作为广义函数理论的核心概念，其传统构造方法主要依赖于极限过程。本文创新性地从积分中值定理的视角出发，首先通过积分第一中值定理的特殊形式，系统阐述了面积为1的矩形函数在宽度趋近于零时自然诱导出冲击函数的数学机制；进而将这一方法推广至分析“数除以零”的数学禁忌，揭示了该运算在冲击函数框架下必然导致矛盾的本质原因。研究表明，积分中值定理不仅为冲击函数提供了一种新的严格化途径，更能为理解其他奇异积分问题提供统一的分析框架。本文的结论为广义函数理论的基础研究提供了新的思路，并对相关数学物理问题的研究具有启示意义。

关键词

冲击函数，积分中值定理，广义函数，奇异积分，除零运算

Further Generalization of the Impulse Function in Signal Systems Based on the Integral Mean Value Theorem

Hongtao Ling

Information Engineering College of Anhui Institute of International Business, Hefei Anhui

Received: Jul. 12th, 2025; accepted: Aug. 5th, 2025; published: Aug. 14th, 2025

Abstract

The delta function, as a fundamental concept in the theory of generalized functions, has traditionally been constructed through limiting processes. This paper innovatively examines the delta function from the perspective of the integral mean value theorem. We first systematically demonstrate

文章引用: 凌洪涛. 基于积分中值定理对信号系统中冲击函数做进一步推广[J]. 应用数学进展, 2025, 14(8): 141-146.
DOI: 10.12677/aam.2025.148378

how a rectangular pulse function with unit area naturally induces the delta function as its width approaches zero, using a specialized form of the first integral mean value theorem. This approach is then extended to analyze the mathematical prohibition of "division by zero", revealing how such operations inherently lead to contradictions within the delta function framework. Our research shows that the integral mean value theorem not only provides a novel rigorous approach to the delta function but also offers a unified analytical framework for understanding other singular integral problems. The conclusions present fresh insights for foundational studies in generalized function theory and carry significant implications for research in related mathematical physics problems.

Keywords

Delta Function, Integral Mean Value Theorem, Generalized Functions, Singular Integrals, Division by Zero

1. 引言

在信号处理和通信原理中，单位冲击函数(通常表示为 $\delta(t)$)扮演着至关重要的角色[1]。它描述了一个理想化的物理现象，即在超级短的时间内发生且幅度极大的信号。其在整个时间轴上的积分等于 1，无论是国内郑君里的教材还是美国奥本海姆的教材都只讨论了单位冲击函数的情况[2]。然而，当单位冲击函数乘以一个常数时，虽然冲击的“强度”发生变化，但其图形表征仍然是一个冲击脉冲，这就带来了一个问题：在传统的直角坐标系下，我们无法从图形上区分不同大小的冲击函数。但是我们可以直接在坐标系上标记数字来标记产生冲击函数原函数的大小，这是通用做法，很早以前的教材和学术著作中就是这样做的。只是教材和学术著作中一般只标记单位冲击函数，也就是产生单位冲击函数的原函数积分为 1，而对于产生冲击函数原函数积分超过 1 的情况不做任何讨论，本文要在这个基础上展开讨论[3]。此外，文章提出了一个大胆的猜想，即将“除以 0”视为一种广义变换，其结果可以定义为冲击函数。并且文章中给出了相应的说明演示归纳和推导。

2. 冲击函数的产生

冲击函数可以用很多不同的函数形式来定义，其中最常用的是矩形脉冲的形式，所谓矩形脉冲形式是分析矩形脉冲演变成冲激函数过程得到的。具体表现形式如公式(1-1)表示[1]

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{1-1}$$

公式(1-1)表示在 $t=0$ 处产生一个广义积分为 1 的冲击。图 1 中的红色表示冲击。

在广义函数理论中，冲激函数通常被表示为狄拉克函数(Dirac delta function)，记作 $\delta(x)$。它不是一个传统意义上的函数，而是一个广义函数或分布。其定义满足两个基本性质[4]：一是冲击性，即在 $x=0$ 处，它的值是无穷大，在其他地方值为零；二是单位面积性，即狄拉克函数的积分为 1，这意味着虽然 $\delta(x)$在 $x=0$ 处无穷大，但其在整个数轴上的“面积”是 1。

这意味着任何积分面积为 1 的函数都可以变成单位冲击函数。任何一个有积分面积的函数都可以变成对应的冲击函数。

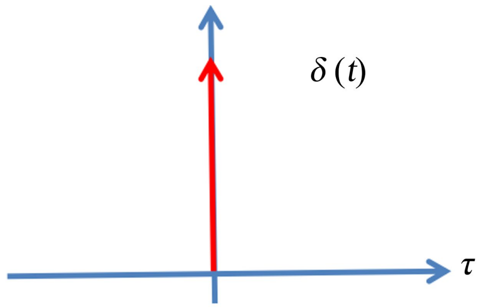

Figure 1. Cartesian coordinate representation of the unit impulse function
图 1. 单位冲击函数的直角坐标表示

3. 积分第一中值定理及其特殊形式

积分第一中值定理：

设函数 $f(x)$在实数区间$[a, b]$上连续，函数 $g(x)$在实数区间$[a, b]$上也连续，且要求函数 $g(x)$是可以被积分的函数，同时要求函数 $g(x)$在积分区间的结果不改变正负符号，那么存在一个点 c，这个点属于区间$[a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad [5] \tag{1}$$

下面对该定理进行证明：

假设取任意的 x 使得函数 $g(x)$在区间内大于 0 恒成立，又因为函数 $f(x)$是闭区间上的连续函数，所以函数 $f(x)$可以在区间上取得最大值 M 和最小值 m。于是有下面的表达式(2)成立：

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad [6] \tag{2}$$

下面分情况讨论：

第一种情况，如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$ 那么 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$，这样 c 可以取得区间$[a, b]$上任意一个值。

第二种情况，如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ne 0$，则根据已经知道的假设条件可以得到，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$，这个时候可以对表达式(2)两边同时除以 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 可以得到表达式(3)

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le M \quad [7] \tag{3}$$

因为函数 $f(x)$可以在区间上取得最大值 M 和最小值 m 是已知条件，所以根据介值定理，必然存在一个点 c 在区间$[a, b]$上使得

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

稍作变换即可得到表达式(1)。

因此在函数 $g(x)$大于 0 的时候定理成立，而函数 $g(x)$小于 0 的情况是镜像的，因此省略。

特别地当函数 $g(x) = 1$ 的时候表达式(1)的结果会变成一个更加简洁的形式，也就是下面表达式(4)的情况

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a) \tag{4}$$

这个特殊形式也叫做拉格朗日中值定理的积分形式，因为表达式(4)可以用拉格朗日中值定理的微分形式证明得到。表达式(4)的几何意义是函数 $f(x)$在区间$[a, b]$内的积分结果可以用函数 $f(x)$在区间内的一个值 $f(c)$乘以$(b-a)$得到的矩形面积等效表示。这个表达式(4)作为积分第一中值定理的特殊形式有更加广泛的应用，下面会阐述作者发现的关于这个特殊形式的两个推论现象。

4. 通过积分中值定理理解冲击函数的产生

第二段我们用严格的数学公式描述，阐述了积分中值定理的一种动态形式：即积分结果不变的情况下缩小或者扩展积分区域，那么积分中值点(c 点)也要随之变化。

现在我们可以从积分中值定理的动态视角来理解冲击函数的产生。积分中值定理告诉我们：在积分结果不变的前提下，如果改变积分区域的范围，那么积分中值点(c 点)的位置和函数值($f(c)$)也会相应调整。

冲击函数可以看作这个过程的极限情况：当积分区域无限收缩趋近于一个点时(比如矩形函数宽度趋于零)，为了保持积分结果不变(比如保持面积为 1)，积分中值 $f(c)$必须无限增大来补偿区域收缩带来的损失。这就形成了在原点处“无限高、无限窄”但“面积保持为 1”的冲击函数。

更一般地，任何积分面积为 A 的函数，当将其压缩到无限小区域时，都会产生一个“广义面积为 A”的冲击函数。这解释了为什么冲击函数可以有不同的“强度”(如 $2\delta(x)$表示面积为 2 的冲击) [8]。

下面给出这个过程的数学描述：

设原始函数 $g_e(x)$ 满足：

支撑集 $\operatorname{supp}(g_e)\subseteq[-\varepsilon,\varepsilon]$

$\int g_e(x)\mathrm{d}x = A$ (常数)

当 $\varepsilon\to 0$ 时， $g_e(x)$ 在 $x\neq 0$ 处 $\to 0$

则由积分中值定理，存在 $\xi_e\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ 使得：

$$\int f(x)g_e(x)\mathrm{d}x = f(\xi_e)\cdot A$$

即： $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int f(x)g_e(x)\mathrm{d}x = f(\xi_e)\cdot A$

当 $\varepsilon\to 0$ 时：

$\xi_e\to 0$ (因区间收缩)

左边 $\to$ $A\cdot f(0)$ (冲击函数性质)

右边 $\to$ $f(0)\cdot A$

这表明 $g_e(x)$ 弱收敛于 $A\cdot\delta(x)$。特别当 $A=1$ 时就是标准冲击函数[9]。

A 如果为任意常数就可以是扩展的冲击函数。

5. 一个面积为 1 的矩形函数产生冲激函数的过程

第三部分用文字通俗的描述了用积分中值定理描述冲激函数的产生，读者不用太在意数学描述，能看懂文字描述即可。下面通过一个矩形函数的面积(面积可以代替积分)变化去形象的表示这个过程。

设存在矩形函数 $R_\tau(t)$，其在区间$\left[\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right]$内取值为$\frac{1}{\tau}$，其余区间取值为 0，该函数的积分面积可表示为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_\tau(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\frac{1}{\tau}\mathrm{d}t = 1,$$

如图 2 所示：

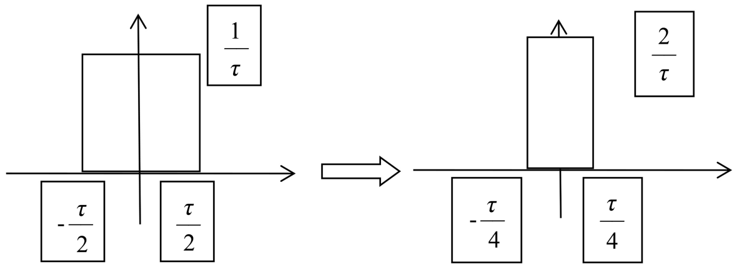

Figure 2. The generation process of an impulse function
图 2. 一个冲击函数产生的过程

压缩区间$\left[\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right]$为$\left[\frac{\tau}{4},\frac{\tau}{4}\right]$，要想维持积分面积为 1 不变，则函数 $R_\tau(t)$ 在区间内的取值为$\frac{2}{\tau}$，同理如果继续压缩区间直到区间的几何测度为 0 的时候，要维持积分面积积分为 1 不变，那么就产生了单位冲击函数，因为根据单位冲击函数的定义，单位冲击函数的广义积分为 1。

然后我们换一个角度去理解图 2 的过程，图中矩形的面积是维持 1 不变的，那么可以将图 2 左边理解为：$\tau\times\frac{1}{\tau}=1$进一步可以理解为$1/\tau=\frac{1}{\tau}$。

同样地可以将图 2 的右边理解为：$\frac{2}{\tau}\times\frac{\tau}{2}=1$进一步可以理解为$1\Big/\frac{\tau}{2}=\frac{2}{\tau}$，

即$\int_{-\infty}^{+\infty}R_\tau(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{\tau\to0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}t=1$。

进一步，可以假设矩形函数的底边区间为 a，区间内的函数值为 b，那么把这个矩形函数看成一个矩形，这个时候我们可以用小学数学看这个问题。也就是：

$a\times b=1$ 进一步，做一下变化可以看成 $1/a=b$。

这个时候冲击函数产生的过程就可以看成面积的值不变，面积除以宽的结果等于长这样的这样基本的除法问题。那么当底边的区间趋近于 0，即将产生单位冲击函数的时候，是不是可以理解为 $1/0=\delta(t)$。

但是此时此刻的等号是不成立的，虽然通过这个过程可以发现 1/0 与 $\delta(t)$有关系。

6. 利用冲激函数理解除零运算的猜想

通过第四部分我们可以看出来，单位冲击函数产生的过程，可以看成是 1/0 的运算，但是由于冲击函数不是一个数，因此两者不能用等号连接。我们可以尝试用推出符号表示。

即：$1/0\to\delta(t)$。

这样的推论在狭义的微积分中不能直接成立但是可以从广义函数中找到一些弱关联。

我们可以定义 $\delta(t)$为 $1/x$ 的广义函数：

在分布理论中，$1/x$ 本身不是分布(在 $x=0$ 不可积分)，但是可以定义其正则化：

$$\left\langle p.v.\left(\frac{1}{x}\right),\phi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x$$

其中 $\phi(x)$ 是光滑紧支撑检验函数。

这样可以找到 1/0 与单位冲击函数找到弱关联。

进而我们可以推广到任意一个数

$$x/0=x\times(1/0)\to x\delta(t) \tag{5}$$

而公式(5)可以利用定积分的性质[7]进行反向验证

即：$\int x\delta(t)\mathrm{d}t = x\int\delta(t)\mathrm{d}t = x$。

这就可以完善了一个数 x 除以 0 的实际意义是：一个积分面积为 x 的矩形函数(其他函数是否成立需要进一步的理论推导)压缩成为对应冲击函数的过程。但是 0/0 不成立，因为一个积分为 0 的矩形函数不可能压缩成为冲击函数。

当然这个猜想的严格数学证明期待其他数学界同仁去完善。

7. 总结

本文从积分中值定理的全新视角重构了冲击函数的理论基础，并创新性地建立了“除以零”运算与冲击函数的数学联系。研究首先通过积分第一中值定理的动态形式，严格证明了面积为 1 的矩形函数在宽度趋于零时必然弱收敛于 δ 函数的过程：当积分区域 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 收缩时，中值点 $\xi(\varepsilon)\to 0$，为保持积分值恒定，函数值必须趋向无穷大，这正是冲击函数的本质特征。研究进一步发现，这一过程可抽象为 $1/0\to\delta(t)$ 的数学关系，并由此提出广义运算猜想 $x/0\to x\delta(t)$，该猜想通过定积分性质验证了其自洽性。

参考文献

[1] Bracewell, R.N. (2000) The Fourier Transform and Its Applications. 3rd Edition, McGraw-Hill.

[2] 郑君里, 等. 信号与系统, 上册[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2000: 18.

[3] Gel’fand, I.M. and Shilov, G.E. (1964) Generalized Functions, Vol. 1: Properties and Operations. Academic Press.

[4] Oppenheim, A.V., Willsky, A.S. and Nawab, S.H. (1997) Signals and Systems. 2nd Edition, Prentice Hall.

[5] Thomas, G.B., Weir, M.D. and Hass, J. (2018) Thomas’ Calculus. 14th Edition, Pearson.

[6] Rudin, W. (1976) Principles of Mathematical Analysis. 3rd Edition, McGraw-Hill.

[7] 同济大学数学系编. M 高等数学, 上册[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 234.

[8] Schwartz, L. (1950) Théorie des distributions. Hermann.

[9] Schiff, J.L. (1999) The Laplace Transform: Theory and Applications. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-22757-3