

第三类时滞Volterra积分微分方程的Legendre谱配置法

陈 静

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2025年7月1日; 录用日期: 2025年7月24日; 发布日期: 2025年8月5日

摘 要

本文提出了一种基于Legendre谱配置格式的数值方法, 用于求解具有比例时滞项的第三类Volterra积分微分方程。首先, 通过光滑变换, 有效改善了方程解的正则性。随后, 利用插值性质, 通过定理和引理给出了误差分析。最后通过数值实验, 验证了方案及算法的有效性。

关键词

Volterra积分微分方程, 谱配置方法, 比例时滞, 光滑变换

Legendre Spectral Collocation Method for Third-Kind Volterra Integro-Differential Equations with Proportional Delays

Jing Chen

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jul. 1st, 2025; accepted: Jul. 24th, 2025; published: Aug. 5th, 2025

Abstract

In this paper, a numerical method based on the Legendre spectrum configuration format is proposed to solve the third-kind Volterra integral differential equations with proportional delay terms. Firstly, the regularity of the equation solution is effectively improved by smooth transformation. Subsequently, using the interpolation property, the error analysis is given by theorem and lemma. Finally, numerical experiments are carried out to verify the effectiveness of the scheme and algorithm.

Keywords

Volterra Integro-Differential Equations, Spectral Collocation Method, Proportional Delays, Smooth Transformation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑如下具有弱奇异核的第三类时滞 Volterra 积分微分方程

$$t^\beta y'(t) = a_1(t)y(t) + b_1(t)y(qt) + g_1(t) + q^{-\beta} \int_0^{qt} (qt - \sigma)^{-\alpha} \sigma^{\alpha+\beta-1} K(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma, \quad (1)$$

初始条件为

$$y(0) = y_0,$$

其中 $0 \leq \alpha < 1, \beta > 0, \alpha + \beta \geq 1, a_1(t), b_1(t), g_1(t), K(t, \sigma)$ 都是光滑函数, 未知函数 $y(t)$ 定义在 $0 \leq t \leq T < +\infty$ 上。

方程(1)可以用等价的 cordial Volterra 积分微分方程(CVIDE)表示

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(qt) + g(t) + (\mathcal{K}y)(t), \quad (2)$$

其中

$$a(t) = t^{-\beta} a_1(t), b(t) = t^{-\beta} b_1(t), g(t) = t^{-\beta} g_1(t),$$

和 cordial 算子

$$(\mathcal{K}y)(t) = (qt)^{-\beta} \int_0^{qt} (qt - \sigma)^{-\alpha} \sigma^{\alpha+\beta-1} K(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma,$$

并且当 $K(0, 0) = 0$ 时, $(\mathcal{K}y)(t)$ 是从 $C(I)$ 到 $C(I)$ 的紧算子, 当 $K(0, 0) \neq 0$ 时, 算子是非紧的。

Volterra 积分方程(VIE)和 Volterra 积分微分方程(VIDE)是生物数学和物理建模中的重要工具, 广泛应用于种群动力学、粘弹性力学等领域。在数值分析中, 谱方法被公认为具备卓越的精度和良好的误差收敛特性, Chen 和 Tang [1]创新性地构造了第二类弱奇异 VIE 的谱配置方法。在此基础上, Chen 等人针对第二类 VIDE 提出了一系列具有比例延迟的数值格式[2]-[4]。近年来, 谱配置法被推广应用于第三类 VIE 和 VIDE。文章[5]应用谱配置方法求解了第三类非线性 Volterra-Hammerstein 积分方程, 理论分析证明了该方法的指数收敛性。Ma [6]等人使用光滑变换后的 Chebyshev 谱配置方法求解第三类线性 Volterra 积分方程, 获得了谱精度并提供了严格的收敛性分析。文章[7]应用 Legendre 谱配置方法对一类第三类 Volterra 延迟积分方程进行了逼近。对于第三类 VIDE, Ma 和 Huang [8]考虑了光滑变换后方程的非光滑解, 应用谱配置方法来实现高精度和低计算成本。文章[9]求解一类弱奇异沃尔泰拉积分微分方程的分数谱配置方法。在上述工作的启发下, 本文的目的是设计一种求解第三类比例时滞微分方程的 Legendre 谱配置法, 并给出了严格的收敛性分析。该研究不仅丰富了谱方法在时滞微分方程中的应用, 同时也为相关模型的数值模拟提供了更高效、更精确的算法支持。相较于已有工作, 本文的主要创新体现在: 首次建立了比例时滞第三类 VIDE 的 Legendre 谱配置理论框架; 提出了改进的光滑变换策略, 优化了解的正规性; 发展了适用于非对称核函数的新型误差估计技术。

本文的组织结构如下。在第 2 节中, 我们将介绍具体的函数空间并为方程构造一个数值格式。在第 3 节中, 我们给出几个重要的引理, 它们将在下文中用于构造收敛结果。在第 4 节中, 我们将证明在加权 L^∞ 和 L^2 -范数下所提出方法的收敛性分析。在第 5 节中, 将给出数值实验来证明第 4 节的理论分析。最后, 在第 6 节中总结结论。

2. 预备知识及离散格式

2.1. 预备知识

定义 1: [10] 对于给定的正整数 N , 设 P_N 表示所有次数不超过 N 的多项式的空间。对 $\alpha, \beta > -1$,

$$L_{\omega^{\alpha,\beta}}^2(-1,1) = \{u \mid u \text{ 是可测函数且 } \|u\|_{\omega^{\alpha,\beta}} < \infty\}$$

是加权希尔伯特空间, 配备以下内积和范数

$$(u, v)_{\omega^{\alpha,\beta}} = \int_{-1}^1 u(x)v(x)\omega^{\alpha,\beta}(x)dx, \quad \|u\|_{\omega^{\alpha,\beta}} = (u, u)_{\omega^{\alpha,\beta}}^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

其中 $\omega^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ 是表示在 $(-1,1)$ 上的标准 Jacobi 权重函数。

定义 2: [10] 对于任何非负整数 m , 定义

$$H_{\omega^{\alpha,\beta}}^m(-1,1) = \{v \mid \partial_x^k v \in L_{\omega^{\alpha,\beta}}^2(-1,1), 0 \leq k \leq m\},$$

和范数

$$|v|_{H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m,N}} = \left(\sum_{k=\min(m,N+1)}^m \|\partial_x^k v\|_{\omega^{\alpha,\beta}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

定义 3: [10] 设 $B_{\omega^{\alpha,\beta}}^m$ 是由下式给出的非一致加权 Sobolev 空间:

$$B_{\omega^{\alpha,\beta}}^m(-1,1) = \{v \mid \partial_x^k v \in L_{\omega^{\alpha+k,\beta+k}}^2(-1,1), 0 \leq k \leq m\}.$$

定义离散内积为

$$(u, v)_{N, \omega^{\alpha,\beta}} = \sum_{k=0}^N u(x_k)v(x_k)\omega_k. \quad (4)$$

其中 $\{x_k, \omega_k\}_{k=0}^N$ 是相对于 Jacobi 权重 $\omega^{\alpha,\beta}(x)$ 的正交节点和权重的集合。

定义 4: [6] 对于给定的 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\nu \in \mathbb{R}, \nu < 1$, 通过 $C^{m,\nu}(0,T]$ 我们表示连续函数 $f: [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ 的集合, 其在 $(0,T]$ 中是 m 次连续可微的, 使得对于所有 $t \in (0,T]$ 和 $i=1,2,\dots,m$ 以下估计成立

$$|f^{(i)}(t)| \leq c \begin{cases} 1 & \text{if } i < 1-\nu, \\ 1+|\log t| & \text{if } i = 1-\nu, \\ t^{1-i-\nu} & \text{if } i > 1-\nu. \end{cases}$$

通过 $\mathbb{C}^{r,\kappa}(-1,1)$ 表示其 r 阶导数是 Hölder 连续的函数空间, 指数为 κ , 赋予通常的范数

$$\|v\|_{r,\kappa} = \max_{0 \leq k \leq r} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\partial_x^k v(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|\partial_x^r v(x) - \partial_x^r v(y)|}{|x-y|^\kappa}.$$

2.2. 离散格式

为了应用 Legendre 谱配置法, 通过变换 $\sigma = qs$, 方程(2)可写成如下

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(qt) + g(t) + t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{\alpha+\beta-1} K(t,qs)y(qs)ds.$$

继续对变量进行变换 $t = \frac{T}{2^\rho}(1+x)^\rho$, $s = \frac{T}{2^\rho}(1+\tau)^\rho$, $1 \leq \rho \in \mathbb{N}$, 则上述式子变为

$$u'(x) = \tilde{a}(x)u(x) + \tilde{b}(x)u\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}x - 1\right) + f(x) + \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(x,\tau)J_{\alpha,\beta,\rho,q}(x,\tau)u\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right)d\tau. \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} u(x) &= y\left(\frac{T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho}\right), f(x) = \frac{\rho T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho-1}g\left(\frac{T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho}\right), \\ \tilde{a}(x) &= \frac{\rho T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho-1}a\left(\frac{T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho}\right), \tilde{b}(x) = \frac{\rho T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho-1}b\left(\frac{T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho}\right), \\ \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(x,\tau) &= \frac{\rho^2 T}{2^{\rho}} \frac{\left[(1+x)^{\rho} - (1+\tau)^{\rho}\right]^{-\alpha}}{(1+x)^{\beta\rho-\rho+1}} (1+\tau)^{\rho(\alpha+\beta)-1}, \\ J_{\alpha,\beta,\rho,q}(x,\tau) &= K\left(\frac{T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho}, \frac{qT}{2^{\rho}}(1+\tau)^{\rho}\right). \end{aligned}$$

通过对(5)两边积分, 我们进一步得到等价的积分方程

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-1}^x \tilde{a}(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{-1}^x \tilde{b}(\tau)u\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right)d\tau + \int_{-1}^x f(\tau)d\tau + \int_{-1}^x z(\tau)d\tau, \\ z(x) &= \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(x,\tau)J_{\alpha,\beta,\rho,q}(x,\tau)u\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right)d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

此外, 为了精确地计算(6)中的积分项, 我们进行线性变换

$$\tau = \tau(x, \vartheta) = \frac{1+x}{2}\vartheta + \frac{x-1}{2}, \quad \vartheta \in [-1, 1].$$

则(6)变为

$$\begin{aligned} u(x) &= \hat{f}(x) + \frac{1+x}{2} \int_{-1}^1 \tilde{a}(\tau(x, \vartheta))u(\tau(x, \vartheta)) + \tilde{b}(\tau(x, \vartheta))u\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x, \vartheta) - 1\right) + z(\tau(x, \vartheta))d\vartheta, \\ z(x) &= \int_{-1}^1 \chi_{\alpha,\beta,\rho}(\vartheta)\psi_{\alpha,\beta,\rho,q}(x, \vartheta)u\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x, \vartheta) - 1\right)d\vartheta. \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-1}^x f(\tau)d\tau, \\ \chi_{\alpha,\beta,\rho}(\vartheta) &= (1-\vartheta)^{-\alpha} (1+\vartheta)^{\rho(\alpha+\beta)-\lceil\rho(\alpha+\beta)\rceil}, \\ \varsigma(x, \vartheta) &= K\left(\frac{T}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho}, \frac{qT}{2^{\rho}}(1+x)^{\rho}(1+\vartheta)^{\rho}\right), \\ \varphi_{\alpha,\beta,\rho}(\vartheta) &= \frac{\rho^2 T}{2^{(\beta+1)\rho}} \left(\sum_{i=0}^{\rho-1} 2^i (1+\vartheta)^{\rho-i-1}\right)^{-\alpha} (1+\vartheta)^{\lceil\rho(\alpha+\beta)\rceil-1}, \\ \psi_{\alpha,\beta,\rho,q}(x, \vartheta) &= (1+x)^{\rho-1} \varphi_{\alpha,\beta,\rho,q}(\vartheta)\varsigma(x, \vartheta). \end{aligned}$$

设 $\{\vartheta_{1,k}, \omega_{1,k}\}_{k=0}^N, \{\vartheta_{2,k}, \omega_{2,k}\}_{k=0}^N$ 分别相对于 Jacobi 权重 $\omega^{0,0}$ 和 $\chi_{\alpha,\beta,\rho}$ 的正交节点和权重的集合, 因此上述等式中的积分项可以近似为

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \tilde{a}(\tau(x, \vartheta))u(\tau(x, \vartheta)) + \tilde{b}(\tau(x, \vartheta))u\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x, \vartheta) - 1\right) + z(\tau(x, \vartheta))d\vartheta \\ &\approx \sum_{k=0}^N \left[\tilde{a}(\tau(x, \vartheta_{1,k}))u(\tau(x, \vartheta_{1,k})) + \tilde{b}(\tau(x, \vartheta_{1,k}))u\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x, \vartheta_{1,k}) - 1\right) + z(\tau(x, \vartheta_k)) \right] \omega_{1,k}, \end{aligned}$$

$$z(x) \approx \sum_{k=0}^N \psi_{\alpha, \beta, \rho, q}(x, \vartheta_{2,k}) u \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(x, \vartheta_{2,k}) - 1 \right) \omega_{2,k}.$$

现在, 我们考虑求解(7)的 Legendre 配置法。我们用 $\{x_j\}_{j=0}^N$ 表示配置点, 它们是区间 $[-1, 1]$ 中对应于权重函数 $\omega^{0,0}$ 的 $(N+1)$ 个 Legendre-Gauss-Radau 点的集合。并且考虑由下式定义的拉格朗日插值算子 $I_x^N : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{P}_N$

$$I_x^N u(x) = \sum_{j=0}^N \mathcal{F}_j(x) u(x_j), \quad (8)$$

其中 $\{\mathcal{F}_j(x)\}_{j=0}^N$ 是对应于非均匀网格 $\{x_j\}_{j=0}^N$ 的拉格朗日基函数。

在 x_i 处离散化(7),

$$u(x_i) = \hat{f}(x_i) + \frac{1+x_i}{2} \int_{-1}^1 \tilde{a}(\tau(x_i, \vartheta)) u(\tau(x_i, \vartheta)) + \tilde{b}(\tau(x_i, \vartheta)) u \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(x_i, \vartheta) - 1 \right) + z(\tau(x_i, \vartheta)) d\vartheta. \quad (9)$$

我们用 u_i 表示 $u(x_i)$ 的近似值。Legendre 配置法是寻求形式为 $u^N(x) = \sum_{i=0}^N u_i \mathcal{F}_i(x) \in P_N$ 的近似解, 使得 $u_i, i=0, \dots, N$ 满足以下离散

$$\begin{aligned} u_i = & \hat{f}(x_i) + \frac{1+x_i}{2} \sum_{k=0}^N \omega_{1,k} \left[\tilde{a}(\tau(x_i, \vartheta_{1,k})) \sum_{l=0}^N u_l F_l(\tau(x_i, \vartheta_{1,k})) \right. \\ & \left. + \tilde{b}(\tau(x_i, \vartheta_{1,k})) \sum_{l=0}^N u_l F_l \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(x_i, \vartheta_{1,k}) - 1 \right) \right. \\ & \left. + \sum_{p=0}^N \omega_{2,p} \psi_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau(x_i, \vartheta_{1,k}), \vartheta_{2,p}) \sum_{l=0}^N u_l F_l \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(x_i, \vartheta_{1,k}), \vartheta_{2,p} \right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (10)$$

设

$$\begin{aligned} U &= (u_0, u_1, \dots, u_N)^T, \\ F &= (\hat{f}(x_0), \hat{f}(x_1), \dots, \hat{f}(x_N))^T, \\ a_{i,l} &= \frac{1+x_i}{2} \sum_{k=0}^N \omega_{1,k} \left[\tilde{a}(\tau(x_i, \vartheta_{1,k})) F_l(\tau(x_i, \vartheta_{1,k})) + \tilde{b}(\tau(x_i, \vartheta_{1,k})) F_l \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(x_i, \vartheta_{1,k}) - 1 \right) \right], \\ b_{i,l} &= \sum_{k=0}^N \omega_{1,k} \sum_{p=0}^N \omega_{2,p} \psi_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau(x_i, \vartheta_{1,k}), \vartheta_{2,p}) F_l \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(x_i, \vartheta_{1,k}), \vartheta_{2,p} \right) - 1, \\ A &= [a_{i,l} + b_{i,l}]_{i,l=0}^N. \end{aligned}$$

因此得到矩阵形式

$$U = F + AU. \quad (11)$$

在确定了方程(5) $u^N(x)$ 的近似值之后, 我们可以确定近似值

$$y^N(t) = u^N \left(2 \left(\frac{t}{T} \right)^{\frac{1}{\rho}} - 1 \right) = \sum_{j=0}^N u_j \mathcal{F}_j \left(2 \left(\frac{t}{T} \right)^{\frac{1}{\rho}} - 1 \right). \quad (12)$$

所得到的矩阵方程中的系统矩阵 A 具有以下关键谱性质:

1) 当 N 增大时, 矩阵 A 的条件数呈现多项式增长, 这保证了算法在大规模问题中的数值稳定性;

2) 矩阵 A 具有拟对角占优结构, 其非零元素分布呈现特定的模式: 主对角线附近元素幅值较大, 远离对角线的元素呈指数衰减;

3) 通过预条件技术(如基于低阶近似的对角预条件子)可显著改善迭代求解效率。

3. 主要引理

在这一节中, 我们将给出一些关键的引理, 这些结果为后续收敛性分析奠定了重要理论基础。

引理 1: [10] 对任何 $v \in B_{\omega^{-1,-1}}^m(-1,1)$, 有

$$\left\| \partial_x^r (v - I_x^N v) \right\|_{\omega^{r,r}} \leq CN^{r-m} \left\| \partial_x^m v \right\|_{\omega^{m,m}}, \quad (13)$$

$$\left\| v - I_x^N v \right\|_{\infty} \leq CN^{\frac{1}{2}-m} \left\| \partial_x^m v \right\|_{\omega^{m-1,m-1}}. \quad (14)$$

引理 2: [10] 设 $\{\mathcal{F}_j(x)\}_{j=0}^N$ 是与具有参数对 $\{-\mu, 0\}$ 的 Jacobi-Gauss-Lobatto 插值相关联的拉格朗日基多项式, 则对于 $-\frac{1}{2} \leq \mu < \frac{3}{2}$

$$\Lambda_N := \max_{x \in [-1,1]} \sum_{j=0}^N |\mathcal{F}_j(x)| \sim \ln N,$$

对于每个有界函数 $v(x)$, 存在一个与 v 无关的常数 C , 使得

$$\left\| I_x^N v \right\|_{\omega^{\alpha,\beta}} = \left\| \sum_{j=0}^N v(x_j) \mathcal{F}_j(x) \right\|_{\omega^{\alpha,\beta}} \leq C \|v\|_{\infty}.$$

引理 3: [10] 如果 $v \in B_{\omega^{-1,-1}}^m(-1,1)$ 对于 $m \geq 1$, 对于 Jacobi-Gauss 积分, 我们有

$$\left| (v, \phi)_{\omega^{\alpha,\beta}} - (v, \phi)_{N, \omega^{\alpha,\beta}} \right| \leq CN^{-m} \left\| \partial_x^m v \right\|_{\omega^{m-1,m-1}} \|\phi\|_{\omega^{\alpha,\beta}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N,$$

现在我们需要一个关于核函数 $\psi_{\alpha,\beta,\rho,q}(x, \vartheta)$ 的正则性的结果。

引理 4: [8] 如果 $K(\cdot, s) \in C^{m,1-\frac{m+1}{\rho}}(0,T]$, $\rho \in \mathbb{N}$, 则有

$$\frac{\partial^m}{\partial \vartheta^m} \psi_{\alpha,\beta,\rho,q}(x, \vartheta) \in L_{\chi^{\alpha,\beta,\rho}}^2(-1,1).$$

因此, 存在 $K^* > 0$, 使得

$$K^* = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \psi_{\alpha,\beta,\rho,q}(x, \vartheta) \right|_{H_{\chi^{\alpha,\beta,\rho}}^{m,N}(-1,1)}. \quad (15)$$

引理 5: [8] 如果 $L > 0$ 且 $v(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的非负局部可积函数, 满足

$$u(x) \leq v(x) + L \int_{-1}^x \left(1 + \frac{\rho T}{2^\rho} \left((1+x)^\rho - (1+\tau)^\rho \right)^{1-\alpha} (1+\tau)^{\rho\alpha-1} \right) u \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right) d\tau,$$

则存在一个常数 C 使得

$$u(x) \leq v(x) + C \int_{-1}^x \left(1 + \frac{\rho T}{2^\rho} \left((1+x)^\rho - (1+\tau)^\rho \right)^{1-\alpha} (1+\tau)^{\rho\alpha-1} \right) v \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right) d\tau.$$

引理 6: [10] 设 r 是非负整数, $\kappa \in (0,1)$ 。存在一个常数 C , 使得对于任何函数 $v(x) \in \mathbb{C}^{r,\kappa}(-1,1)$, 存在一个多项式函数 $\mathcal{T}_N v \in \mathbb{P}_N$, 满足

$$\left\| v - \mathcal{T}_N v \right\|_{\infty} \leq CN^{-r-\kappa} \|v\|_{r,\kappa}.$$

引理 7: [8]如果 M 满足

$$(Mv)(x) = \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(x,\tau)(1+\tau)^\rho \bar{k}(x,\tau)v\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right)d\tau,$$

则存在正常数 C , 使得对于任意函数 $v(x) \in C(-1,1)$ 有

$$\|Mv\|_{0,1-\alpha} \leq C\|v\|_\infty.$$

4. 收敛性分析

在本节中, 我们关注的是所提出的方法的收敛性分析. 设 $e(x) = u(x) - u^N(x)$, 然后从(9)中减去(10), 并使用连续和离散内积(3)和(4)的定义,

$$\begin{aligned} u(x_i) - u_i &= \frac{1+x_i}{2} \left[\left(\tilde{a}(\tau(x_i, \cdot)), u(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{\omega_{0,0}} + \left(\tilde{b}(\tau(x_i, \cdot)), u \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x_i, \cdot) - 1 \right) \right)_{\omega_{0,0}} \right. \\ &\quad \left. + \left(1, z(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{\omega_{0,0}} - \left(\tilde{a}(\tau(x_i, \cdot)), u^N(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{N,\omega_{0,0}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\tilde{b}(\tau(x_i, \cdot)), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x_i, \cdot) - 1 \right) \right)_{N,\omega_{0,0}} - \left(1, z^N(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{N,\omega_{0,0}} \right] \\ &= \int_{-1}^{x_i} \tilde{a}(\tau)e(\tau)d\tau + \int_{-1}^{x_i} \tilde{b}(\tau)e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1 \right) d\tau \\ &\quad + \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(\tau,s) J_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau,s) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}s - 1 \right) ds d\tau + \sum_{k=1}^4 I_{i,k}. \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} z^N(\tau) &= \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(\tau,s) J_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau,s) u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}s - 1 \right) ds \\ &= \left(\psi_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau(x_i, \cdot), \cdot), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x_i, \cdot) - 1 \right) \right)_{\chi_{\alpha,\beta,\rho}}, \\ I_{i,1} &= \frac{1+x_i}{2} \left[\left(\tilde{a}(\tau(x_i, \cdot)), u^N(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{\omega_{0,0}} - \left(\tilde{a}(\tau(x_i, \cdot)), u^N(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{N,\omega_{0,0}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{b}(\tau(x_i, \cdot)), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x_i, \cdot) - 1 \right) \right)_{\omega_{0,0}} - \left(\tilde{b}(\tau(x_i, \cdot)), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x_i, \cdot) - 1 \right) \right)_{N,\omega_{0,0}} \right], \\ I_{i,2} &= \left(\frac{1+x_i}{2}, z(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{\omega_{0,0}} - \left(\frac{1+x_i}{2}, z(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{N,\omega_{0,0}}, \\ I_{i,3} &= \left(\frac{1+x_i}{2}, (z^N - z)(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{\omega_{0,0}} - \left(\frac{1+x_i}{2}, (z^N - z)(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{N,\omega_{0,0}}, \\ I_{i,4} &= \left(\frac{1+x_i}{2}, z^N(\tau(x_i, \cdot)) - \left(\psi_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau(x_i, \cdot), \cdot), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau(x_i, \cdot) - 1 \right) \right)_{\chi_{\alpha,\beta,\rho}} \right)_{N,\omega_{0,0}}. \end{aligned}$$

将(16)的两边乘以 $\mathcal{F}_i(x)$, 然后从 $i=0$ 到 $i=N$ 求和, 得到

$$\begin{aligned} I_x^N u - u^N &= I_x^N \int_{-1}^x \left[\tilde{a}(\tau)e(\tau) + \tilde{b}(\tau)e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(\tau,s)J_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau,s)e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}s - 1\right)ds \right] d\tau + \sum_{k=1}^4 I_x^N I_{i,k}. \end{aligned}$$

用 I 表示恒等算子, 通过重新组织上述等式中的项, 我们得到

$$\begin{aligned} e(x) &= \int_{-1}^x \left[\tilde{a}(\tau)e(\tau) + \tilde{b}(\tau)e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(\tau,s)J_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau,s)e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}s - 1\right)ds \right] d\tau + \sum_{i=1}^4 E_i(x). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} E_1(x) &= (I - I_x^N)u(x), \quad E_2(x) = \sum_{k=1}^4 I_x^N I_{i,k}, \\ E_3(x) &= (I_x^N - I) \int_{-1}^x \tilde{a}(\tau)e(\tau) + \tilde{b}(\tau)e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right) d\tau, \\ E_4(x) &= (I_x^N - I) \int_{-1}^x \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(\tau,s)J_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau,s)e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}s - 1\right) ds d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

使用关系

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^x \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(\tau,s)J_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau,s)e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}s - 1\right) ds d\tau \\ &= \int_{-1}^x e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right) \int_{\tau}^x \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(s,\tau)J_{\alpha,\beta,\rho,q}(s,\tau) ds d\tau, \end{aligned}$$

和估计

$$\int_{\tau}^x \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(s,\tau) ds \leq C \frac{\rho T}{2^{\rho}} \left((1+x)^{\rho} - (1+\tau)^{\rho} \right)^{1-\alpha} (1+\tau)^{\rho\alpha-1}.$$

我们可以推出

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-1}^x \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(\tau,s)J_{\alpha,\beta,\rho,q}(\tau,s)e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}s - 1\right) ds d\tau \right| \\ &\leq C \int_{-1}^x \frac{\rho T}{2^{\rho}} \left((1+x)^{\rho} - (1+\tau)^{\rho} \right)^{1-\alpha} (1+\tau)^{\rho\alpha-1} \left| e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right) \right| d\tau. \end{aligned}$$

因此

$$|e(x)| \leq C \int_{-1}^x \left(1 + \frac{\rho T}{2^{\rho}} \left((1+x)^{\rho} - (1+\tau)^{\rho} \right)^{1-\alpha} (1+\tau)^{\rho\alpha-1} \right) \left| e\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}}\tau - 1\right) \right| d\tau + \sum_{i=1}^4 |E_i(x)|. \quad (18)$$

首先, 我们给出了 L^{∞} -范数下的误差估计。

定理 4.1: 设给定函数 $K(\cdot, s), a(t), b(t) \in C^{m, \frac{m+1}{\rho}}(0, T], K(t, s) \in C^1(D)$ 。如果 $u, z \in B_{\omega^{-1}, -1}^m(-1, 1)$, 则存在正常数 C , 使得对于足够大的 N , 以下误差估计成立

$$\|e\|_{\infty} \leq CN^{-m} \left(\ln NM^* + N^{\frac{1}{2}} \|\partial_x^m u\|_{\omega^{m-1, m-1}} \right). \quad (19)$$

其中

$$M^* = \|\partial_x^m b\|_{\omega^{m-1, m-1}} + \|u\|_{\omega^{0,0}} + K^* \|u\|_{\mathcal{L}^{\alpha, \beta, \rho}} + \|\partial_x^m z\|_{\omega^{m-1, m-1}} + \|\partial_x^m u\|_{\omega^{m, m}}. \quad (20)$$

K^* 由(15)定义。

证明: 由(18), 使用 Gronwall 不等式, 有

$$\|e(x)\|_{\infty} \leq C \sum_{i=1}^4 \|E_i(x)\|_{\infty}. \quad (21)$$

首先, 通过引理 1, 我们得到

$$\|E_1(x)\|_{\infty} = \|u(x) - I_x^N u(x)\|_{\infty} \leq CN^{\frac{1}{2}-m} \|\partial_x^m u\|_{\omega^{m-1, m-1}}. \quad (22)$$

我们接下来估计项 $\max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,k}|$, 使用引理 3

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,1}| &= \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{1+x_i}{2} \left[\left(\tilde{a}(\tau(x_i, \cdot)), u^N(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{\omega^{0,0}} - \left(\tilde{a}(\tau(x_i, \cdot)), u^N(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{N, \omega^{0,0}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\tilde{b}(\tau(x_i, \cdot)), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(x_i, \cdot) - 1 \right) \right)_{\omega_{0,0}} - \left(\tilde{b}(\tau(x_i, \cdot)), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(x_i, \cdot) - 1 \right) \right)_{N, \omega_{0,0}} \right] \right| \\ &\leq CN^{-m} \left(\|\partial_x^m \tilde{a}\|_{\omega^{m-1, m-1}} \|u^N\|_{\omega^{0,0}} + \|\partial_x^m \tilde{b}\|_{\omega^{m-1, m-1}} \|u^N\|_{\omega^{0,0}} \right) \\ &\leq CN^{-m} \left(\|\partial_x^m \tilde{a}\|_{\omega^{m-1, m-1}} + \|\partial_x^m \tilde{b}\|_{\omega^{m-1, m-1}} \right) (\|u\|_{\omega^{0,0}} + \|e\|_{\omega^{0,0}}) \\ &\leq CN^{-m} \left(\|\partial_x^m \tilde{a}\|_{\omega^{m-1, m-1}} + \|\partial_x^m \tilde{b}\|_{\omega^{m-1, m-1}} \right) (\|u\|_{\omega^{0,0}} + \|e\|_{\infty}), \end{aligned} \quad (23)$$

和

$$\max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,2}| = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \left(\frac{1+x_i}{2}, z(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{\omega^{0,0}} - \left(\frac{1+x_i}{2}, z(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{N, \omega^{0,0}} \right| \leq CN^{-m} \|\partial_x^m z\|_{\omega^{m-1, m-1}}. \quad (24)$$

根据 Hölder 不等式, 我们推出

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,3}| &= \max_{1 \leq i \leq N} \left| \left(\frac{1+x_i}{2}, (z^N - z)(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{\omega^{0,0}} - \left(\frac{1+x_i}{2}, (z^N - z)(\tau(x_i, \cdot)) \right)_{N, \omega^{0,0}} \right| \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} \left| \int_{-1}^{x_i} (I - I_{\tau}^N)(z - z^N)(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \left(\int_{-1}^{x_i} |(I - I_{\tau}^N)(z - z^N)(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|(I - I_{\tau}^N)(z - z^N)\|_{\omega^{0,0}}. \end{aligned} \quad (25)$$

为了限制 $\max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,3}|$, 接下来我们需要误差估计 $\|(I - I_{\tau}^N)(z - z^N)\|_{\omega^{0,0}}$ 。

当 $\rho=1$,

$$J_{\alpha,\beta,1,q}(x,\tau) = J_{\alpha,\beta,1,q}(-1,-1) + \tilde{J}_{\alpha,\beta,1,q}(x,\tau),$$

其中

$$\tilde{J}_{\alpha,\beta,1,q}(x,\tau) = \left[(x+1) \frac{\partial}{\partial x} + (\tau+1) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] J_{\alpha,\beta,1,q}(\xi, \zeta).$$

显然有

$$\begin{aligned} (I - I_x^N)(z - z^N)(x) &= (I - I_x^N) \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,1}(x,\tau) J_{\alpha,\beta,1,q}(x,\tau) e^{\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right)} d\tau \\ &= (I - I_x^N) \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,1}(x,\tau) J_{\alpha,\beta,1,q}(-1,-1) u^{\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right)} d\tau \\ &\quad - (I - I_x^N) \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,1}(x,\tau) J_{\alpha,\beta,1,q}(-1,-1) u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right) d\tau \\ &\quad + (I - I_x^N) \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,1}(x,\tau) \tilde{J}_{\alpha,\beta,1,q}(x,\tau) e^{\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right)} d\tau. \end{aligned}$$

则

$$\left\| (I - I_x^N)(z - z^N) \right\|_{\omega^{0,0}} = \left\| I_{i,3}^1 + I_{i,3}^2 + I_{i,3}^3 \right\|_{\omega^{0,0}} \leq \sum_{k=1}^3 \left\| I_{i,3}^k \right\|_{\omega^{0,0}},$$

其中

$$\begin{aligned} I_{i,3}^1 &= (I - I_x^N) \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,1}(x,\tau) J_{\alpha,\beta,1,q}(-1,-1) u^{\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right)} d\tau, \\ I_{i,3}^2 &= (I - I_x^N) \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,1}(x,\tau) J_{\alpha,\beta,1,q}(-1,-1) u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right) d\tau, \\ I_{i,3}^3 &= (I - I_x^N) \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,1}(x,\tau) \tilde{J}_{\alpha,\beta,1,q}(x,\tau) e^{\left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right)} d\tau. \end{aligned}$$

又由引理 1、2 和引理 6、7 有

$$\left\| I_{i,3}^1 \right\|_{\omega^{0,0}} \leq CN^{-m} \left\| \hat{\partial}_x^m u \right\|_{\omega^{m,m}}, \left\| I_{i,3}^2 \right\|_{\omega^{0,0}} = 0, \left\| I_{i,3}^3 \right\|_{\omega^{0,0}} \leq CN^{\alpha-1} \|e\|_{\infty}.$$

因此

$$\left\| (I - I_x^N)(z - z^N) \right\|_{\omega^{0,0}} \leq CN^{-m} \left\| \hat{\partial}_x^m u \right\|_{\omega^{m,m}} + CN^{\kappa_1} \|e(x)\|_{\infty}.$$

当 $\rho \geq 2$, 类似有

$$\left\| (I - I_x^N)(z - z^N) \right\|_{\omega^{0,0}} \leq CN^{-\kappa_2} \|e\|_{\infty}.$$

其中

$$\kappa_1 = 1 - \alpha, \kappa_2 = \min \left\{ 1 - \alpha, 1 - \frac{1}{\rho} \right\} \in (0, 1).$$

因此

$$\max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,3}| \leq \begin{cases} CN^{-m} \|\partial_x^m u\|_{\omega^{m,m}} + CN^{-\kappa_1} \|e\|_{\infty}, & \rho = 1, \\ CN^{-\kappa_2} \|e\|_{\infty}, & \rho \geq 2, \end{cases} \quad (26)$$

此外, 根据引理 3, 引理 4, 有

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,4}| \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} \left| \left(\frac{1+x_i}{2}, z^N(\tau(x_i, \cdot)) - \left(\psi_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau(x_i, \cdot), \cdot), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(\tau(x_i, \cdot), \cdot) - 1 \right) \right) \right)_{N, \chi^{\alpha, \beta, \rho}} \right|_{N, \omega^{0,0}} \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^N \omega_{1,k} \left\{ z^N(\tau(x_i, \theta_k)) - \left(\psi_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau(x_i, \theta_k), \cdot), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(\tau(x_i, \theta_k), \cdot) - 1 \right) \right)_{N, \chi^{\alpha, \beta, \rho}} \right\} \\ &\leq 2 \max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq k \leq N} \left| z^N(\tau(x_i, \theta_k)) - \left(\psi_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau(x_i, \theta_k), \cdot), u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(\tau(x_i, \theta_k), \cdot) - 1 \right) \right)_{N, \chi^{\alpha, \beta, \rho}} \right| \\ &\leq CN^{-m} \max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \partial_x^m \psi_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau(x_i, \theta_k), \cdot) \right\|_{\chi^{\alpha, \beta, \rho}} \left\| u^N \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau(\tau(x_i, \theta_k), \cdot) - 1 \right) \right\|_{\chi^{\alpha, \beta, \rho}} \\ &\leq CN^{-m} K^* (\|u\|_{\chi^{\alpha, \beta, \rho}} + \|e\|_{\infty}). \end{aligned} \quad (27)$$

由引理 2 和不等式(23), (24)和(26),

$$\begin{aligned} \|E_2(x)\|_{\infty} &= \left\| \sum_{k=1}^4 I_x^N I_{i,k} \right\|_{\infty} \leq \Lambda_N \sum_{k=1}^4 \max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,k}| \\ &\leq \begin{cases} C \ln NN^{-m} M^* + C \ln NN^{-\kappa_1} \|e\|_{\infty}, & \rho = 1, \\ C \ln NN^{-m} M^* + C \ln NN^{-\kappa_2} \|e\|_{\infty}, & \rho \geq 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

此外, 通过使用引理 1, 最后两项有界于

$$\begin{aligned} \|E_3(x)\|_{\infty} &= \left\| \left(I_x^N - I \right) \int_{-1}^x \tilde{a}(\tau) e(\tau) + \tilde{b}(\tau) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right) d\tau \right\|_{\infty} \\ &\leq CN^{-\frac{1}{2}} \left\| \partial_x \int_{-1}^x \tilde{a}(\tau) e(\tau) + \tilde{b}(\tau) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right) d\tau \right\|_{\omega^{0,0}} \\ &\leq CN^{-\frac{1}{2}} \left\| \tilde{a}(x) e(x) + \tilde{b}(x) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} x - 1 \right) \right\|_{\omega^{0,0}} \\ &\leq CN^{-\frac{1}{2}} \|e\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (29)$$

和

$$\begin{aligned} \|E_4(x)\|_{\infty} &= \left\| \left(I_x^N - I \right) \int_{-1}^x \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha, \beta, \rho}(\tau, s) J_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau, s) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} s - 1 \right) ds d\tau \right\|_{\infty} \\ &\leq CN^{-\frac{1}{2}} \left\| \partial_x \int_{-1}^x \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha, \beta, \rho}(\tau, s) J_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau, s) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} s - 1 \right) ds d\tau \right\|_{\omega^{0,0}} \\ &\leq CN^{-\frac{1}{2}} \left\| \int_{-1}^x \lambda_{\alpha, \beta, \rho}(x, s) J_{\alpha, \beta, \rho, q}(x, s) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} s - 1 \right) ds \right\|_{\omega^{0,0}} \\ &\leq CN^{-\frac{1}{2}} \|e\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (30)$$

因此, 上述误差界限得到了证明。

其次, 我们给出了加权 L^2 -范数下的误差估计。

定理 4.2: 设给定函数 $K(\cdot, s), a(t), b(t) \in C^{m, 1-\frac{m+1}{\rho}}(0, T], K(t, s) \in C^1(D)$ 。如果 $u, z \in B_{\omega^{-1, -1}}^m(-1, 1)$, 则存在正常数 C , 使得对于足够大的 N , 以下误差估计成立

$$\|e\|_{\omega^{0,0}} \leq \begin{cases} CN^{-m} \left(M^* + CN^{\frac{1}{2}-\kappa_1} \|\partial_x^m u\|_{\omega^{m-1, m-1}} \right), & \rho = 1, \\ CN^{-m} \left(M^* + CN^{\frac{1}{2}-\kappa_2} \|\partial_x^m u\|_{\omega^{m-1, m-1}} \right), & \rho \geq 2, \end{cases} \quad (31)$$

其中

$$\kappa_1 = 1 - \alpha; \quad \kappa_2 = \min \left\{ 1 - \alpha, 1 - \frac{1}{\rho} \right\};$$

M^* 由(20)定义。

证明: 由(18)和广义 Hardy 不等式有

$$\|e(x)\|_{\omega^{0,0}} \leq C \sum_{i=1}^4 \|E_i(x)\|_{\omega^{0,0}}. \quad (32)$$

首先, 根据引理 1, 我们得到

$$\|E_1(x)\|_{\omega^{0,0}} = \|u(x) - I_x^N u(x)\|_{\omega^{0,0}} \leq CN^{-m} \|\partial_x^m u\|_{\omega^{m,m}}. \quad (33)$$

利用式(23), (24), (26), (27)和引理 2, 有

$$\begin{aligned} \|E_2(x)\|_{\omega^{0,0}} &= \left\| \sum_{k=1}^4 I_x^N I_{i,k} \right\|_{\omega^{0,0}} \leq C \sum_{k=1}^4 \max_{1 \leq i \leq N} |I_{i,k}| \\ &\leq \begin{cases} CN^{-m} M^* + CN^{-k_1} \|e\|_{\infty}, & \rho = 1 \\ CN^{-m} M^* + CN^{-k_2} \|e\|_{\infty}, & \rho \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

此外, 使用引理 1, 很明显

$$\begin{aligned} \|E_3(x)\|_{\omega^{0,0}} &= \left\| \left(I_x^N - I \right) \int_{-1}^x \tilde{a}(\tau) e(\tau) + \tilde{b}(\tau) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right) \right\|_{\omega^{0,0}} \\ &\leq CN^{-1} \left\| \partial_x \int_{-1}^x \tilde{a}(\tau) e(\tau) + \tilde{b}(\tau) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} \tau - 1 \right) \right\|_{\omega^{1,1}} \\ &\leq CN^{-1} \left\| \tilde{a}(x) e(x) + \tilde{b}(x) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} x - 1 \right) \right\|_{\omega^{1,1}} \\ &\leq CN^{-1} \|e\|_{\omega^{0,0}}, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \|E_4(x)\|_{\omega^{0,0}} &= \left\| \left(I_x^N - I \right) \int_{-1}^x \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha, \beta, \rho}(\tau, s) J_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau, s) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} s - 1 \right) ds d\tau \right\|_{\omega^{0,0}} \\ &\leq CN^{-1} \left\| \partial_x \int_{-1}^x \int_{-1}^{\tau} \lambda_{\alpha, \beta, \rho}(\tau, s) J_{\alpha, \beta, \rho, q}(\tau, s) e \left(q^{\frac{1}{\rho}} + q^{\frac{1}{\rho}} s - 1 \right) ds d\tau \right\|_{\omega^{1,1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq CN^{-1} \left\| \int_{-1}^x \lambda_{\alpha,\beta,\rho}(x,s) J_{\alpha,\beta,\rho,q}(x,s) e^{\left(\frac{1}{q^\rho} + q^{\frac{1}{\rho}}s - 1\right)} ds \right\|_{\omega^{1,1}} \\ &\leq CN^{-1} \|e\|_{\omega^{0,0}}. \end{aligned}$$

因此, 证明了结果。

5. 数值实验

在这一节中, 我们通过一些数值例子来验证所提出的 Legendre 谱方法在 L^∞ 和 L^2 范数下的精确性和应用光滑变换的有效性。以下算例通过 Matlab 软件进行计算。

算例 1 考虑如下第三类延迟 Volterra 积分微分方程

$$t^{\frac{2}{3}}y'(t) = t^{\frac{5}{3}}y(t) + t^{\frac{5}{3}}y(qt) + g_1(t) + q^{\frac{2}{3}} \int_0^{qt} \frac{\sqrt{3}}{3\pi} (qt - \sigma)^{\frac{2}{3}} \sigma^{\frac{1}{3}} y(\sigma) d\sigma, \quad (34)$$

$$\text{其中 } g_1(t) = \frac{5}{3}t^{\frac{4}{3}} - t^{\frac{10}{3}} \left(1 + q^{\frac{5}{3}}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(3)}{\pi\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)} t^{\frac{7}{3}} q^{\frac{5}{3}}.$$

有非光滑解 $y(t) = t^{\frac{5}{3}}$, 设 $q = 0.6, T = 0.5$, 选择 $\rho = 3$ 。表 1 中显示了使用上述谱配置方法得到的误差, 图 1 表示出了数值收敛性。可以观察到, 当 $N = 6$ 时, 误差可达到 10^{-14} , 表明了方法的高效和计算成本低。结果表明, 绝对误差随 N 的增加呈指数衰减。数值实验中, 通过选取适当的 ρ , 可以提升解的光滑性和正则性, 提高精度减小误差, 数值结果与理论分析相吻合。

Table 1. The errors of spectral Legendre-collocation method for Example 1

表 1. 算例 1 Legendre 谱配置法的误差

N	2	4	6	8	10
L^∞	6.16e-02	1.27e-03	5.80e-14	6.11e-16	1.11e-16
L^2	1.82e-03	1.18e-05	1.95e-14	1.36e-16	5.84e-17

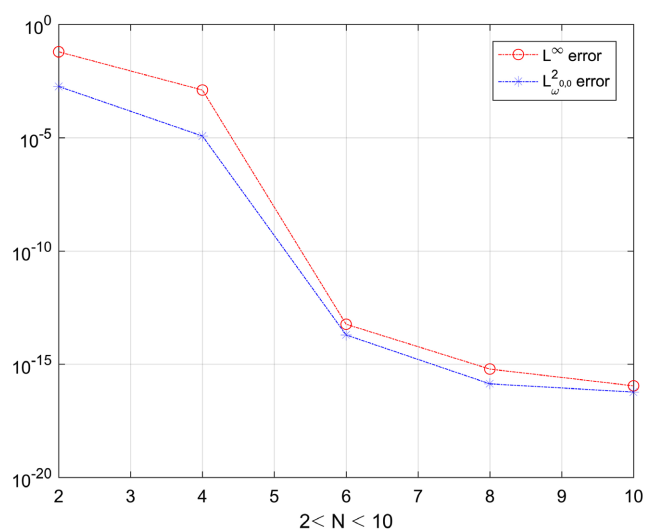


Figure 1. The errors of spectral Legendre-collocation method for Example 1

图 1. 算例 1 Legendre 谱配置法的误差

算例 2 考虑如下第三类延迟 Volterra 积分微分方程

$$t^{\frac{3}{2}}y'(t)=\frac{1}{2}t^{\frac{5}{2}}y(t)+t^2y(qt)+g_1(t)+q^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{6}\int_0^qt''\sigma^{\frac{1}{2}}y(\sigma)d\sigma, \tag{35}$$

其中 $g_1(t)=\frac{5}{2}t^3-\frac{1}{2}t^5-q^{\frac{5}{2}}\left(t^{\frac{9}{2}}+\frac{t^4}{24}\right)$ 。

式子的精确解为 $y(t)=t^{\frac{5}{2}}$ 。设 $q=0.8, T=1$ ，我们选择 $\rho=4$ ，那么式(5)的相应解为 $u(x)=\frac{(1+x)^{10}}{2^{10}}$ 。从以下表 2 和图 2 中看出我们的数值方法收敛速度很快，误差很小，当 $N=10$ 时， L^2 误差达到了 10^{-17} ，同样获得了期望的指数收敛速率。这些发现与理论分析中推导的误差分析严格一致，充分验证了本方法在保持高精度与低耗时的双重优势，特别是在处理非光滑解问题时展现出的优越计算效能，得到了一致的理论结果。

Table 2. The errors of spectral Legendre-collocation method for Example 2
表 2. 算例 2 Legendre 谱配置法的误差

N	2	4	6	8	10
L^∞	4.91e-01	9.02e-02	6.78e-3	1.13e-4	2.22e-16
L^2	3.10e-02	4.20e-03	1.40e-4	1.40e-6	2.88e-17

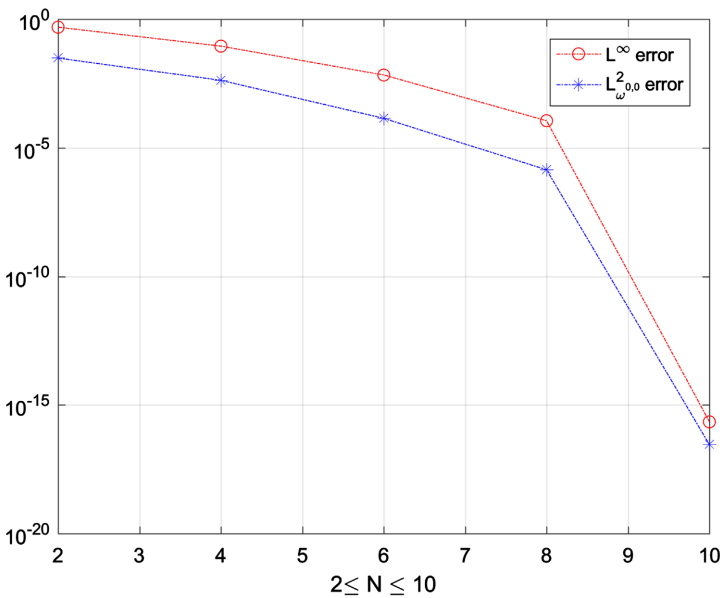


Figure 2. The errors of spectral Legendre-collocation method for Example 2
图 2. 算例 2 Legendre 谱配置法的误差

6. 结论

本文介绍了一种基于 Legendre 配置法的求解一类第三类弱奇异比例时滞 Volterra 积分微分方程解的数值方法。通过适当的光滑变换使变换后的函数具有更好的正则性。此外，我们还证明了经过这种变换后，所得到的数值解将具有指数收敛速度，建立了严格的误差估计。值得指出的是，数值实验与理论分析高度吻合，算法实现便捷且计算复杂度低，具有很高的精度。

参考文献

- [1] Chen, Y. and Tang, T. (2009) Spectral Methods for Weakly Singular Volterra Integral Equations with Smooth Solutions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, 938-950. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.057>
- [2] Wei, Y. and Chen, Y. (2012) Convergence Analysis of the Spectral Methods for Weakly Singular Volterra Integro-Differential Equations with Smooth Solutions. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **4**, 1-20. <https://doi.org/10.4208/aamm.10-m1055>
- [3] Wei, Y. and Chen, Y. (2012) Legendre Spectral Collocation Methods for Pantograph Volterra Delay-Integro-Differential Equations. *Journal of Scientific Computing*, **53**, 672-688. <https://doi.org/10.1007/s10915-012-9595-6>
- [4] Shi, X. and Chen, Y. (2016) Spectral-collocation Method for Volterra Delay Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **8**, 648-669. <https://doi.org/10.4208/aamm.2015.m1088>
- [5] Laeli Dastjerdi, H. and Shayanfard, F. (2021) A Numerical Method for the Solution of Nonlinear Volterra Hammerstein Integral Equations of the Third-kind. *Applied Numerical Mathematics*, **170**, 353-363. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.08.006>
- [6] Ma, X. and Huang, C. (2021) Recovery of High Order Accuracy in Spectral Collocation Method for Linear Volterra Integral Equations of the Third-Kind with Non-Smooth Solutions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **392**, Article 113458. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113458>
- [7] Ghalini, R.G., Hesameddini, E. and Dastjerdi, H.L. (2025) An Efficient Spectral Collocation Method for Solving Volterra Delay Integral Equations of the Third Kind. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **454**, Article 116138. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116138>
- [8] Ma, X. and Huang, C. (2021) An Accurate Legendre Collocation Method for Third-Kind Volterra Integro-Differential Equations with Non-Smooth Solutions. *Numerical Algorithms*, **88**, 1571-1593. <https://doi.org/10.1007/s11075-021-01086-w>
- [9] Zhao, B. (2024) A Fractional Spectral Method for Weakly Singular Volterra Integro-Differential Equations with Delays of the Third-Kind. arXiv:2409.10861.
- [10] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L. (2011) Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7>