Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(8), 86-94
Published Online August 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.148373

Hans汉斯

混合双分数Brown运动驱动的4/2-CIR模型及欧式期权定价

杨　源，夏　莉*

广东财经大学统计与数据科学学院，广东，广州

收稿日期：2025年7月5日；录用日期：2025年7月28日；发布日期：2025年8月7日

摘　要

文章以资产价格的特征函数为研究工具，深入探讨了欧式期权的定价公式。在假定资产价格遵循混合双分数布朗运动驱动的4/2模型、随机利率遵循CIR模型以及随机波动率符合Heston模型的前提下，推导出了资产价格满足的广义特征函数的近似解析解表达式。进而，借助广义特征函数，巧妙运用傅里叶变换及其逆变换，成功构建出欧式看涨期权的定价公式，为欧式期权定价研究提供了新的分析思路。

关键词

模板混合双分数Brown运动，4/2模型，广义特征函数，傅里叶变换

The 4/2-CIR Model Driven by Mixed Fractional Brownian Motion and European Option Pricing

Yuan Yang, Li Xia*

School of Statistics and Data Science, Guangdong University of Finance & Economics, Guangzhou Guangdong

Received: Jul. 5th, 2025; accepted: Jul. 28th, 2025; published: Aug. 7th, 2025

Abstract

The article employs the characteristic function of asset prices as a research tool to delve into the pricing formula of European options. Under the assumptions that asset prices follow the 4/2 model

*通讯作者。

文章引用: 杨源, 夏莉. 混合双分数 Brown 运动驱动的 4/2-CIR 模型及欧式期权定价[J]. 应用数学进展, 2025, 14(8): 86-94. DOI: 10.12677/aam.2025.148373

driven by mixed fractional Brownian motion, stochastic interest rates adhere to the Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model, and stochastic volatility conforms to the Heston model, an approximate analytical solution expression for the generalized characteristic function of asset prices is derived. Subsequently, by leveraging the generalized characteristic function and skillfully applying Fourier transform and its inverse, the pricing formula for European call options is successfully constructed, offering a novel analytical approach to the study of European option pricing.

Keywords

Mixed Bifractional Brownian Motion, 4/2 Model, Generalized Characteristic Function, Fourier Transform

1. 引言

B-S 期权定价公式[1]是期权定价中最常用的方法，该模型假设资产价格服从几何 Brown 运动，且漂移项与波动项系数均为常数。然而，该模型对恒定波动率和恒定利率的假设与实际市场中观察到的波动率微笑和波动率倾斜现象不符。大量实证数据显示，资产价格的收益具有长相依性和自相似性，且分布呈现“尖峰厚尾”特征，因此 B-S 模型在期权价格的刻画上并不十分准确，往往低估了期权的实际价值。为解决这一局限，引入了随机波动率和随机利率的概念，对其进行改进。

为了对波动率微笑、波动率倾斜现象进行刻画，学者们提出了随机波动率模型，如 Hull-White [2]等提出随机波动模型，Stein-Stein [3]模型等。其中最著名的就是 Heston [4]模型，该模型假设波动率满足 CIR 模型，模型参数也具有实际经济意义。但该模型在实际应用中仍存在一些不足，因此学者们提出了改进模型，如引入时变参数的 Heston 模型[5]、3/2 模型[6]或 4/2 随机波动模型[7]。4/2 随机波动模型结合 Heston 模型和 3/2 模型，表现出双因子模型的特征，随机因子与 $\sqrt{v_t}$ 和 $1/\sqrt{v_t}$ 紧密相关，而且在解释波动率曲面上发挥各自的作用，在欧式期权定价上进行了应用[8]。另一方面，在衍生品定价中，利率也是重要的风险因素，越来越多的学者对随机利率过程进行了研究。Merton [9]最早提出了随机利率模型，将随机利率过程引入 B-S 公式。Vasicek [10]对 Merton 提出的随机利率模型进行了推广，构建了 Vasicek 随机利率模型。李红[11]等通过特征函数和 Fourier 变换给出了 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价公式。但该模型不能总是保证利率为正值，于是 Cox，Ingersoll 和 Ross [12]提出了 CIR 随机利率过程，引入利率的平方根项避免了负利率的问题，具有均值回复和正则性等特点，更加契合现实金融市场的衍生品定价。进一步实证分析表明，将随机利率引入随机波动率模型中能更准确地描述金融市场数据特性，He [13]构建了 Heston-CIR 模型以描述标的资产价格变化并得到了解欧式期权价格的闭形式解；Berthe [14]等将多因子 CIR 利率模型引入 Heston 模型对资产价格进行拟合，通过香农小波法对欧式外汇期权定价问题进行研究。

尽管 Heston-CIR 模型在模拟金融产品收益的“尖峰厚尾”现象和“波动率微笑”方面表现出较高的精确度，但它在捕捉长相依性方面存在不足[15]，需要进一步探寻更贴合实际金融市场的分形特征。分数 Brown 运动能够捕捉时间序列的长记忆特性和自相似性质，但它既不符合 Markov 性质也不是半鞅，因此存在套利机会。Bojdecki 等[16]提出了次分数 Brown 运动的概念，与分数 Brown 运动相比，次分数 Brown 运动在非重叠时间区间的增量相关性较低，且协方差随着时间间隔的增加而迅速减少。而双分数 Brown

运动是比次分数 Brown 运动更一般化的高斯过程，不仅继承了分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动的特点，而且在特定条件下能够转化为半鞅。进一步，由双分数 Brown 运动和几何 Brown 运动的线性组合所构成的混合双分数 Brown 运动，既能够描述金融资产价格的长期记忆性、自相似性和非平稳性以及“尖峰厚尾”现象，又消除了套利机会，更贴合标的资产价格变动，已经广泛应用在期权定价中[17]-[21]。

为更好刻画标的资产的变化趋势，本文在通过混合双分数布朗运动驱动的 4/2-CIR 模型来描述标的资产的市场特征，引入 CIR 随机利率过程，构建混合双分数 Brown 运动下的 4/2 模型(mbiFBM-4/2-CIR)，得到该模型下的欧式期权定价公式。行文安排如下：第 1 节介绍相关理论知识，第 2 节构建混合双分数 Brown 运动驱动的 4/2 模型，第 3 节推导 mbiFBM-4/2-CIR 模型下标的资产的广义特征函数，第 4 节给出欧式期权的定价公式，第 5 节给出结论。

2. 预备知识

2.1. 混合双分数 Brown 运动

定义 1：[20]设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一完备概率空间，$\{B_t\}_{t\ge0}$ 是标准 Brown 运动，$\{\xi_t^{H,K}\}_{t\ge0}$ 是双分数 Brown 运动，与 $\{B_t\}_{t\ge0}$ 独立，则混合双分数 Brown 运动定义为：

$$W_t^{H,K}=mB_t+n\xi_t^{H,K}$$

且有 $W_0^{H,K}=0$，$E\left(W_t^{H,K}\right)=0$，协方差为

$$R^{H,K}(t,s)=a^2\min(t,s)+\frac{b^2}{2^K}\left[\left(t^{2H}+s^{2H}\right)^K-|t-s|^{2HK}\right],t,s\ge0;$$

其中，Hurst 指数 $H\in(0,1)$，$K\in(0,1]$，m,n 为大于 0 的常数。

混合双分数 Brown 运动满足如下性质：

性质 1：$\{W_t^{H,K}\}_{t\ge0}$ 是自相似的，即对任意的 $\alpha>0$，$\{W_{\alpha t}^{H,K}\}_{t\ge0}$ 和 $\{\alpha^{HK}W_t^{H,K}\}_{t\ge0}$ 具有相同的有限维分布；

性质 2：当 $HK>\frac{1}{2}$ 时，$\{W_t^{H,K}\}_{t\ge0}$ 具有长记忆性；

性质 3：当 $HK\ne\frac{1}{2}$ 时，$\{W_t^{H,K}\}_{t\ge0}$ 不是半鞅。

2.2. 4/2 模型

定义 2：[8]设 $(\Omega,\mathcal{F}(t),\mathbb{Q})$ 是一完备概率空间，$\mathbb{Q}$ 是风险中性概率测度，$\mathcal{F}(t)$ 是包含了 t 时刻之前所有市场信息的 σ-代数。在风险中性概率测度下，假设标的资产价格过程和随机波动率过程满足如下微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_t=r_tS_t\mathrm{d}t+S_t\left(a\sqrt{v_t}+\dfrac{b}{\sqrt{v_t}}\right)\mathrm{d}Z_t\\ \mathrm{d}v_t=k_v\left(\theta_v-v_t\right)\mathrm{d}t+\sigma_v\sqrt{v_t}\mathrm{d}B_t\end{cases}$$

式中，$\mathrm{d}Z_t$ 和 $\mathrm{d}B_t$ 为布朗运动，r_t 为利率，k_v 表示波动率调整速度，θ_v 表示长期波动率均值回复水平，σ_v 是 v_t 的波动率，$\mathrm{d}Z_t$ 和 $\mathrm{d}B_t$ 的相关系数为 ρ。

3. 模型构建

给定一个概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}(t)_{0<t<T},\mathbb{Q}\right)$，$\mathcal{F}(t)$ 是一个代数流，满足完备右连续性，$\mathbb{Q}$ 为风险中性测度，下述涉及的随机过程都是在此概率空间的可测过程。同时假设市场无摩擦，无交易成本和红利。

资产价格过程满足如下微分方程：

$$\mathrm{d}S_t = r_t S_t \mathrm{d}t + S_t \left(a\sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}} \right) \mathrm{d}W_t^{H,K}$$

其中，$\mathrm{d}W_t^{H,K} = m\mathrm{d}B_t + n\mathrm{d}\xi_t^{H,K}$，根据文献[22]的研究，实际金融市场中存在的长记忆性表明 HK 的乘积大于 1/2。

随机波动率满足如下微分方程：

$$\mathrm{d}v_t = k_v\left(\theta_v - v_t\right)\mathrm{d}t + \sigma_v\sqrt{v_t}\,\mathrm{d}B_{v,t}$$

其中，k_v 表示波动率调整速度，θ_v 表示长期波动率均值回复水平，σ_v 是 v_t 的波动率，$\mathrm{d}B_t$ 和 $\mathrm{d}B_{v,t}$ 的相关系数为 ρ。

随机利率满足如下微分方程：

$$\mathrm{d}r_t = k_r\left(\theta_r - r_t\right)\mathrm{d}t + \sigma_r\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}B_{r,t}$$

其中，r_t 表示资产的回报率，k_r 是利率调整速度，θ_r 是长期利率均值回复水平，σ_r 是利率的波动项系数，$\mathrm{d}B_t$ 和 $\mathrm{d}B_{r,t}$ 的相关系数与 $\mathrm{d}B_{v,t}$ 和 $\mathrm{d}B_{r,t}$ 的相关系数均为 0。

4. 广义特征函数推导

在混合双分数布朗运动的框架下，由于标的资产所满足的随机微分方程组直接求解存在较大难度，我们采用特征函数方法进行定价分析[23]。具体而言，首先推导出标的资产在 mbiFBM-4/2-CIR 模型下的广义特征函数解析表达式，随后基于傅里叶变换理论，通过傅里叶变换及其逆变换技术，最终得到欧式期权的半解析定价公式。这一方法有效规避了直接求解随机微分方程组的复杂性，同时保持了定价模型的精确性。

定理 1：标的资产满足混合双分数 Brown 运动下的 4/2 模型，波动率满足 Heston 模型，利率满足 CIR 模型，则标的资产的广义特征函数有如下形式：

$$\begin{aligned}
E\left(\mathrm{e}^{uY_T} \mid \mathcal{F}(t)\right) = {} & \exp\left\{ uY_t + \frac{um\rho k_v}{\sigma_v}\left(n - m\theta_v\right)\tau + um^2\left[u\left(1-\rho^2\right)-1\right]ab\tau \right\} \\
& \cdot \exp\left\{ -\omega v_t + \lambda \ln v_t + \frac{un}{2^K}\left(a\sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}}\right)\left(I_1 + I_2\right) \right\} \cdot v_t^{-\frac{k_v\theta_v}{\sigma_v^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{Av_t}}{\sigma_v^2 \sinh\frac{\sqrt{A}\tau}{2}} \right)^{B+1} \\
& \cdot \exp\left\{ \frac{2k_r\theta_r}{\sigma_r^2} \ln\left[\frac{2\delta \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(k_r-\delta)\tau}}{2\delta\mathrm{e}^{-\delta\tau} + \left(k_r+\delta\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau}\right)} \right] + \frac{2u\left(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau}\right)r_t}{2\delta\mathrm{e}^{-\delta\tau} + \left(k_r+\delta\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau}\right)} \right\} \cdot C^{-D} \cdot \frac{\Gamma(D)}{\Gamma(B+1)} \\
& \cdot \exp\left\{ \frac{1}{\sigma_r^2}\left(k_v^2\theta_v\tau - \sqrt{A}v_t \coth\frac{\sqrt{A}\tau}{2} \right) + k_v v_t \right\} \cdot M\left(D, B+1, \frac{Av_t}{C\sigma_v^4 \sinh^2\frac{\sqrt{A}\tau}{2}} \right)
\end{aligned}$$

其中，

$$\lambda = -\frac{umn\rho}{\sigma_v}, \omega = \frac{um^2\rho}{\sigma_v}, A = k_r^2 - 2\sigma_r^2 um^2\left[\frac{\rho k_v}{\sigma_v} + \frac{1}{2}u\left(1-\rho^2\right)a^2 - \frac{a^2}{2} \right],$$

$$B = \sqrt{\left(k_r\theta_r - \frac{\sigma_r^2}{2}\right)^2 - 2\sigma_r^2 um\left[\frac{\rho n k_v\theta_v}{\sigma_v} - \frac{1}{2}um\left(1-\rho^2\right)b^2 - \frac{mb^2}{2} \right]},$$

$$C=\omega+\frac{1}{\sigma_r^2}\left(\sqrt{A}\coth\frac{\sqrt{A}\tau}{2}+k_r\right),D=\frac{1}{2}+\frac{B}{2}+\lambda+\frac{k_v\theta_v}{\sigma_v^2},\delta=\sqrt{k_r^2-2\sigma_r^2 u},$$

$$I_1=2\left(\frac{T^{2HK+2}-t^{2HK+2}}{2HK+2}-2t\frac{T^{2HK+1}-t^{2HK+1}}{2HK+1}\right),I_2=\frac{(T-t)^{2HK+2}}{(2HK+1)(2HK+2)}$$

证明：令

$$Y_t=\ln S_t$$

则由 Itô 公式，有

$$\mathrm{d}Y_t=r_t\mathrm{d}t+\left(a\sqrt{v_t}+\frac{b}{\sqrt{v_t}}\right)\mathrm{d}W_t^{H,K}-\frac{1}{2}\left(a\sqrt{v_t}+\frac{b}{\sqrt{v_t}}\right)^2\mathrm{d}\left\langle W^{H,K}\right\rangle_t$$

根据 Russo (2005) [24]关于双分数布朗运动二次变差的研究，当 $HK>\frac{1}{2}$ 时，有 $\mathrm{d}\left\langle \xi^{H,K}\right\rangle_t=0$，因此

$$\mathrm{d}Y_t=r_t\mathrm{d}t+\left(a\sqrt{v_t}+\frac{b}{\sqrt{v_t}}\right)\mathrm{d}W_t^{H,K}-\frac{m^2}{2}\left(a\sqrt{v_t}+\frac{b}{\sqrt{v_t}}\right)^2\mathrm{d}t$$

带入 $\mathrm{d}W_t^{H,K}=m\mathrm{d}B_t+n\mathrm{d}\xi_t^{H,K}$，同时对 $\mathrm{d}B_t$ 进行 cholesky 分解，有 $\mathrm{d}B_t=\rho\mathrm{d}B_{v,t}+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}B_{v,t}^{\perp}$，$\mathrm{d}B_{v,t}^{\perp}$ 是与 $\mathrm{d}B_{v,t}$ 独立的布朗运动，带入可得

$$\begin{aligned}Y_T-Y_t&=\int_t^T r_s\mathrm{d}s+\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}W_t^{H,K}-\frac{m^2}{2}\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)^2\mathrm{d}t\\&=\int_t^T r_s\mathrm{d}s+m\rho\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}B_{v,s}+m\sqrt{1-\rho^2}\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}B_{v,s}^{\perp}\\&\quad+n\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}\xi_s^{H,K}-\frac{m^2}{2}\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

广义特征函数为

$$\begin{aligned}&E\left(\mathrm{e}^{uY_T}\mid\mathcal{F}(t)\right)=E\left(\mathrm{e}^{uY_t+uY_T-uY_t}\mid\mathcal{F}(t)\right)\\&=\mathrm{e}^{uY_t}E\Bigg[\exp\Bigg\{u\int_t^T r_s\mathrm{d}s+um\rho\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}B_{v,s}+um\sqrt{1-\rho^2}\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}B_{v,s}^{\perp}\\&\quad+un\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}\xi_s^{H,K}-\frac{um^2}{2}\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)^2\mathrm{d}s\Bigg\}\mid\mathcal{F}(t)\Bigg]\end{aligned}$$

将其中的积分分别计算，关于 $\mathrm{d}B_{v,s}$ 的积分项计算可得

$$\begin{aligned}&um\rho\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}B_{v,s}\\&=\frac{um\rho}{\sigma_v}\left[m\left(v_T-v_t\right)-n\left(\ln v_T-\ln v_t\right)+\left(nk_v-mk_v\theta_v\right)\tau+mk_v\int_t^T v_s\mathrm{d}s+nk_v\theta_v\int_t^T\frac{1}{v_s}\mathrm{d}s\right]\end{aligned}$$

关于 $\mathrm{d}B_{v,s}^{\perp}$ 的积分的期望，由 Itô 积分的性质，作为对布朗运动路径的随机积分，其线性性质保证了积分结果的期望服从正态分布，因此有

$$E\left[\exp\left\{um\sqrt{1-\rho^2}\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}B_{v,s}^{\perp}\right\}|\mathcal{F}(t)\right]=\frac{1}{2}u^2m^2\left(1-\rho^2\right)\left(2ab\tau+a^2\int_t^T v_s\mathrm{d}s+b^2\int_t^T\frac{1}{v_s}\mathrm{d}s\right)$$

对于 $E\left[\exp\left\{un\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}\xi_s^{H,K}\right\}|\mathcal{F}(t)\right]$，为了计算便捷，我们采用近似方法进行计算。首先对 v_t 进行路径冻结，令 $\gamma=a\sqrt{v_t}+\frac{b}{\sqrt{v_t}}$。双分数 Brown 运动的协方差核为

$$\Phi^{H,K}(s,u)=\frac{1}{2^K}\left[\left(s^{2H}+u^{2H}\right)^K-|s-u|^{2HK}\right]$$

其积分为

$$\iint_t^T\Phi^{H,K}(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u=\frac{1}{2^K}\left[\iint_t^T\left(s^{2H}+u^{2H}\right)^K\mathrm{d}s\mathrm{d}u-\iint_t^T|s-u|^{2HK}\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right]=:\frac{1}{2^K}\left(I_1+I_2\right)$$

对于 I_1，当 $s>u>t>0$ 且 $H>0.3$ 时，利用对称性和近似性，有

$$\begin{aligned}I_1&=\iint_t^T\left(s^{2H}+u^{2H}\right)^K\mathrm{d}s\mathrm{d}u=2\int_t^T s^{2HK}(s-t)\mathrm{d}s\\&=2\left(\frac{T^{2HK+2}-t^{2HK+2}}{2HK+2}-2t\frac{T^{2HK+1}-t^{2HK+1}}{2HK+1}\right)\end{aligned}$$

对于 I_2 直接计算可得

$$I_2=\iint_t^T|s-u|^{2HK}\mathrm{d}s\mathrm{d}u=\frac{(T-t)^{2HK+2}}{(2HK+1)(2HK+2)}$$

由于 $\xi_t^{H,K}$ 是高斯过程，其积分的广义特征函数可以如下表示，即

$$\begin{aligned}&E\left[\exp\left\{un\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)\mathrm{d}\xi_s^{H,K}\right\}|\mathcal{F}(t)\right]\\&=\exp\left\{\frac{1}{2}un\gamma\iint_t^T\Phi^{H,K}(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}un\left(a\sqrt{v_t}+\frac{b}{\sqrt{v_t}}\right)\left(I_1+I_2\right)\right\}\end{aligned}$$

关于 ds 的积分，直接计算可得

$$-\frac{um^2}{2}\int_t^T\left(a\sqrt{v_s}+\frac{b}{\sqrt{v_s}}\right)^2\mathrm{d}s=-\frac{um^2}{2}\left(2ab\tau+a^2\int_t^T v_s\mathrm{d}s+b^2\int_t^T\frac{1}{v_s}\mathrm{d}s\right)$$

将以上部分带入广义特征函数表达式，整理可得

$$\begin{aligned}E\left(\mathrm{e}^{uY_T}|\mathcal{F}(t)\right)&=\exp\left\{uY_t+\frac{um\rho k_v}{\sigma_v}\left(n-m\theta_v\right)\tau+um^2\left[u\left(1-\rho^2\right)-1\right]ab\tau\right\}\\&\quad\cdot\exp\left\{-\frac{um^2\rho}{\sigma_v}v_t-\frac{umn\rho}{\sigma_v}\ln v_t+\frac{un}{2^K}\left(a\sqrt{v_t}+\frac{b}{\sqrt{v_t}}\right)\left(I_1+I_2\right)\right\}\\&\quad\cdot E\left[\exp\left\{u\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\right]\cdot E\left[v^{-\lambda}\exp\left\{-\omega v_T-\alpha\int_t^T v_s\mathrm{d}s-\beta\int_t^T\frac{1}{v_s}\mathrm{d}s\right\}\right]\\&:=J_1+J_2+J_3+J_4\end{aligned}$$

其中

$$\lambda=-\frac{umn\rho}{\sigma_v},\omega=\frac{um^2\rho}{\sigma_v},\alpha=-um^2\left[\frac{\rho k_v}{\sigma_v}+\frac{1}{2}u\left(1-\rho^2\right)a^2-\frac{a^2}{2}\right],$$

$$\beta=um\left[\frac{\rho nk_v\theta_v}{\sigma_v}-\frac{1}{2}um\left(1-\rho^2\right)b^2-\frac{mb^2}{2}\right]$$

根据 r_t 的表达式可知 J_3 具有如下形式：

$$J_3=\exp\left\{\frac{2k_r\theta_r}{\sigma_r^2}\ln\left[\frac{2\delta e^{\frac{1}{2}(k_r-\delta)\tau}}{2\delta e^{-\delta\tau}+\left(k_r+\delta\right)\left(1-e^{-\delta\tau}\right)}\right]+\frac{2u\left(1-e^{-\delta\tau}\right)r_t}{2\delta e^{-\delta\tau}+\left(k_r+\delta\right)\left(1-e^{-\delta\tau}\right)}\right\}$$

由 Heston [6]，形如 J_4 的期望有如下具体解析式：

$$J_4=\left(\omega+\frac{1}{\sigma_r^2}\left(\sqrt{A}\coth\frac{\sqrt{A}\tau}{2}+k_r\right)\right)^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2}+\lambda+\frac{k_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)}\cdot v_t^{-\frac{k_v\theta_v}{\sigma_v^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{Av_t}}{\sigma_v^2\sinh\frac{\sqrt{A}\tau}{2}}\right)^{B+1}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2}+\lambda+\frac{k_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)}{\Gamma\left(B+1\right)}\cdot\exp\left\{\frac{1}{\sigma_r^2}\left(k_v^2\theta_v\tau-\sqrt{A}v_t\coth\frac{\sqrt{A}\tau}{2}\right)+k_vv_t\right\}$$

$$\cdot M\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2}+\lambda+\frac{k_v\theta_v}{\sigma_v^2},B+1,\frac{Av_t}{\sigma_v^4\sinh^2\frac{\sqrt{A}\tau}{2}\left[\omega+\frac{1}{\sigma_r^2}\left(\sqrt{A}\coth\frac{\sqrt{A}\tau}{2}+k_r\right)\right]}\right)$$

将 J_3,J_4 带入广义特征函数表达式后，整理即可得到定理 1。

5. 基于 4/2 模型的欧式期权定价公式

基于定理 1 所导出的资产价格过程的特征函数解析表达式，我们可以通过傅里叶分析方法，将原期权定价问题转化为频域上的积分求解问题。具体而言，这一转换过程由以下定理 2 给出，其建立了特征函数与期权价格之间的傅里叶变换关系。

定理 2： 资产价格服从混合双分数布朗运动的 4/2 模型，随机利率满足 CIR 模型，欧式期权的到期日为 T，执行价格为 K，则欧式看涨期权定价公式为

$$V\left(y,r,v,t\right)=S_0-\frac{Ke^{-\int_0^t r_s ds}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K^{1+iz}}{z^2-iz}\Phi\left(-z\right)dz$$

其中 $\Phi\left(-z\right)$ 为标的资产的特征函数，由定理 1 可知其具体表达式。

证明： 令 $y=\ln S_T$，欧式看涨期权在到期日 T 的收益为

$$g\left(y\right)=\min\left(e^y,K\right)$$

定义广义傅里叶变换为 $\hat{g}\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(y\right)e^{-izy}dz$

则

$$\hat{g}\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\left(e^y,K\right)e^{-izy}dy=\int_{-\infty}^{\ln K}e^ye^{-izy}dy+\int_{\ln K}^{+\infty}Ke^{-izy}dy=\frac{e^{(1-iz)\ln K}}{1-iz}-\frac{Ke^{-iz\ln K}}{iz}=\frac{K^{1+iz}}{z^2-iz}$$

根据傅里叶逆变换，若 $\hat{g}(z)$ 是 $g(y)$ 的傅里叶变换，则

$$g(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(z)\mathrm{e}^{izy}\mathrm{d}z$$

在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下，欧式看涨期权的价格为

$$V=\mathrm{e}^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}E_{\mathbb{Q}}\left[(S_T-K)^+\right]=\mathrm{e}^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}E_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^y-\min\left(\mathrm{e}^y,K\right)\right]=S_0-\mathrm{e}^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}E_{\mathbb{Q}}\left[\min\left(\mathrm{e}^y,K\right)\right]$$

因此

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\min\left(\mathrm{e}^y,K\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(z)\mathrm{e}^{izy}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K^{1+iz}}{z^2-iz}\mathrm{e}^{izy}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K^{1+iz}}{z^2-iz}\Phi(-z)\mathrm{d}z$$

其中 $\Phi(z)$ 为 y 的特征函数，由定理 1 可得 $\Phi(z)=E_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{izy}\mid\mathcal{F}(t)\right]$，带入期权定价公式可得

$$V(y,r,v,t)=S_0-\frac{K\mathrm{e}^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K^{1+iz}}{z^2-iz}\Phi(-z)\mathrm{d}z$$

6. 结语

本文在混合双分数布朗运动的框架下，将 4/2 随机波动率模型与 CIR 随机利率过程相结合，给出了一个新的期权定价方法。运用伊藤随机微积分理论，并充分挖掘双分数布朗运动的数学性质，推导出了标的资产价格过程的特征函数解析表达式。在此基础上，采用傅里叶变换技术将复杂的定价问题转化为频域上的积分求解问题，最终建立了欧式期权的半解析定价公式。该模型在刻画市场长记忆效应方面的优势可进一步拓展至障碍期权、亚式期权等路径依赖型衍生品的定价研究。未来研究可着重于模型参数的稳健估计、计算效率的优化提升，以及向多资产期权定价的扩展。

基金项目

本文受广东省教育厅科研项目【服务“百千万”工程重点领域专项】(No. 2024ZDZX4067)和广州市哲学社科规划 2024 年度课题(No. 2024GZGJ77)资助。

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Hull, J. and White, A. (1987) The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, **42**, 281-300. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x

[3] Stein, E.M. and Stein, J.C. (1991) Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *Review of Financial Studies*, **4**, 727-752. https://doi.org/10.1093/rfs/4.4.727

[4] Heston, S.L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343. https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327

[5] Forde, M. and Jacquier, A. (2010) Robust Approximations for Pricing Asian Options and Volatility Swaps under Stochastic Volatility. *Applied Mathematical Finance*, **17**, 241-259. https://doi.org/10.1080/13504860903335348

[6] Heston, S.L. (1997) A Simple New Formula for Options with Stochastic Volatility. *Social Science Electronic Publishing*, **15**, 23-44.

[7] Grasselli, M. (2016) The 4/2 Stochastic Volatility Model: A Unified Approach for the Heston and the 3/2 Model. *Mathematical Finance*, **27**, 1013-1034. https://doi.org/10.1111/mafi.12124

[8] 王波, 朱顺伟, 邓亚东, 等. 4/2 随机波动率模型下的期权定价[J]. 系统管理学报, 2020, 29(1): 192-198.

[9] Merton, R.C. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-183. https://doi.org/10.2307/3003143

[10] Vasicek, O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188.

https://doi.org/10.1016/0304-405x(77)90016-2

[11] 李红, 杨向群. CIR 利率模型的期权定价[J]. 经济数学, 2007(3): 244-247.

[12] Cox, J.C., Ingersoll, J.E. and Ross, S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**, 385-407. https://doi.org/10.2307/1911242

[13] He, X.J. and Zhu, S.P. (2018) A Closed-Form Pricing Formula for European Options under the Heston Model with Stochastic Interest Rate. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **335**, 323-333. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.12.011

[14] Berthe, E., Dang, D. and Ortiz-Gracia, L. (2019) A Shannon Wavelet Method for Pricing Foreign Exchange Options under the Heston Multi-Factor CIR Model. *Applied Numerical Mathematics*, **136**, 1-22. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018.09.013

[15] 白亚楠. 混合分形 Heston-CIR 模型下的期权定价及统计模拟分析[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州财经大学, 2021.

[16] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G. and Talarczyk, A. (2004) Sub-Fractional Brownian Motion and Its Relation to Occupation Times. *Statistics & Probability Letters*, **69**, 405-419. https://doi.org/10.1016/j.spl.2004.06.035

[17] 荆卉婷, 龚天杉, 牛娴, 等. 混合双分数 Brown 运动驱动的信用风险模型[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2012, 29(5): 586-592+601.

[18] 孙娇娇, 芮绍平, 张杰. 混合双分数 Brown 运动环境下支付红利的欧式期权定价[J]. 苏州市职业大学学报, 2017, 28(3): 50-54.

[19] 刘杰, 张光晨. 混合双分数 Brown 运动下欧式期权的定价[J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 2017, 38(4): 338-341+352.

[20] 顾哲煜. 混合双分数 Brown 运动模型下回望期权定价[J]. 淮海工学院学报(自然科学版), 2019, 28(1): 8-13.

[21] 张亚茹, 夏莉, 张典秋. 混合双分数 Brown 运动下的永久美式回望期权定价[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(4): 98-107.

[22] Sun, L. (2013) Pricing Currency Options in the Mixed Fractional Brownian Motion. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*, **392**, 3441-3458. https://doi.org/10.1016/j.physa.2013.03.055

[23] 郭精军, 马爱琴, 张翠芸. 基于 4/2-CIR 模型的欧式期权定价及实证研究[J]. 运筹与管理, 2024, 33(3): 162-168.

[24] Russo, F. and Tudor, C.A. (2006) On Bifractional Brownian Motion. *Stochastic Processes and their Applications*, **116**, 830-856. https://doi.org/10.1016/j.spa.2005.11.013