

一类具有Neumann边界条件的向量型 Sturm-Liouville问题的谱性质

王怡静, 高云兰*

内蒙古工业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2025年7月14日; 录用日期: 2025年8月7日; 发布日期: 2025年8月21日

摘要

本文在势函数 $Q(x)$ 为一般的实对称矩阵的前提下, 研究了Neumann边界条件下的向量型 Sturm-Liouville问题的特征值的重数问题。讨论了特征值及特征函数判别式的渐近式, 并给出了关于特征值重数的重要结论: 如果矩阵 $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ 的特征值重数至多为 k ($1 \leq k \leq m-1$), 那么, 除了有限个特征值, 向量型 Sturm-Liouville问题的特征值重数也至多为 k 。

关键词

向量型 Sturm-Liouville问题, Neumann边界条件, 特征值重数

Spectral Properties of a Class of Vector Sturm-Liouville Problems with Neumann Boundary Conditions

Yijing Wang, Yunlan Gao*

College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia

Received: Jul. 14th, 2025; accepted: Aug. 7th, 2025; published: Aug. 21st, 2025

Abstract

This paper investigates the multiplicity of eigenvalues for vector-valued Sturm-Liouville problems under Neumann boundary conditions, with the potential function $Q(x)$ being a general real

*通讯作者。

symmetric matrix. The asymptotic expressions of eigenvalues and characteristic functions are discussed, and the significant conclusion regarding the multiplicity of eigenvalues are presented: If the multiplicity of eigenvalues of the matrix $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ is at most k ($1 \leq k \leq m-1$), then, except for finitely many eigenvalues, the multiplicity of eigenvalues for the vector-valued Sturm-Liouville problem is also at most k .

Keywords

Vector-Valued Sturm-Liouville Problems, Neumann Boundary Conditions, Eigenvalue Multiplicity

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

求解固体热传导模型的 Sturm-Liouville (以下简称为 S-L) 问题起源于 19 世纪初, 长期以来, 对于标量型 S-L 问题的研究已经形成了相对完善的理论系统, 如[1][2], 作为标量型 S-L 问题的推广, 其向量型问题的研究如今也是一个热门领域。有研究表明, 经典的 S-L 理论中的诸多结论均可从标量型推广到向量型, 如[3]-[5], 然而此类推广面临诸多复杂性, 其核心难点集中体现在特征值的重数问题上。这是因为在标量型问题情形下, 特征值通常是单重的, 但在向量型问题中, 特征值的重数显著增加, 导致其分布规律也更为复杂, 因此对于向量型 S-L 问题的研究是十分必要的。

向量型 S-L 问题是由向量方程(1)和边界条件构成:

$$-y''(x) + Q(x)y = \lambda y(x), \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

这里, $\lambda \in \mathbb{C}$ 是谱参数, I_m 表示 $m \times m$ 阶单位矩阵, $z(x)$ 为定义在 $[0, 1]$ 上的 m 维向量值函数, $Q(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的连续 $m \times m$ 阶实对称矩阵值函数, 其中 $m \geq 2$ 。早在 1999 年, Shen 和 Shieh 在文献[6]中针对 $Q(x)$ 为 Jacobi 矩阵值函数, 且边界条件是 Dirichlet 边界条件的向量型 S-L 问题进行了研究, 得到该问题最多只有有限个重数为 m 的特征值。文献[7]研究了方程(1)在 Neumann 边界条件下情形, 其中 $Q(x)$ 为 Jacobi 矩阵值函数, 得到与[6]类似的结论。同样针对 $Q(x)$ 为 Jacobi 矩阵值函数, 文献[8][9]将边界条件进一步推广到一般的分离边界条件, 并得到类似的结论。文献[10]研究了定义在区间 $(0, 1)$ 上具有 Dirichlet 边界条件的 m 维向量型 S-L 问题, 证明了如果矩阵 $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ 的特征值重数至多为 k ($1 \leq k \leq m-1$), 那么除有限个特征值外, 该向量型问题的特征值重数也至多为 k 。

受上述文献的启发, 本文主要研究当 $Q(x)$ 是一般的实对称矩阵时, $Q \in L(I, R^{m \times m})$, $Q' \in L(I, R^{m \times m})$ 且 $Q = Q^*$, 方程(1)在 Neumann 边界条件

$$y'(0) = y'(1) = \theta_m, \quad (2)$$

下的向量型 S-L 问题, 讨论其特征值及特征判别式的渐近式, 并给出了关于特征值重数的重要结论: 如果矩阵 $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ 的特征值重数至多为 k ($1 \leq k \leq m-1$), 那么, 除了有限个特征值, 向量型 S-L 问题(1)~(2)的特征值重数也至多为 k 。

2. 预备知识

令 $\Phi(x, \lambda)$ 和 $\Psi(x, \lambda)$ 是方程

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, x \in [0, 1], \quad (3)$$

分别满足初始条件

$$\Phi(0, \lambda) = \theta_m, \Phi'(0, \lambda) = E_m, \quad (4)$$

$$\Psi(0, \lambda) = E_m, \Psi'(0, \lambda) = \theta_m, \quad (5)$$

的矩阵值解, 其中 $Y(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的 $m \times m$ 阶矩阵值函数, $Q(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的连续 $m \times m$ 阶实对称矩阵值函数, $Q \in L(I, R^{m \times m})$, $Q' \in L(I, R^{m \times m})$ 且 $Q = Q^*$ 。那么向量型方程(1)的通解可以表示为

$$y(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda)c_1 + \Psi(x, \lambda)c_2,$$

其中 c_1 和 c_2 是任意 m 维常数向量, 并且满足 $c_1^T c_1 + c_2^T c_2 \neq 0$ 。

引理 2.1: λ 是向量型问题(1)~(2)的特征值, 当且仅当 $\det \Psi'(1, \lambda) = 0$ 。

证明: 见文献[6]的定理 4.1 的证明, 证毕。

记: $\Delta(\lambda) = \det \Psi'(1, \lambda)$, 称 $\Delta(\lambda)$ 为问题(1)~(2)的特征值判别式。

引理 2.2: 向量型 S-L 问题(1)~(2)的线性无关解 $y(x, \lambda)$ 的个数为 $m - \text{Rank}(\Psi'(1, \lambda))$ 。

证明: 由 $y'(1, \lambda) = \Psi'(1, \lambda)c_2 = \theta_m$ 可知, 当 $\det \Psi'(1, \lambda) \neq 0$ 时, 即 $c_2 = \theta_m$, 只有零解, 舍去。当 $\det \Psi'(1, \lambda) = 0$ 时, 非零解的个数由矩阵 $\Psi'(1, \lambda)$ 的秩决定, 即线性无关解的个数为 $m - \text{Rank}(\Psi'(1, \lambda))$, 证毕。

由此引理可以得出: 问题(1)~(2)特征值 λ_* 的重数至多是 m 。特征值 λ_* 的重数是 m 当且仅当 $\Psi'(1, \lambda_*)$ 是零矩阵。

对于如上定义的 $\Psi(x, \lambda)$, 利用常数变易法可求得:

$$\Psi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x E_m + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) Q(\xi) \Psi(\xi, \lambda) d\xi \quad (6)$$

定理 2.1: 矩阵型 S-L 初值问题(3) (5)的渐近公式如下:

$$\Psi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x E_m + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \lambda \rightarrow \infty. \quad (7)$$

证明: 将(6)中的 $\Psi(x, \lambda)$ 表达式代入积分部分的被积函数中, 得

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda} x E_m + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) Q(\xi) \left[\cos \sqrt{\lambda} \xi E_m + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\xi \sin \sqrt{\lambda} (\xi - s) Q(s) \Psi(s, \lambda) ds \right] d\xi \\ &= \cos \sqrt{\lambda} x E_m + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) \cos \sqrt{\lambda} \xi Q(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \int_0^\xi \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) \sin \sqrt{\lambda} (\xi - s) Q(\xi) Q(s) \Psi(s, \lambda) ds d\xi \end{aligned}$$

进行迭代后得到问题(3) (5)的解的渐近公式(7), 证毕。

定理 2.2: 令 $\lambda = s^2$, $s = \sigma + i\tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, 当 $|s| \rightarrow \infty$ 时, 矩阵值函数 $\Psi'(x, \lambda)$ 有以下渐近展开式

$$\Psi'(x, s^2) = -s \sin s x E_m + \frac{\cos s x}{2} \int_0^x Q(\xi) d\xi + o\left(\frac{1}{|s|}\right). \quad (8)$$

证明: 由(6)可得

$$\Psi'(x, s^2) = -s \sin s x E_m + \int_0^x \cos(s(x - \xi)) Q(\xi) \Psi(\xi, s^2) d\xi, \quad (9)$$

将(7)代入(9)的等式右边, 得到

$$\begin{aligned}
 \Psi'(x, s^2) &= -s \sin(sx) E_m + \int_0^x \cos s(x-\xi) Q(\xi) \left[\cos(s\xi) E_m + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \right] d\xi \\
 &= -s \sin(sx) E_m + \int_0^x \cos s(x-\xi) \cos(s\xi) Q(\xi) d\xi + \int_0^x \cos s(x-\xi) Q(\xi) O\left(\frac{1}{|s|}\right) d\xi \\
 &= -s \sin(sx) E_m + \left[\frac{1}{2} \cos(sx) \int_0^x Q(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^x \cos(s(x-2\xi)) Q(\xi) d\xi \right] \\
 &\quad + \int_0^x \cos s(x-\xi) Q(\xi) O\left(\frac{1}{|s|}\right) d\xi
 \end{aligned} \tag{10}$$

由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$\begin{aligned}
 \lim_{|s| \rightarrow \infty} \int_0^x \cos s(x-2\xi) Q(\xi) d\xi &= 0, \\
 \lim_{|s| \rightarrow \infty} \int_0^x \cos s(x-\xi) Q(\xi) d\xi &= 0,
 \end{aligned}$$

因此, 当 $|s| \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \int_0^x \cos s(x-\xi) Q(\xi) O\left(\frac{1}{|s|}\right) d\xi = o\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

可得(8), 证毕。

引理 2.3 [7]: 向量型 S-L 问题(1)~(2)有无穷多可数个实特征值, 这些特征值有下界, 无上界。记问题(1)~(2)的所有特征值为

$$\{\lambda_{n,r}\}_{n=0,r=1}^{\infty,m} = \{\lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{0,m}; \lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,m}; \dots; \lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,m}; \dots\}$$

定理 2.3: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_{n,r}$ ($r=1, 2, \dots, m$) 有下面的渐近公式

$$\sqrt{\lambda_{n,r}} = n\pi + \frac{\mu_r}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{11}$$

其中 μ_r 为矩阵 $\int_0^x Q(\xi) d\xi$ 的第 r 个特征值。

证明: 由(8)可知

$$\Psi'(1, \lambda_{n,r}) = -\sqrt{\lambda_{n,r}} \sin(\sqrt{\lambda_{n,r}}) E_m + \frac{\cos \sqrt{\lambda_{n,r}}}{2} \int_0^1 Q(\xi) d\xi + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,r}}}\right),$$

因为 $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ 是实对称矩阵, 所以存在可逆矩阵 T , 使得

$$T^{-1} \int_0^1 Q(\xi) d\xi T = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m), \tag{12}$$

注意其中 $\lambda_{n,r}$ 是实的, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 是矩阵 $\int_0^x Q(\xi) d\xi$ 的 m 个特征值。将 $\Psi'(1, \lambda_{n,r})$ 变换为对角形式

$$T^{-1} \Psi'(1, \lambda_{n,r}) T = -\sqrt{\lambda_{n,r}} \sin(\sqrt{\lambda_{n,r}}) E_m + \frac{\cos \sqrt{\lambda_{n,r}}}{2} [\text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)] + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,r}}}\right), \tag{13}$$

由引理 2.1 及(13)知

$$\det \left(-\sqrt{\lambda_{n,r}} \sin(\sqrt{\lambda_{n,r}}) E_m + \frac{\cos \sqrt{\lambda_{n,r}}}{2} [\text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)] + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,r}}}\right) \right) = 0,$$

将上式转化为标量方程即得

$$-\sqrt{\lambda_{n,r}} \sin(\sqrt{\lambda_{n,r}}) + \frac{\cos \sqrt{\lambda_{n,r}}}{2} \mu_r + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,r}}}\right) = 0, \quad (r=1, 2, \dots, m),$$

对于足够大的 n , 有 $\lambda_{n,r} \rightarrow \infty$, 得

$$\tan(\sqrt{\lambda_{n,r}}) = \frac{\mu_r}{2\sqrt{\lambda_{n,r}}},$$

记 $\sqrt{\lambda_{n,r}} = n\pi + \varepsilon_{n,r}$, 则对于足够大的 n , 有 $|\varepsilon_{n,r}| \rightarrow 0$, 进一步

$$\tan(\varepsilon_{n,r}) = \frac{\mu_r}{2(n\pi + \varepsilon_{n,r})},$$

利用文献[11]的方法, 得到

$$\varepsilon_{n,r} = \frac{\mu_r}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

由此推出(11), 证毕。

定理 2.4: 当 $|s| \rightarrow \infty$ 时, 特征判别式 $\Delta(\lambda)$ 有渐近表达式

$$\Delta(\lambda) = \det \Psi'(1, s^2) = \prod_{r=1}^m \left[(-s \sin s) + \frac{\cos s}{2} \mu_r \right] + O(|s|^{m-2}). \quad (14)$$

其中, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 是矩阵 $\int_0^x Q(\xi) d\xi$ 的 m 个特征值。

证明: 由引理 2.1, (8)以及(12)可得

$$T^{-1} \Psi'(x, s^2) T = -s \sin sx E_m + \frac{\cos sx}{2} \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) + o\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

对上式求行列式可得

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det \Psi'(1, s^2) \\ &= \det \left[-s \sin s E_m + \frac{\cos s}{2} \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) + o\left(\frac{1}{|s|}\right) \right] \\ &= \prod_{r=1}^m \left[(-s \sin s) + \frac{\cos s}{2} \mu_r \right] + O(|s|^{m-2}). \end{aligned}$$

即得到(14), 证毕。

3. 向量型 Sturm-Liouville 问题的特征值重数

定理 3.1: 如果矩阵 $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ 的特征值重数至多为 k ($1 \leq k \leq m-1$), 那么, 除了有限个特征值, 向量型 S-L 问题(1)~(2)的特征值重数也至多为 k 。

证明: 设 $\lambda_{n,r}$ 是问题(1)~(2)的一个特征值(其中 $1 \leq r \leq m$)。记 $s_{n,r} = \sqrt{\lambda_{n,r}}$, 由于所有 $\lambda_{n,r}$ 均为实特征值, 根据引理 2.1 以及(8), 当 $|s_{n,r}| \rightarrow \infty$ 时, 得

$$\Psi'(1, s_{n,r}^2) = -s_{n,r} \sin s_{n,r} E_m + \frac{\cos s_{n,r}}{2} \int_0^1 Q(\xi) d\xi + o\left(\frac{1}{|s_{n,r}|}\right), \quad (15)$$

由定理 2.3 可得

$$s_{n,r} = n\pi + \varepsilon_{n,r}, \quad \varepsilon_{n,r} = \frac{\mu_r}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (16)$$

对于足够大的 n , 由上式知 $\varepsilon_{n,r} \rightarrow 0$, 则有 $\cos(n\pi + \varepsilon_{n,r}) \rightarrow 1$, 将(16)代入(15)中, 得

$$\begin{aligned} \Psi'(1, s_{n,r}^2) &= -s_{n,r} \sin(n\pi + \varepsilon_{n,r}) E_m + \frac{\cos s_{n,r}}{2} \int_0^1 Q(\xi) d\xi + o\left(\frac{1}{|n\pi + \varepsilon_{n,r}|}\right), \\ \sec s_{n,r} \Psi'(1, s_{n,r}^2) &= -s_{n,r} \tan(n\pi + \varepsilon_{n,r}) E_m + \frac{1}{2} \int_0^1 Q(\xi) d\xi + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \sec s_{n,r} \Psi'(1, s_{n,r}^2) &= -s_{n,r} \tan \varepsilon_{n,r} E_m + \frac{1}{2} \int_0^1 Q(\xi) d\xi + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

又由(12), 得

$$\begin{aligned} T^{-1} \sec s_{n,r} \Psi'(1, s_{n,r}^2) T \\ = \text{diag} \left(-s_{n,r} \tan \varepsilon_{n,r} + \frac{\mu_1}{2}, -s_{n,r} \tan \varepsilon_{n,r} + \frac{\mu_2}{2}, \dots, -s_{n,r} \tan \varepsilon_{n,r} + \frac{\mu_m}{2} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

利用反证法, 假设问题(1)~(2)的特征值 $\lambda_{n,r}$ 的重数为 $k+1$. 那么, 根据引理 2.2, 矩阵 $\Psi'(1, s_{n,r}^2)$ 的秩为 $m-(k+1)$, 不妨设最后 $m-(k+1)$ 行向量 $r_{k+2}, r_{k+3}, \dots, r_m$ 线性无关. 那么前 $k+1$ 个行向量 $r_1, r_2, \dots, r_{k+1}$ 均可由 $r_{k+2}, r_{k+3}, \dots, r_m$ 线性表出. 因此, 矩阵(18)的前 $k+1$ 个对角元素是 $o\left(\frac{1}{n}\right)$. 那么有

$$\begin{aligned} -s_{n,r} \tan \varepsilon_{n,r} + \frac{\mu_1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) &= 0, \\ -s_{n,r} \tan \varepsilon_{n,r} + \frac{\mu_2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) &= 0, \\ &\vdots \\ -s_{n,r} \tan \varepsilon_{n,r} + \frac{\mu_{k+1}}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

则由(19)式中第一个等式依次减去其余各式可得

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} = o\left(\frac{1}{n}\right), \frac{\mu_1 - \mu_3}{2} = o\left(\frac{1}{n}\right), \dots, \frac{\mu_1 - \mu_{k+1}}{2} = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (20)$$

因为 μ_j ($1 \leq j \leq m$) 的重数不超过 k , 因此 $\mu_1 - \mu_2, \mu_1 - \mu_3, \dots, \mu_1 - \mu_{k+1}$ 中至少存在一个非零项. 不妨设 $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$, 这与(20)式中 $\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, ($n \rightarrow \infty$) 矛盾. 由此可证, 问题(1)~(2)的特征值除有限个外, 其重数至多为 k , 证毕.

推论 3.1: 若矩阵 $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ 的特征值均为单重的, 则问题(1)~(2)的特征值除有限个特征值外, 其余皆为单重特征值.

推论 3.2: 若矩阵 $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ 的特征值重数不超过 $m-1$, 则问题(1)~(2)的特征值除有限个外, 重数也不超过 $m-1$.

推论 3.3: 如果 $\lambda_{n,r}$ 是问题(1)~(2)的任一特征值(无论它的重数是多少)均有

$$\sqrt{\lambda_{n,r}} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

证明: 若势函数 $Q(x)$ 满足定理 3.1 中的条件, 根据该定理结论可知(19)中至少有一个等式成立, 现假设(19)中第一个等式成立, 即

$$-s_{n,r} \tan \varepsilon_{n,r} + \frac{\mu_1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

$$\tan \varepsilon_{n,r} = \frac{\mu_1 - 2o\left(\frac{1}{n}\right)}{2s_{n,r}} = \frac{\mu_1}{2n\pi} - \frac{2o\left(\frac{1}{n}\right)}{2n\pi} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

故有

$$\varepsilon_{n,r} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

证毕。

推论 3.4: 若矩阵 $\int_0^1 Q(\xi) d\xi$ 的特征值都是 m 重的, 那么, 问题(1)~(2)的特征值除了有限个, 其重数均为 m 重, 即

$$\int_0^1 Q(\xi) d\xi = \mu E_m.$$

证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若问题(1)~(2)的特征值都是 m 重的, 将不同的特征值记为 λ_n , 即

$$\lambda_{n,1} = \lambda_{n,2} = \cdots = \lambda_{n,m} =: \lambda_n; s_n = \sqrt{\lambda_n}, s_n = n\pi + \varepsilon_n, \quad (21)$$

由推论 3.3 知, $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\Psi'(1, \lambda_n) = O_m$, 则由(15)知

$$-s_n \sin s_n E_m + \frac{\cos s_n}{2} \int_0^1 Q(\xi) d\xi + o\left(\frac{1}{|s_n|}\right) = O_m, \quad (22)$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \varepsilon_n = 1$, 因此

$$-s_n \tan s_n E_m + \frac{1}{2} \int_0^1 Q(\xi) d\xi + o\left(\frac{1}{|s_n|}\right) = O_m,$$

化解得

$$\begin{aligned} \tan s_n E_m &= \frac{1}{2s_n} \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m) + \frac{1}{s_n} o\left(\frac{1}{|s_n|}\right) \\ &= \frac{1}{2n\pi} \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

因 $\{n \tan \varepsilon_n\}$ 是有界的, 则 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m$, 证毕。

例 3.1: 考虑四维向量型 S-L 问题

$$\begin{cases} -y'' + Q(x)y = \lambda y, x \in [0, 1], \\ y'(0) = y'(1) = \theta, \end{cases} \quad (23)$$

这里

$$Q(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_1(x) + q_2(x) & q_1(x) - q_2(x) & 0 & 0 \\ q_1(x) - q_2(x) & q_1(x) + q_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1(x) + q_3(x) & q_1(x) - q_3(x) \\ 0 & 0 & q_1(x) - q_3(x) & q_1(x) + q_3(x) \end{pmatrix},$$

存在常数酉矩阵

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

则有

$$T^{-1}Q(x)T = \Lambda(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_3(x) \end{pmatrix} = \text{diag}(q_1(x), q_1(x), q_2(x), q_3(x)),$$

若对 $\forall i \neq j (i, j = 1, 2, 3)$, 有

$$\int_0^1 q_i(\xi) d\xi \neq \int_0^1 q_j(\xi) d\xi,$$

则由定理 3.1 可知, 除了有限个特征值外, 问题(23)的特征值重数至多为 2 重。事实上, 通过变换 $y = Tz$, 可将问题(23)转化为

$$\begin{cases} -z'' = \Lambda(x)z - \lambda z, \\ z'(0) = z'(1) = \theta, \end{cases} \quad (24)$$

这样就将问题(24)转化为以下问题

$$\begin{cases} -z_i'' + q_i(x)z_i = \mu^{(i)}z_i, x \in [0, 1], \\ z_i'(0) = z_i'(1) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

记 $\mu_n^{(i)} (i = 1, 2, 3, n \in \mathbb{N}_0)$ 表示问题(25)的特征值, $\bar{z}_i(x, \mu_n^{(i)})$ 表示对应的特征函数。注意到

$T \begin{bmatrix} z_1(x, \mu_n^{(1)}), 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$ 和 $T \begin{bmatrix} 0, z_1(x, \mu_n^{(1)}), 0, 0 \end{bmatrix}^T$ 是相应于 $\mu_n^{(1)}$ 的两个线性无关的特征函数, 因此 $\mu_n^{(1)} (n \in \mathbb{N}_0)$ 是向量型问题(23)的 2 重特征值, $T \begin{bmatrix} 0, 0, z_2(x, \mu_n^{(2)}), 0 \end{bmatrix}^T$ 和 $T \begin{bmatrix} 0, 0, 0, z_3(x, \mu_n^{(3)}) \end{bmatrix}^T$ 为相应于向量型问题(23)的特征值 $\mu_n^{(2)}$ 和 $\mu_n^{(3)}$ 的特征函数, 证毕。

基金项目

国家自然科学基金(12261066); 内蒙古自然科学基金(2023LHMS01015)。

参考文献

- [1] 傅守忠, 王忠, 魏广生. Sturm-Liouville 问题及其逆问题[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [2] Kravchenko, V.V. (2022) Spectrum Completion and Inverse Sturm-Liouville Problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **46**, 5821-5835. <https://doi.org/10.1002/mma.8869>
- [3] Bondarenko, N.P. (2019) Spectral Analysis of the Matrix Sturm-Liouville Operator. *Boundary Value Problems*, **2019**, 1-17. <https://doi.org/10.1186/s13661-019-1292-z>
- [4] Shen, C. (2001) Some Inverse Spectral Problems for Vectorial Sturm-Liouville Equations. *Inverse Problems*, **17**, 1253-1294. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/17/5/303>
- [5] 张岚芳, 敖继军, 韩仪鹏. 带谱参数边界条件的二维向量型 Sturm-Liouville 问题特征值的依赖性[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2024, 43(4): 289-295.

- [6] Shen, C. and Shieh, C. (1999) On the Multiplicity of Eigenvalues of a Vectorial Sturm-Liouville Differential Equation and Some Related Spectral Problems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **127**, 2943-2952. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-99-05031-5>
- [7] 杨巧玲. 向量型 Sturm-Liouville 问题的特征值重数[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津大学, 2008.
- [8] Kong, Q. (2002) Multiplicities of Eigenvalues of a Vector-Valued Sturm-Liouville Problem. *Mathematika*, **49**, 119-127. <https://doi.org/10.1112/s0025579300016119>
- [9] Yang, C.F., Huang, Z.Y. and Yang, X.P. (2007) The Multiplicity of Spectra of a Vectorial Sturm-Liouville Differential Equation of Dimension Two and Some Applications. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **37**, 1379-1398. <https://doi.org/10.1216/rmj/1187453119>
- [10] 刘肖云, 史国良, 闫军. 向量型 Sturm-Liouville 问题的特征值重数及逆结点问题[J]. 数学物理学报(A 辑), 2023, 43(3): 669-679.
- [11] Cheng, Y., Shieh, C. and Law, C. (2004) A Vectorial Inverse Nodal Problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **133**, 1475-1484. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-04-07679-8>