Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(8), 134-140
Published Online August 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.148377

Hans汉斯

一般函数下Beta-展式中极致例外集的剩余性质

吴梓滢，郑丽璇

广东财经大学统计与数学学院，广东 广州

收稿日期：2025年7月12日；录用日期：2025年8月5日；发布日期：2025年8月12日

摘　要

给定 $\beta>1$ 和 $x\in(0,1]$。对于任意的 $y\in(0,1]$，关于 x 的run-length函数 $r_x(y,n)$ 定义为在 y 的 β-展式的前 n 个数字中出现的 x 的 β-展式的前缀的最大长度。令非负函数 $\varphi(n)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\varphi(n)}=+\infty$，我们对以下关于该函数的极致例外集 $E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)=\left\{x\in[0,1]:\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\varphi(n)}=0,\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\varphi(n)}=+\infty\right\}$ 进行研究，给出该集合的剩余性质。

关键词

Beta-展式，Run-Length函数，极致例外集，剩余集

The Residual Property of the Extremely Exceptional Set in the Beta-Expansion under General Function

Ziying Wu, Lixuan Zheng

School of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: Jul. 12th, 2025; accepted: Aug. 5th, 2025; published: Aug. 12th, 2025

Abstract

Let $\beta>1$ and $x\in(0,1]$. For any $y\in(0,1]$, the run-length function $r_x(y,n)$ (with respect to x) is defined to be the maximal length of the prefix of the beta-expansion of x which appears in the

文章引用: 吴梓滢, 郑丽璇. 一般函数下 Beta-展式中极致例外集的剩余性质[J]. 应用数学进展, 2025, 14(8): 134-140.
DOI: 10.12677/aam.2025.148377

first n terms of the beta-expansion of y. Let the non-negative function $\varphi(n)$ satisfy $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\varphi(n)}=+\infty$. We study the extremely exceptional set given by $E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)=\left\{x\in[0,1]:\liminf_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\varphi(n)}=0,\limsup_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\varphi(n)}=+\infty\right\}$ and establish its residual properties.

Keywords

Beta-Expansion, Run-Length Function, Extremely Exceptional Set, Residual Set

1. 引言

给定一个实数 $\beta>1$，T_β 是定义在 $(0,1]\to(0,1]$ 上的 β 变换：

$$T_\beta x=\beta x-\lceil\beta x\rceil+1,$$

其中 $\lceil x\rceil$ 表示不超过 x 的最小整数。Rényi 首先在文献[1]中引出了 β-展式的概念，他证明了通过 $T_\beta(x)$ 进行迭代运算，任意的 $(0,1]$ 上的实数都可以唯一地展开成如下级数：

$$x=\frac{\varepsilon_1(x,\beta)}{\beta}+\frac{\varepsilon_2(x,\beta)}{\beta^2}+\cdots+\frac{\varepsilon_n(x,\beta)}{\beta^n}+\cdots,$$

其中，对于任意的 $n\ge1$，$\varepsilon_n(x,\beta)=\lceil\beta T_\beta^{n-1}x\rceil-1$ 被称为 x 的第 n 位数字。定义 x 的数字序列为 $\varepsilon(x,\beta):=(\varepsilon_1(x,\beta),\varepsilon_2(x,\beta),\cdots,\varepsilon_n(x,\beta),\cdots)$，并称此序列为 x 的 β-展式。当 β 固定且不引起混淆时，常简记 $\varepsilon(x,\beta)$ 为 $\varepsilon(x)$。Rényi 在文献[1]中证明了 β-变换具有一个等价于 Lebesgue 测度 $\mathcal{L}$ 的不变遍历测度 ν_β，并且系统研究了非负实数的 β-展式。此后，β-动力系统 $((0,1],T_\beta,\nu_\beta)$ 引起了广泛关注，更多相关的定理和结果可参见文献[1]-[4]。

给定 $\beta>1$，对任意的 $x\in(0,1]$ 和 $n\in\mathbb{N}$，定义关于 x 的 run-length 函数 $r_x(y,n)$ 为：在 y 的 β-展式的前 n 个数字中出现的 x 的 β-展式的前缀的最大长度，即：

$$r_x(y,n)=\max\left\{1\le j\le n:\varepsilon_{i+1}(y)=\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_{i+j}(y)=\varepsilon_j(x),0\le i\le n-j\right\}.$$

当满足上述条件的 j 不存在时，令 $r_x(y,n)=0$。特别地，当 $x=0$ 时恒有 $\varepsilon(0)=(0,0,\cdots)$，故函数 $r_0(y,n)$ 表示 y 的 β-展式前 n 个数字中连续出现 0 的最大长度。

Erdös 和 Rényi [4]证明得到：当 $\beta=2$ 时，对于 Lebesgue 测度下几乎所有的 $y\in(0,1]$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_0(y,n)}{\log_2 n}=1.$$

这一结论已在多种情况下得到推广和发展，具体参见文献[5]-[8]等。

给定 $\beta>1$，对任意 $x\in(0,1]$ 和 $0\le\alpha\le+\infty$，考虑如下例外集：

$$E_x(\alpha)=\left\{y\in(0,1]:\lim_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\log_\beta n}=\alpha\right\}.$$

Lü 和 Wu [9]推广了上述 Erdös 和 Rényi 的极限定律，他们证明了对任意 $x\in(0,1]$ 和 Lebesgue 测度下几乎所有的 $y\in(0,1]$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\log_\beta n}=1.$$

此外，他们研究了极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\log_\beta n}$ 取特定值点时对应点集的 Hausdroff 维数，得到：

$$\dim_H E_x(+\infty)=\begin{cases}1, & 若 \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_\beta\left(-\log_\beta\left|I_n(x)\right|\right)}{n}=0;\\ 0, & 若 \limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_\beta\left(-\log_\beta\left|I_n(x)\right|\right)}{n}>0.\end{cases}$$

Zheng 和 Wu [10]考虑如下极致例外集

$$E_x(a,b)=\left\{y\in(0,1]:\liminf_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\log_\beta n}=a,\limsup_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\log_\beta n}=b\right\}$$

并推广了 Lü 和 Wu 的结果，给出了集合 $E_x(a,b)$ 的 Hausdroff 维数。

在数论中，从拓扑学角度研究不规则集大小的剩余性质是值得关注的问题，参见[11] [12]。在[13]-[15]中已证明集合 $E_0(0,+\infty)$ 是剩余的。现将 Zheng 和 Wu 中的集合 $E_x(a,b)$ 进行推广，将 $\log_\beta n$ 推广为一般非负函数 $\varphi(n)$。本文中，设一般非负单调递增函数 $\varphi(n)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\varphi(n)}=+\infty$。定义集合

$$E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)=\left\{x\in[0,1]:\liminf_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\varphi(n)}=0,\limsup_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\varphi(n)}=+\infty\right\}.$$

自然地，我们考虑以同样的方法证明集合 $E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)$ 的剩余性质。受此启发，可得如下定理。

定理 1：对任意的 $\beta>1$ 和 $x\in[0,1]$，都有集合 $E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)$ 在 $[0,1]$ 中是剩余集。

本文的结构安排如下：第 2 部分回顾 β-展式的相关定义、定理和基本性质，第 3 部分给出定理 1 的详细证明。

2. 预备知识

本部分主要回顾 β-展式的相关定义、定理和基本性质。关于 β-展式的更多细节可参考文献[1] [2] [4]及其参考文献。

经典的 β-变换定义为：

$$T_\beta^*(x)=\beta x-\lfloor\beta x\rfloor,0\le x<1,$$

其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数。注意到，对任意的 $x\in(0,1]$，有 $T_\beta(x)$ 严格大于 0。故此变换 T_β^* 确保每个 $x\in(0,1]$ 均有一个无穷级数展开，且对于无穷多个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\varepsilon_n(x,\beta)\neq 0$。

由 T_β 的定义可知，对于整数 $n\ge 1$，x 的第 n 位数字 $\varepsilon_n(x,\beta)$ 属于字母表 $\mathcal{A}=\{0,\cdots,\lceil\beta\rceil-1\}$。令 $\mathcal{A}^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^n$。任意两个词 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$，$\omega'=(\omega_1',\cdots,\omega_m')\in\mathcal{A}^*$，定义

$$\omega\omega'=(\omega_1,\cdots,\omega_n,\omega_1',\cdots,\omega_m').$$

特别地，当$\varnothing$为空词时记$\varnothing\omega=\omega$。对任意两个词$\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$，$\omega'=(\omega'_1,\cdots,\omega'_m)\in\mathcal{A}^n$，等式$\omega=\omega'$成立当且仅当$\omega_i=\omega'_i,1\le i\le n$。对任意$k\in\mathbb{N}$，记$\omega^k=\underbrace{(\omega,\cdots,\omega)}_{k}$，$\omega^0=\varnothing$。需注意，并非所有由字母表$\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$中的数字组成的词都是$x\in(0,1]$中某个数的$\beta$展开，因此需要引入$\beta$-可允许序列的概念。

一个有限词$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$被称为关于基$\beta$是可允许的(admissible)，如果存在一个$x\in(0,1]$，使得$x$的$\beta$展式满足$\varepsilon_1(x,\beta)=\varepsilon_1$，$\cdots$，$\varepsilon_n(x,\beta)=\varepsilon_n$。一个无限数字序列$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,\cdots)$被称为可允许的，如果存在一个$x\in(0,1]$，其$\beta$展式与$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,\cdots)$相同。

令$\sum_\beta^n$表示所有长度为n的β-可允许词的集合，即

$$\sum\nolimits_\beta^n=\left\{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\mathcal{A}^n:\exists\, x\in(0,1],\ \text{s.t.}\ \varepsilon_j(x,\beta)=\varepsilon_j,\ \forall 1\le j\le n\right\}.$$

令$\sum_\beta^*$表示所有有限长度的β-可允许序列的集合，即

$$\sum\nolimits_\beta^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum\nolimits_\beta^n.$$

令$\sum_\beta$表示所有无限的β-可允许序列的集合，即

$$\sum\nolimits_\beta=\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots)\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}:\exists\, x\in(0,1],\ \text{s.t.}\ \varepsilon_j(x,\beta)=\varepsilon_j,\ \forall j\ge 1\right\}.$$

单位 1 的β展式对于研究 1 的轨道的动力学性质以及证明β-可允许词的性质具有重要作用。设

$$\varepsilon(1,\beta)=\left(\varepsilon_1^*,\cdots,\varepsilon_n^*,\cdots\right)$$

为单位 1 的β展式。对于任意整数$n\ge1$，定义

$$\Gamma_n=\Gamma_n(\beta):=\max_{1\le k\le n}\max_{j}\left\{k\ge0:\varepsilon_{k+1}^*=\cdots=\varepsilon_{k+j}^*=0\right\}. \tag{2.1}$$

对一个可允许词$\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$，定义基于$\beta$下的$n$阶基本区间为：$(0,1]$中$\beta$-展开的数字序列前缀与词$\varepsilon$一一对应的点构成的区间，即：

$$I_n(\varepsilon):=I_n(\varepsilon,\beta)=\left\{x\in(0,1]:\varepsilon_j(x,\beta)=\varepsilon_j,1\le j\le n\right\}.$$

事实上，基本区间$I_n(\varepsilon)$是一个左开右闭的区间。Li 和 Wu [16]证明了$|I_n(\varepsilon)|\le\beta^{-n}$，其中$|I_n(\varepsilon)|$代表区间$I_n(\varepsilon)$的长度。记$I_n(x,\beta)=I_n(\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_n(x))$。在不会引起混淆的情况下，本文剩余部分中$I_n(x)$即代表$I_n(x,\beta)$。一个基本区间被称为满区间，如果有$|I_n(\varepsilon)|=\beta^{-n}$。

以下引理将给出满词的相关定理与性质，具体证明可见[17]。

引理 1：设$\beta>1$和任意的整数$n\in\mathbb{N}$，有

1) 对任意$m\in\mathbb{N}^+$，如果$\varepsilon\in\sum_\beta^n$，则$\varepsilon0^m\in\sum_\beta^*$；
2) 对任意$m\in\mathbb{N}^+$，如果ε为满的，则$\varepsilon0^m$也为满的；
3) 词ε为满的，当且仅当对任意$\varepsilon'\in\sum_\beta^*$，连接词$\varepsilon\varepsilon'$为可允许的；
4) 如果词$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon'_n)$为可允许的，且$\varepsilon'_n>0$，则对于任意的$0\le\varepsilon_n<\varepsilon'_n$，词$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n)$为满词；
5) 如果词ε和ε'都为满词，则连接词$\varepsilon\varepsilon'$也为满词；
6) 基本区间$I_{n+\Gamma_n+1}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,0^{\Gamma_n+1})$为满的。

给定$\beta>1$，对每个$x\in(0,1]$和$n\in\mathbb{N}$，令

$$l_n(x)=\min\left\{h\le n:(\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_{h-1}(x),1)\in\sum\nolimits_\beta^h\right\}. \tag{2.2}$$

可以验证，对于每个$n\in\mathbb{N}$，都有$n\le l_n(x)<+\infty$。因为对每个$x\in(0,1]$都存在一个无穷级数展开，且

$l_n(x)$ 随 n 增加非减。此外，由引理 1 (3)可知，对任意 $n\in\mathbb{N}$，词 $\left(\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_{l_n(x)-1}(x),0\right)$ 是满的。特殊地，在本文剩余部分中对任意的 $i\geq 0$ 记 $l_i(x)$ 为 l_i。

3. 定理 1 的证明

剩余集(residual set)是一个拓扑概念，用于描述拓扑空间中“大”的集合。回顾度量空间 X 中，集合 R 称为剩余集，如果其补集可表示为可数个无处稠密集的并集。在完备度量空间中，一个集合是剩余集当且仅当它包含一个稠密的 G_δ 集，因此为证明 $E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)$ 是剩余集，需构造一个集合 $U\in[0,1]$ 满足以下三个条件：

1) $U\in E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)$；
2) U 在 $[0,1]$ 中稠密；
3) U 是一个 G_δ 集。

以下致力于构造一个满足所需条件的集合。

对任意 $x\in(0,1]$ 和 $k\in\mathbb{N}$，设 Γ_k 如(2.1)所定义，令

$$u_k=k+\Gamma_k+1,\quad p_k=\min\left\{n:\varphi(n)\geq\beta^{l_{u_k}}\right\}.$$

由于 $\varphi(n)$ 单调递增，因此 p_k 定义合理。

现定义 $\mathcal{M}_n(x)$ 如下：

$$\mathcal{M}_n(x)=\left\{\omega\in\textstyle\sum_\beta^n:\omega\neq\left(\varepsilon_{i+1}(x),\cdots,\varepsilon_{i+n}(x)\right),0\leq i\leq n-1,\omega\text{ 为满词}\right\}\tag{3.1}$$

对任意 $n\geq 1$，选择一个合适的词 $\omega_n(x)\in\mathcal{M}_n(x)$，令

$$U:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\bigcup_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)\in\sum_\beta^k}\operatorname{int}\left(I_{p_k}\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,0^{\Gamma_k+1},\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_{l_{u_k}-1}(x),0,\omega_{p_k-u_k-l_{u_k}}\right)\right).$$

对任意词 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)\in\sum_\beta^k$，由引理 1(6)可得 $\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,0^{\Gamma_k+1}\right)$ 是满的。由 $l_n(x)$ 如(2.2)所定义得到，词 $\left(\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_{l_{u_k}-1}(x),0\right)$ 是满词，可验证词 $\omega_{p_k-u_k-l_{u_k}}$ 也是满的。由引理 1 (1) (2) (3) (5)说明集合 U 是定义合理的。

注意到集合 $\operatorname{int}\left(I_{|\varepsilon|}(\varepsilon)\right)$ 是一个开集，因此构造的集合 U 是一个 G_δ 集。接下来只需证明 $U\in E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)$ 以及 U 在 $[0,1]$ 中稠密。

引理 2： $U\in E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)$。

证明： 由集合 U 的定义可知，存在无限多个 k 使得 y 的 β-展开的前 p_k 个数字形如：

$$\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,0^{\Gamma_k+1},\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_{l_{u_k}-1}(x),0,\omega_{p_k-u_k-l_{u_k}}\right)$$

即对于某些 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)\in\sum_\beta^k$ 有：$\varepsilon(y,\beta)=\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,0^{\Gamma_k+1},\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_{l_{u_k}-1}(x),0,\omega_{p_k-u_k-l_{u_k}}\right)$。

对任意的 $u_k+l_{u_k}\leq n\leq p_k$ 都有

$$r_x(y,n)=l_{u_k}-1.$$

从而可得

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\varphi(n)}&\geq\lim_{k\to\infty}\frac{l_{u_k}-1}{\varphi\left(u_k+l_{u_k}\right)}\\&\geq\lim_{k\to\infty}\frac{l_{u_k}-1}{u_k+l_{u_k}}\cdot\frac{u_k+l_{u_k}}{\varphi\left(u_k+l_{u_k}\right)}\\&\geq\lim_{k\to\infty}\frac{l_{u_k}-1}{2l_{u_k}}\cdot\frac{u_k+l_{u_k}}{\varphi\left(u_k+l_{u_k}\right)}=+\infty,\end{aligned}$$

其中最后一个等式由条件 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\varphi(n)}=+\infty$ 得到。

且

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{r_x(y,n)}{\varphi(n)}\le\lim_{k\to\infty}\frac{l_{u_k}-1}{\varphi(p_k)}\le\lim_{k\to\infty}\frac{l_{u_k}-1}{\beta^{l_{u_k}}}=0,$$

其中最后一个不等式源于 p_k 的定义。因此，可以证明 $U\in E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)$。

引理 3： U 在 $[0,1]$ 中是稠密的。

证明： 对于任意的 $z\in[0,1]$ 以及 $r>0$，需验证是否存在一个实数 $z'\in U$ 使得 $|z-z'|\le r$ 成立。

假设 $\varepsilon(z,\beta)=(\varepsilon_1(z),\varepsilon_2(z),\cdots)$。令 q 是一个足够大的整数满足 $\beta^{-q}\le r$，且有 $(\varepsilon_1(z),\cdots,\varepsilon_q(z))\in\Sigma_\beta^q$。现令

$$z'\in\operatorname{int}\left(I_{p_q}\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_q,0^{\Gamma q+1},\varepsilon_1(x),\cdots,\varepsilon_{l_{u_q}-1}(x),0,\omega_{p_q-u_q-l_{u_q}}\right)\right),$$

其中 $\omega_{p_q-u_q-l_{u_q}}\in\mathcal{M}_{p_q-u_q-l_{u_q}}(x)$。由于 z 和 z' 的 β-展开有相同的前缀 $(\varepsilon_1(z),\cdots,\varepsilon_q(z))$，因此可以得到

$$|z-z'|\le\beta^{-q}\le r,$$

故集合 U 在 $[0,1]$ 中是稠密的。

综上，证得集合 $E_x^{\varphi(n)}(0,+\infty)$ 在 $[0,1]$ 上是剩余集。

基金项目

国家自然科学基金(12201127)。

参考文献

[1] Rényi, A. (1957) Representations for Real Numbers and Their Ergodic Properties. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **8**, 477-493. https://doi.org/10.1007/bf02020331

[2] Parry, W. (1960) On the β-Expansions of Real Numbers. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **11**, 401-416. https://doi.org/10.1007/bf02020954

[3] Révész, P. (2005) Random Walk in Random and Non-Random Environments. 2nd Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. https://doi.org/10.1142/9789812703361

[4] Erdös, P. and Rényi, A. (1970) On a New Law of Large Numbers. *Journal d'Analyse Mathématique*, **23**, 103-111. https://doi.org/10.1007/bf02795493

[5] Ma, J., Wen, S. and Wen, Z. (2007) Egoroff's Theorem and Maximal Run Length. *Monatshefte für Mathematik*, **151**, 287-292. https://doi.org/10.1007/s00605-007-0455-7

[6] Tong, X., Yu, Y. and Zhao, Y. (2016) On the Maximal Length of Consecutive Zero Digits of β-Expansions. *International Journal of Number Theory*, **12**, 625-633. https://doi.org/10.1142/s1793042116500408

[7] Cao, C. and Chen, Y. (2017) The Run-Length Function of the β-Expansion of the Unit. *Journal of Number Theory*, **177**, 248-262. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.01.015

[8] Hu, H., Tong, X. and Yu, Y. (2016) On Consecutive 0 Digits in the β-Expansion of 1. *Journal of Number Theory*, **166**, 219-234. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2016.02.019

[9] Lü, F. and Wu, J. (2020) Maximal Run-Length Function for Real Numbers in β-Dynamical System. *Nonlinearity*, **33**, 2640-2659. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab7727

[10] Zheng, L. and Wu, M. (2022) RUN-Length Function for Real Numbers in β-Expansions. *Fractals*, **30**, Article ID: 2250033. https://doi.org/10.1142/s0218348x22500335

[11] Albeverio, S., Pratsiovytyi, M. and Torbin, G. (2005) Topological and Fractal Properties of Real Numbers Which Are Not Normal. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **129**, 615-630. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2004.12.004

[12] Baek, I. and Olsen, L. (2010) Baire Category and Extremely Non-Normal Points of Invariant Sets of IFS's. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **27**, 935-943. https://doi.org/10.3934/dcds.2010.27.935

[13] Li, J. and Wu, M. (2016) On Exceptional Sets in Erdős-Rényi Limit Theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **436**, 355-365. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.12.001

[14] Li, J. and Wu, M. (2016) On Exceptional Sets in Erdős-Rényi Limit Theorem Revisited. *Monatshefte für Mathematik*, **182**, 865-875. https://doi.org/10.1007/s00605-016-0977-y

[15] Zheng, L., Wu, M. and Li, B. (2017) The Exceptional Sets on the Run-Length Function of β-Expansions. *Fractals*, **25**, Article ID: 1750060. https://doi.org/10.1142/s0218348x17500608

[16] Li, B. and Wu, J. (2008) β-Expansion and Continued Fraction Expansion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **339**, 1322-1331. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.07.070

[17] Fan, A. and Wang, B. (2012) On the Lengths of Basic Intervals in β Expansions. *Nonlinearity*, **25**, 1329-1343. https://doi.org/10.1088/0951-7715/25/5/1329