

非扩张映射的广义修正两步惯性Mann Halpern 算法

李钱涛

福州大学数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期: 2025年7月12日; 录用日期: 2025年8月5日; 发布日期: 2025年8月14日

摘 要

受广义Krasnoselskii-Mann算法和两步惯性项应用的启发, 本文提出了一种求解非扩张映射不动点问题的广义修正两步惯性Mann Halpern算法。在一定合适的条件下, 本文证明了算法的强收敛性。在数值实验中, 本文将算法用于解决凸可行问题。数值结果表明, 在某些情况下, 该算法更具优势。

关键词

两步惯性, Mann算法, 非扩张映射, 强收敛性

Generalized Modified Two-Step Inertial Mann Halpern Algorithm for Nonexpansive Mappings

Qiantao Li

School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou Fujian

Received: Jul. 12th, 2025; accepted: Aug. 5th, 2025; published: Aug. 14th, 2025

Abstract

Motivated by the application generalized Krasnoselskii-Mann algorithm and two-step inertial extrapolation, this paper proposes a generalized modified two-step inertial Mann Halpern algorithm for solving fixed point problems with nonexpansive mapping. Under mild assumptions, the strong convergence of the proposed method are established. In numerical experiment, a convex feasibility problem is solved. Numerical results demonstrate that our algorithm has advantages in some cases.

Keywords

Two-Step Inertial, Mann Algorithm, Nonexpansive Mapping, Strong Convergence

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $\mathcal{H}$ 是一个实 Hilbert 空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为其内积及诱导的范数. 设 C 是 $\mathcal{H}$ 的一个非空闭凸子集. 映射 $T: C \rightarrow C$ 称为非扩张的, 即

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

集合 $\text{Fix}(T) := \{x \in C \mid T(x) = x\}$ 代表映射 T 的不动点集.

本文我们主要考虑如下不动点问题: 寻找 $x^* \in C$, 使得 $T(x^*) = x^*$, 其中 T 是不动点非空的非扩张映射. 求解非扩张映射不动点问题是优化理论、非线性分析及其在信号处理、机器学习等领域应用中的一个核心课题. 经典的求解不动点的方法有 Picard 迭代算法. 但该算法仅适用于压缩映射, 对于非扩张映射可能不收敛.

一种著名的求解非扩张映射不动点方法是 Krasnoselskii-Mann 迭代[1]-[3](之后简称为 KM 迭代). 选定初始点 $x_0 \in C$, 该迭代更新步骤为:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T(x_n), \quad (1)$$

其中, $\alpha_n \in (0, 1)$, 由(1)所定义的序列 $\{x_n\}$ 在 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = +\infty$ 的条件下弱收敛于 T 的不动点.

基于上述 KM 迭代, Kanzow [4]等人于 2017 年进一步提出了广义 KM 迭代, 给定初始点 $x_0 \in C$, 迭代步骤为:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T(x_n) + e_n, \quad (2)$$

其中, $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1]$, $\alpha_n + \beta_n \leq 1$, $\{e_n\}$ 被称为残差向量. 由(2)定义的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 T 的不动点的充分条件为: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n = +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < +\infty$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha_n - \beta_n) < +\infty$.

Halpern 迭代是另一种求解非扩张映射不动点的有效方法. 它最早于 1967 年由 Halpern [5]提出. 关于 Halpern 迭代进一步的研究见文献[6]-[9]. 基于 KM 迭代和 Halpern 迭代, Kim 和 Xu [10]提出了一种修正 Mann 迭代并证明了该算法的强收敛性. 其主要步骤如下:

$$\begin{cases} y_n = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) T(x_n) \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T(y_n), \end{cases} \quad (3)$$

其中, $u, x_0 \in C$, $\alpha_n, \lambda_n \in (0, 1)$. 该迭代的收敛性条件见文献[10].

一般而言, Mann 迭代的收敛速率是比较慢的. 惯性加速是一种著名的加快收敛速率的方法, 它最早由 Polyak [11]提出. Mainge [12]首次提出了惯性 Mann 算法, 该算法由 KM 迭代和惯性加速结合. 惯性加速也被用于分裂算法中, 例如惯性 Douglas-Rachford 分裂算法[13]和惯性前向后向分裂算法[14]. Tan [15]等人通过引入惯性项改进了算法(3), 提出了一种修正惯性 Mann Halpern 算法, 其迭代形式为:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = \lambda_n w_n + (1 - \lambda_n)T(w_n) \\ x_{n+1} = \theta_n u + (1 - \theta_n)y_n \end{cases} \quad (4)$$

其中, $x_0, x_1, u \in C$, $\lambda_n, \theta_n \in (0, 1)$ 。由算法(4)定义的序列 $\{x_n\}$ 在一定条件下是强收敛的, 具体细节见文献[15]。

除了一步惯性以外, 多步惯性加速也被一些研究者讨论。Iyiola [16]等曾指出一步惯性在某些可行性问题下可能存在加速失败的情况。在文献[16]中, 他们提出了两步惯性临近点算法并证明了算法的弱收敛性。在[16]的数值实验中, 两步惯性临近点算法比一步惯性临近点算法收敛更快。这表明两步惯性的应用是有意义的。两步惯性可表示为:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) + \beta_n(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

其中 $\alpha_n > 0$, $\beta_n < 0$ 。

受 Kanzow [4]和 Iyiola [16]启发, 本文推广了 Tan [15]提出的算法, 提出了广义修正两步惯性 Mann Halpern 算法:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) + \beta_n(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ y_n = u_n w_n + v_n T(w_n) + e_n \\ x_{n+1} = \theta_n u + (1 - \theta_n)y_n \end{cases} \quad (5)$$

其中, $x_0, x_1, x_2, u \in C$, $\alpha_n, u_n, v_n, e_n, \theta_n \in (0, 1)$, $\beta_n \in (-1, 0]$ 且 $u_n + v_n \leq 1$ 。算法(5)在算法(4)的基础上添加了两步惯性项并推广了 Mann 迭代步的系数, 在取值上更为灵活。

本文的结构如下: 在第二节, 我们会给出一些证明定理所用到的引理。在第三节, 我们将证明在一定条件下广义修正两步惯性 Mann Halpern 算法的强收敛性。在第四节, 我们将用算法(4)和算法(5)去求解凸可行问题并比较它们的表现。

本文中, 序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^* 记为 $x_n \rightarrow x^*$, 序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x^* 记为 $x_n \rightharpoonup x^*$ 。本文中, 均假设 T 是非扩张的且 $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ 。符号 $\Pi_C(x)$ 表示实 Hilbert 空间中 x 在集合 C 上的投影, 即 $\Pi_C(x) := \arg \min_{y \in C} \|x - y\|$ 。

2. 预备知识

本节将给出一些后续证明所需要的引理。

引理 1. $\forall x, y \in \mathcal{H}$, 有以下事实:

- 1) $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle$;
- 2) $\|sx + ty\|^2 = s(s+t)\|x\|^2 + t(s+t)\|y\|^2 - st\|x - y\|^2$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$;
- 3) $\|x + y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ 。

引理 2. [17] 设 C 是实 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的一个非空闭凸集, $T: C \rightarrow C$ 是一个非扩张映射, $x^* \in \mathcal{H}$ 。 C 中的序列 $\{x_n\}$ 满足 $n \rightarrow +\infty$ 时, $x_n \rightharpoonup x^*$ 且 $T(x_n) - x_n \rightarrow 0$, 则 $x^* \in \text{Fix}(T)$ 。

引理 3. [14] 设 $\{b_n\}$ 是非负实序列且满足:

$$b_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)b_n + \gamma_n \delta_n \text{ 及 } b_{n+1} \leq b_n - t_n + q_n,$$

其中, $\{\gamma_n\}$ 是 $(0, 1)$ 的序列, $\{t_n\}$ 是非负实序列。若实序列 $\{\delta_n\}$, $\{q_n\}$ 满足以下三个条件:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty$,

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0,$$

$$3) \{t_n\} \text{ 的任意子序列 } \{t_{n_k}\} \text{ 满足 } \lim_{k \rightarrow +\infty} t_{n_k} = 0 \text{ 蕴含 } \limsup_{k \rightarrow +\infty} \delta_{n_k} \leq 0.$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

3. 算法及收敛性分析

本节将分析在一定条件下广义修正两步惯性 Mann Halpern 算法的强收敛性。我们再给出广义修正两步惯性 Mann Halpern 算法的迭代步骤:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) + \beta_n(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ y_n = u_n w_n + v_n T(w_n) + e_n \\ x_{n+1} = \theta_n u + (1 - \theta_n) y_n \end{cases} \quad (6)$$

定理 3.1: 设 C 是实 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的一个非空闭凸集, $T: C \rightarrow C$ 是一个非扩张映射且 T 至少有一个不动点。取 $u \in C$, 序列 $\alpha_n, u_n, v_n, e_n, \theta_n \in (0, 1), \beta_n \in (-1, 0]$ 且 $u_n + v_n \leq 1$ 。若下述条件成立:

$$(C_1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0, \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n = +\infty,$$

$$(C_2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\|}{\theta_n} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n \|x_{n-1} - x_{n-2}\|}{\theta_n} = 0,$$

$$(C_3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - u_n - v_n}{\theta_n} = 0, \sum_{n=0}^{\infty} (1 - u_n - v_n) < +\infty \text{ 且 } \inf_{n \geq 1} u_n > 0, \inf_{n \geq 1} v_n > 0,$$

$$(C_4) \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|e_n\|}{\theta_n} = 0.$$

对于 $x_0, x_1, x_2 \in C$ 。由算法(6)生成的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $p = \Pi_{\text{Fix}(T)}(u)$ 。

证明: 我们先证明 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{w_n\}, \{T(w_n)\}$ 有界。取 $p \in \text{Fix}(T)$, 则

$$\|x_{n+1} - p\| = \|\theta_n(u - p) + (1 - \theta_n)(y_n - p)\| \leq \theta_n \|u - p\| + (1 - \theta_n) \|y_n - p\|. \quad (7)$$

由(7)得,

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|u_n(w_n - p) + v_n(T(w_n) - p) + e_n - (1 - u_n - v_n)p\| \\ &\leq u_n \|w_n - p\| + v_n \|T(w_n) - p\| + \|e_n - (1 - u_n - v_n)p\| \\ &\leq \|w_n - p\| + (1 - u_n - v_n) \|e_n - p\| + (u_n + v_n) \|e_n\| \end{aligned} \quad (8)$$

第二个不等式成立是因为 T 是非扩张的且 $u_n + v_n \leq 1$ 。除此之外,

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \|x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) + \beta_n(x_{n-1} - x_{n-2}) - p\| \\ &\leq \|x_n - p\| + \alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n| \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \end{aligned} \quad (9)$$

将(8)和(9)代入(7)式得到,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \theta_n) \|x_n - p\| + \theta_n \left(\|u - p\| + \frac{\alpha_n}{\theta_n} (1 - \theta_n) \|x_n - x_{n-1}\| + \frac{|\beta_n|}{\theta_n} (1 - \theta_n) \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \right) \\ &\quad + (1 - \theta_n) (1 - u_n - v_n) \|e_n - p\| + (1 - \theta_n) (u_n + v_n) \|e_n\| \end{aligned}$$

由条件(C₂), 我们可以推得 $\sup_{n \geq 0} \left\{ \frac{\alpha_n}{\theta_n} (1 - \theta_n) \|x_n - x_{n-1}\| + \frac{|\beta_n|}{\theta_n} (1 - \theta_n) \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \right\}$ 可以足够小, 设

$$M = 2 \max \left\{ \|u - p\|, \sup_{n \geq 0} \left\{ \frac{\alpha_n}{\theta_n} (1 - \theta_n) \|x_n - x_{n-1}\| + \frac{|\beta_n|}{\theta_n} (1 - \theta_n) \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \right\} \right\},$$

则 $M < +\infty$ 。又由于 $u_n + v_n \leq 1$ ，我们得到，

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \theta_n) \|x_n - p\| + \theta_n M + (1 - u_n - v_n) \|e_n - p\| + \|e_n\| \\ &\leq \max \{ \|x_n - p\|, M \} + (1 - u_n - v_n) \|e_n - p\| + \|e_n\| \end{aligned}$$

进而，

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \dots \leq \max \{ \|x_0 - p\|, M \} + \sum_{i=0}^n (1 - u_i - v_i) \|e_i - p\| + \sum_{i=0}^n \|e_i\|.$$

结合条件(C₃)和条件(C₄)可得，

$$\sum_{i=0}^n (1 - u_i - v_i) \|e_i - p\| \leq \sum_{i=0}^n (1 - u_i - v_i) (\|e_i\| + \|p\|) < +\infty.$$

则 $\{x_n - p\}, \{x_n\}$ 有界。又由于，

$$\begin{aligned} \|w_n\| &= \|x_n + \alpha_n (x_n - x_{n-1}) + \beta_n (x_{n-1} - x_{n-2})\| \\ &\leq \|x_n\| + \alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n| \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \end{aligned}$$

结合条件(C₁)和条件(C₂)，可以推得 $\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\|$ 是有限的。类似地， $\beta_n \|x_{n-1} - x_{n-2}\|$ 也是有限的，从而 $\{w_n\}, \{w_n - p\}$ 是有界的。 T 是非扩张的，则 $\|T(w_n) - p\| \leq \|w_n - p\|$ ，这说明 $\{T(w_n)\}, \{y_n\}$ 是有界的。

接下来，我们将证明 $\{x_n\}$ 强收敛于 $p = \Pi_{\text{Fix}(T)}(u)$ 。由 x_n 的定义及引理 1(1) 可得，

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|(1 - \theta_n)(y_n - p) + \theta_n(u - p)\|^2 \\ &\leq (1 - \theta_n)^2 \|y_n - p\|^2 + 2\langle \theta_n(u - p), x_{n+1} - p \rangle \\ &\leq (1 - \theta_n) \|y_n - p\|^2 + 2\theta_n \langle (u - p), x_{n+1} - p \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

再由 y_n 的定义及引理 1(1)，(2) 可知，

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|^2 &= \|u_n(w_n - p) + v_n(T(w_n) - p) + e_n - (1 - u_n - v_n)p\|^2 \\ &\leq \|u_n(w_n - p) + v_n(T(w_n) - p)\|^2 + 2\langle (u_n + v_n - 1)p + e_n, y_n - p \rangle \\ &= u_n(u_n + v_n) \|w_n - p\|^2 + v_n(u_n + v_n) \|T(w_n) - p\|^2 - u_n v_n \|w_n - T(w_n)\|^2 \\ &\quad + 2(u_n + v_n - 1) \langle p, y_n - p \rangle + 2\langle e_n, y_n - p \rangle \\ &\leq \|w_n - p\|^2 - u_n v_n \|w_n - T(w_n)\|^2 + 2(u_n + v_n - 1) \langle p, y_n - p \rangle + 2\langle e_n, y_n - p \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式中的第二个不等式是因为 T 是非扩张且 $u_n + v_n \leq 1$ 。为方便讨论，我们记

$$\phi_n := 2(u_n + v_n - 1) \langle p, y_n - p \rangle + 2\langle e_n, y_n - p \rangle.$$

由 w_n 的定义知，

$$\begin{aligned} \|w_n - p\|^2 &= \|x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) + \beta_n(x_{n-1} - x_{n-2}) - p\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 + \|\alpha_n(x_n - x_{n-1}) + \beta_n(x_{n-1} - x_{n-2})\|^2 + 2\langle \alpha_n(x_n - x_{n-1}) + \beta_n(x_{n-1} - x_{n-2}), x_n - p \rangle \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + 2\alpha_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2\beta_n^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\|^2 + 2\langle w_n - x_n, x_n - p \rangle \\ &\quad \|x_n - p\|^2 + 2\|w_n - x_n\|^2 - 4\alpha_n \beta_n \langle x_n - x_{n-1}, x_{n-1} - x_{n-2} \rangle + 2\langle w_n - x_n, x_n - p \rangle \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + 2\langle w_n - x_n, w_n - p \rangle - 4\alpha_n \beta_n \|x_n - x_{n-1}\| \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + 2\|w_n - p\|(\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n| \|x_{n-1} - x_{n-2}\|) - 4\alpha_n \beta_n \|x_n - x_{n-1}\| \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \end{aligned} \quad (12)$$

第一个和第二个不等式分别由引理 1 (3) 和 Cauchy-Schwarz 不等式得到。注意到 $\beta_n < 0$ ，将等式(11)和(12)代入(10)可得，

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \theta_n) \|x_n - p\|^2 + 2(1 - \theta_n) \|w_n - p\| (\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n| \|x_{n-1} - x_{n-2}\|) \\ &\quad - 4\alpha_n \beta_n (1 - \theta_n) \|x_n - x_{n-1}\| \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + 2\theta_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle \\ &\quad - (1 - \theta_n) u_n v_n \|w_n - T(w_n)\|^2 + (1 - \theta_n) \phi_n \end{aligned} \quad (13)$$

又因为 $\theta_n, \lambda_n \subset (0, 1)$ ，可以进一步得到

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \theta_n) \|x_n - p\|^2 + 2\|w_n - p\| (\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n| \|x_{n-1} - x_{n-2}\|) \\ &\quad - 4\alpha_n \beta_n \|x_n - x_{n-1}\| \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + 2\theta_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle + (1 - \theta_n) \phi_n \end{aligned} \quad (14)$$

以及

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 + 2\|w_n - p\| (\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n| \|x_{n-1} - x_{n-2}\|) - 4\alpha_n \beta_n \|x_n - x_{n-1}\| \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\quad + 2\theta_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle - (1 - \theta_n) u_n v_n \|w_n - T(w_n)\|^2 + (1 - \theta_n) \phi_n \end{aligned} \quad (15)$$

令 $b_n = \|x_n - p\|^2$, $\gamma_n = \theta_n$, $t_n = (1 - \theta_n) u_n v_n \|w_n - T(w_n)\|^2$,

$$\begin{aligned} q_n &= 2\|w_n - p\| (\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n| \|x_{n-1} - x_{n-2}\|) - 4\alpha_n \beta_n \|x_n - x_{n-1}\| \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\quad + 2\theta_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle + (1 - \theta_n) \phi_n \end{aligned}$$

$$\delta_n = \theta_n q_n,$$

因为

$$0 \leq |2\theta_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle| \leq 2\theta_n \|u - p\| \cdot \|x_{n+1} - p\|,$$

$$\|\phi_n\| \leq 2|u_n + v_n - 1| \cdot \|p\| \cdot \|y_n - p\| + 2\|e_n\| \cdot \|y_n - p\|,$$

且 $\{x_n - p\}, \{y_n - p\}, \{w_n - p\}$ 有界，结合条件(C1), (C2), (C3), (C4)可以得到，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0.$$

从而，引理 3 的前两个条件满足。只需证明 $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_{n_k} = 0$ 蕴含 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \delta_{n_k} \leq 0$ ， $\{t_{n_k}\}$ 为 $\{t_n\}$ 的任意子序列。

取 $\{t_n\}$ 的一个子序列 $\{t_{n_k}\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_{n_k} = 0$ 。由条件(C3)可知，

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|w_{n_k} - T(w_{n_k})\| = 0. \quad (16)$$

由条件(C2)，取 $k \rightarrow +\infty$ ，有

$$\begin{aligned} \|w_{n_k} - x_{n_k}\| &= \|x_{n_k} + \alpha_{n_k} (x_{n_k} - x_{n_k-1}) + \beta_{n_k} (x_{n_k-1} - x_{n_k-2}) - x_{n_k}\| \\ &\leq \alpha_{n_k} \|x_{n_k} - x_{n_k-1}\| + |\beta_{n_k}| \|x_{n_k-1} - x_{n_k-2}\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (17)$$

因为 $\{x_{n_k}\}$ 有界，则存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子序列 $\{x_{n_{k_l}}\}$ 满足

$$x_{n_{k_l}} \rightharpoonup x^* (l \rightarrow +\infty) \text{ 且 } \limsup_{k \rightarrow +\infty} \langle u - p, x_{n_k} - p \rangle = \lim_{l \rightarrow +\infty} \langle u - p, x_{n_{k_l}} - p \rangle.$$

由(17)可知 $w_{n_{k_l}} \rightarrow x^* (l \rightarrow +\infty)$ 。结合(16)及引理 2 可推得 $x^* \in \text{Fix}(T)$ 。再由 $p = \Pi_{\text{Fix}(T)}(u)$ 及投影的性质可得 $\langle u - p, x^* - p \rangle \leq 0$ ，这意味着

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \langle u - p, x_{n_k} - p \rangle = \lim_{l \rightarrow +\infty} \langle u - p, x_{n_{kl}} - p \rangle = \langle u - p, x^* - p \rangle \leq 0. \quad (18)$$

除此以外,

$$\begin{aligned} \|y_{n_k} - w_{n_k}\| &= \|v_{n_k} (T(w_{n_k}) - w_{n_k}) + (u_{n_k} + v_{n_k} - 1)w_{n_k} + e_{n_k}\| \\ &\leq v_{n_k} \|T(w_{n_k}) - w_{n_k}\| + (1 - u_{n_k} - v_{n_k})\|w_{n_k}\| + \|e_{n_k}\| \end{aligned}$$

由(16), 条件(C₃), (C₄), 可以推得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|y_{n_k} - w_{n_k}\| = 0$ 。结合(18)可知, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|y_{n_k} - x_{n_k}\| = 0$ 。因为,

$$\|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| \leq \theta_{n_k} \|u - x_{n_k}\| + (1 - \theta_{n_k}) \|y_{n_k} - x_{n_k}\|,$$

于是 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| = 0$, 这说明

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \langle u - p, x_{n_k+1} - p \rangle \leq 0.$$

再由条件(C₃), (C₄)可得,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1 - \theta_{n_k}}{\theta_{n_k}} \phi_{n_k} \right\| \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2(1 - u_{n_k} - v_{n_k})}{\theta_{n_k}} \|p\| \|y_{n_k} - p\| + 2 \frac{\|e_{n_k}\|}{\theta_{n_k}} \|y_{n_k} - p\| = 0.$$

所以, $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \delta_{n_k} \leq 0$ 。由引理 3 可得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, 所以序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^* 。

4. 数值实验

本节我们将用算法(4)和算法(5)求解凸可行问题并比较它们的表现, 所有实验均用 Matlab2020a 编写, 程序运行环境为 Lenovo 笔记本电脑, CPU 型号为 Inter (R) Core(TM) i5-10200H CPU@2.40 GHz, 运行内存为 16.00GB RAM。

下面简述凸可行问题[18]。给定一组非空闭凸集 $C_i \subset \mathbb{R}^n$ ($i = 0, 1, \dots, m$), 凸可行问题是指: 寻找

$$x^* \in C := \bigcap_{i=0}^m C_i \quad (19)$$

其中 $C \neq \emptyset$, 定义映射 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$T := P_0 \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_i \right) \quad (20)$$

其中, $P_i = P_{C_i}$ ($i = 0, 1, \dots, m$) 代表 C_i 上的度量投影。由于 P_i ($i = 0, 1, \dots, m$) 是非扩张的, 可以推得 T 是非扩张的且

$$\text{Fix}(T) = \text{Fix}(P_0) \cap \bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(P_i) = C_0 \cap \bigcap_{i=1}^m C_i = C.$$

对于凸可行问题(19)而言, 一种经典的解法就是求解由(20)定义的映射 T 的不动点[19]。

在这节实验中, 我们设 C_i 是一个闭球, 其球心为 c_i ($c_i \in \mathbb{R}^n$), 半径为 r_i ($r_i > 0$)。于是, C_i 的度量投影为:

$$P_i(x) := \begin{cases} c_i + \frac{r_i}{\|c_i - x\|} (x - c_i) & \text{if } \|c_i - x\| > r_i, \\ x & \text{if } \|c_i - x\| \leq r_i. \end{cases}$$

令 $v_0 = [10, 10, \dots, 10]$, 取 $r_i = 1 (i = 0, 1, \dots, m)$, $c_0 = v_0$, $c_1 = v_0 + [1, 0, \dots, 0]$, $c_2 = v_0 + [-1, 0, \dots, 0]$, 剩余的 $c_i = v_0 + d_i (i = 3, 4, \dots, m)$, $d_i \in (-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n})^n$, 即 d_i 的每个分量按均匀分布随机得取于 $(-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n})$ 。从上述的选择, 我们可以推得 $\text{Fix}(T) = \{v_0\}$ 。

下面给出算法(4) (记作 MIMHA)和算法(5) (记作 G2IMMH)实验参数的选择和停止准则的设置。

实验参数的选择: G2IMMH 参数选取为,

$$u_n = 0.1 - \frac{1}{(n+3)^2}, \quad v_n = 0.9 - \frac{1}{(n+3)^2}, \quad \theta_n = \frac{1}{10000n}, \quad e_n = 0,$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n+2}, & x_n = x_{n-1} \\ \frac{10}{(n^2+1)\|x_n - x_{n-1}\|}, & x_n \neq x_{n-1} \end{cases}, \quad \beta_n = \begin{cases} 0, & x_{n-1} = x_{n-2} \\ \frac{-0.2}{(n^2+1)\|x_{n-1} - x_{n-2}\|}, & x_{n-1} \neq x_{n-2} \end{cases}, \quad u = x_3.$$

MIMHA 的参数选取为, $\lambda_n = 0.1$ 。 θ_n, α_n, u 同 G2IMMH。

输入和停止准则设置: 初始值 x_1, x_2, x_3 是服从 $(0, 1)$ 均匀分布的随机向量。MIMHA 的初始值设为 x_2, x_3 。G2IMMH 的初始值设为: x_1, x_2, x_3 。定义 $\text{Err} := \|x_n - v_0\|_\infty$, 设 $\tau = 0.005$ 。停止准则设为:

$$\text{Err} < \tau.$$

在实验中, 我们记凸集个数和向量空间的维数为 $(m; n) = (50k; 50k) (k = 1, 2, \dots, 10)$, 一共进行十组实验, 每组实验重复 5 次再取平均值。

表 1 为 10 组数据的结果。表 1 中, Iter 表示迭代次数, CPU 运行时间的单位为秒。图 1 是 $n = 100$, $m = 100$ 情况下的误差图像, 图中 Proposed 代表本文提出的算法 G2IMMH。从表 1 和图 1 中, 我们可以看出 G2IMMH 能有效求解凸可行问题且它的迭代次数和 CPU 运行时间比 MIMHA 更少, 这说明 G2IMMH 在一定的情况下比 MIMHA 更有优势。

Table 1. Experimental results in different dimensions

表 1. 不同维度下的实验数据

$(m; n)$	MIMHA		G2IMMH	
	Iter	CPU Time	Iter	CPU Time
(50; 50)	111,948	4.45	37,337	1.49
(100; 100)	165,173	13.00	37,666	2.98
(150; 150)	183,481	22.61	38,362	4.75
(200; 200)	205,149	35.49	38,381	6.67
(250; 250)	198,346	45.26	38,858	8.86
(300; 300)	219,213	59.27	39,196	10.54
(350; 350)	253,986	84.40	39,067	12.82
(400; 400)	224,138	90.07	39,124	16.01
(450; 450)	199,758	97.63	39,175	19.17
(500; 500)	216,043	117.64	39,584	22.65

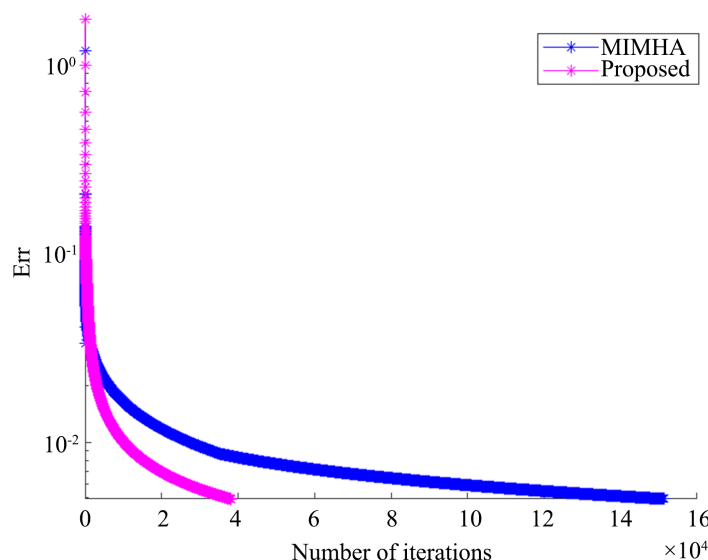


Figure 1. Graph of error under the condition that $n=100$ and $m=100$

图 1. $n=100$, $m=100$ 时的误差图像

5. 总结

本文提出了一种广义修正两步惯性 Mann Halpern 算法并在合适的条件下证明了它的收敛性。在求解凸可行问题的数值实验中, 和文献[15]中的算法进行了比较, 实验结果表明本文提出的算法在解决该实验问题中更有优势。在未来的研究中, 我们还会将该算法运用到 Douglas-Rachford 分裂算法中并用于求解一些实际问题, 比如图像处理, 矩阵优化及机器学习等。我们也将进一步研究该算法的收敛速率。

参考文献

- [1] Krasnoselskii, M.A. (1955) Two Remarks on the Method of Successive Approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **10**, 123-127.
- [2] Mann, W.R. (1953) Mean Value Methods in Iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **4**, 506-510. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1953-0054846-3>
- [3] Reich, S. (1979) Weak Convergence Theorems for Nonexpansive Mappings in Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **67**, 274-276. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(79\)90024-6](https://doi.org/10.1016/0022-247x(79)90024-6)
- [4] Kanzow, C. and Shehu, Y. (2017) Generalized Krasnoselskii-Mann-Type Iterations for Nonexpansive Mappings in Hilbert Spaces. *Computational Optimization and Applications*, **67**, 595-620. <https://doi.org/10.1007/s10589-017-9902-0>
- [5] Halpern, B. (1967) Fixed Points of Nonexpanding Maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 957-961. <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1967-11864-0>
- [6] Wittmann, R. (1992) Approximation of Fixed Points of Nonexpansive Mappings. *Archiv der Mathematik*, **58**, 486-491. <https://doi.org/10.1007/bf01190119>
- [7] Song, Y. (2008) A New Sufficient Condition for the Strong Convergence of Halpern Type Iterations. *Applied Mathematics and Computation*, **198**, 721-728. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.09.010>
- [8] Chuang, C., Lin, L. and Takahashi, W. (2012) Halpern's Type Iterations with Perturbations in Hilbert Spaces: Equilibrium Solutions and Fixed Points. *Journal of Global Optimization*, **56**, 1591-1601. <https://doi.org/10.1007/s10898-012-9911-6>
- [9] Lieder, F. (2020) On the Convergence Rate of the Halpern-Iteration. *Optimization Letters*, **15**, 405-418. <https://doi.org/10.1007/s11590-020-01617-9>
- [10] Kim, T. and Xu, H. (2005) Strong Convergence of Modified Mann Iterations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **61**, 51-60. <https://doi.org/10.1016/j.na.2004.11.011>
- [11] Polyak, B.T. (1964) Some Methods of Speeding up the Convergence of Iteration Methods. *USSR Computational*

-
- Mathematics and Mathematical Physics*, **4**, 1-17. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90137-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90137-5)
- [12] Maingé, P. (2008) Convergence Theorems for Inertial Km-Type Algorithms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **219**, 223-236. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.07.021>
 - [13] Boţ, R.I., Csetnek, E.R. and Hendrich, C. (2015) Inertial Douglas-Rachford Splitting for Monotone Inclusion Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **256**, 472-487. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.01.017>
 - [14] Cholakjiak, W., Cholakjiak, P. and Suantai, S. (2018) An Inertial Forward-Backward Splitting Method for Solving Inclusion Problems in Hilbert Spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **20**, Article No. 42. <https://doi.org/10.1007/s11784-018-0526-5>
 - [15] Tan, B., Zhou, Z. and Li, S. (2020) Strong Convergence of Modified Inertial Mann Algorithms for Nonexpansive Mappings. *Mathematics*, **8**, Article 462. <https://doi.org/10.3390/math8040462>
 - [16] Iyiola, O.S. and Shehu, Y. (2022) Convergence Results of Two-Step Inertial Proximal Point Algorithm. *Applied Numerical Mathematics*, **182**, 57-75. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.07.013>
 - [17] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L. (2017) *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer.
 - [18] Dong, Q.L., Yuan, H.B., Cho, Y.J. and Rassias, T.M. (2016) Modified Inertial Mann Algorithm and Inertial CQ-Algorithm for Nonexpansive Mappings. *Optimization Letters*, **12**, 87-102. <https://doi.org/10.1007/s11590-016-1102-9>
 - [19] Bauschke, H.H. and Borwein, J.M. (1996) On Projection Algorithms for Solving Convex Feasibility Problems. *SIAM Review*, **38**, 367-426. <https://doi.org/10.1137/s0036144593251710>