

基于独立集与匹配数的几乎完全网络熵的度量

邓 赫

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2025年7月8日; 录用日期: 2025年8月1日; 发布日期: 2025年8月12日

摘 要

为探究边稠密网络的结构复杂性, 本文选取基于独立集与匹配数的图熵, 在前人探究了完全网络删除至多1条边的基础上, 我们延续了他们的工作, 研究了完全网络删除至多5条边所得到的几乎完全网络的所有情况, 并根据删边数量分类讨论找到了这两类图熵的极值, 最后通过数值模拟的方法进行了验证。

关键词

图熵, 几乎完全网络, 独立集, 匹配数

A Measure of Almost Complete Network Entropy Based on Independent Sets and Matching

He Deng

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining Qinghai

Received: Jul. 8th, 2025; accepted: Aug. 1st, 2025; published: Aug. 12th, 2025

Abstract

To explore the structural complexity of edge-dense networks, this paper selects graph entropy based on independent sets and matching numbers. Based on the previous research on deleting at most one edge from a complete network, we continue their work and study all situations of almost complete networks obtained by deleting at most five edges from a complete network. We also discuss and classify them according to the number of deleted edges and find the extreme values of these two types of graph entropy, which are finally verified through numerical simulation.

Keywords

Graph Entropy, Almost Complete Networks, Independent Set, Matching



1. 引言

在当今社会中, 复杂网络随处可见。它的复杂性取决于组成该网络的组件之间的相互作用而导致的系列集体特性的涌现, 如何有效度量是目前现代科学的重要挑战之一。Boltzmann [1]最早使用了“信息”的概念, Shannon [2]推广了 Boltzmann 的熵公式, 定义了信息熵。早在 20 世纪 50 年代末, Rashevsky [3]和 Mowshowitz [4]在研究信息测度的数学性质时就提出了将熵解释为图结构信息内容, 后来基于香农熵的经典图熵[2]被用作图复杂度的度量。由于大多数度量都是非常相似的, 所以图熵被应用于各个学科上, 例如金融分析、交通导航、地质勘探、图像分类等[5]-[9]。因此以图作为工具对复杂网络建模, 进而研究这个图的拓扑结构复杂性就非常重要。目前有许多度量图和网络复杂性的方法, 其中基于信息论及熵的度量应用最广泛[10]。

事实上, 图不变量是构建图熵度量的关键因素[11]-[13]。一些图不变量, 已经被用来定义图熵测度, 例如曹淑娟等人[14]引入的顶点度幂熵 $I_{deg}(G)$, 需要计算图中每个顶点的度; Bonchev 等人提出的“基于量级”的信息度量[15], 需要计算距离矩阵的维纳数和特征多项式的最大特征值; 基于图的拉普拉斯矩阵的冯·诺依曼熵[16]需要计算矩阵的特征值和特征向量; 基于图的闭途径数目的游走熵[17]需要计算邻域矩阵指标的对角线元素和非对角线元素之和; 基于信息函数的参数图熵[18]利用局部顶点函数计算每个顶点的概率值来量化结构信息等。据我们所知, Dehmer 等人[19] [20]是较早研究图熵问题的人, 基于度量性质和其他图不变量定义了各种信息泛函[21]-[24]。因此本文采用的方法是基于 Dehmer 的信息泛函来研究图熵的测度。

然而, 尽管有如此多的熵可以度量网络的结构信息, 但还是无法全面系统的表示网络的复杂性, 因为不同的熵可能具有完全不同的性质, 即还不存在对各种图熵度量上的这些属性的详尽研究。本篇文章使用基于独立集与匹配数的熵来研究完全网络在点保持不变的情况下, 删掉至多 5 条边后得到的所有几乎完全网络, 分别对删除相同数量边的所有网络计算两种熵, 找到两类熵的极值, 总结规律得出结论, 最后用数值模拟的方法去验证结果。

2. 预备知识

定义 2.1: (Dehmer 等[18])设 G 为图, $f: T \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是定义在 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 上的信息泛函, 其中 T 是图 G 的元素集合, 图 G 的熵定义为:

$$\begin{aligned} I_f(G) &= -\sum_{i=1}^k \frac{f(t_i)}{\sum_{j=1}^k f(t_j)} \log \left(\frac{f(t_i)}{\sum_{j=1}^k f(t_j)} \right) \\ &= \log \left(\sum_{i=1}^k f(t_i) \right) - \frac{\sum_{i=1}^k f(t_i) \log(f(t_i))}{\sum_{j=1}^k f(t_j)} \end{aligned} \quad (1)$$

其中“log”表示以 2 为底的对数。

设 $G=(V, E)$ 是简单连通图, 我们用 n 表示顶点的数目, 用 m 表示边的数目。对于图 $G=(V, E)$, 如果点集合 P 中的两个顶点在 G 中不相邻, 则称子集 $P \subseteq V$ 是独立的, P 又叫做 G 的独立集, 用 $i_k(G)$ 表示 G 中大小为 k 的独立集的个数, 因为空集也被看做是一个独立集, 所以 $i_0(G)=1$ 。用 $\sigma(G)$ 表示 G 中

独立集的总个数, 可以表达为 $\sigma(G) = \sum_{k=0}^n i_k(G)$ 。而且在数学化学中, 它还被称为 Merrifield-Simmons 指数或 σ -指数, 是拓扑指标中数学性质研究较为详细的指标之一, 用于量化分子结构的相关性质。

定义 2.2: 设 G 是一个有 n 个顶点的图。我们用 $f := i_k(G)$ 定义信息泛函, 其中 $i_k(G)$ 表示 G 中大小为 k 的独立集的个数, 基于 G 的独立集数或 NIS 熵, 用 $I_{nis}(G)$ 表示, 定义为

$$\begin{aligned} I_{nis}(G) &= -\sum_{k=0}^n \frac{i_k(G)}{\sigma(G)} \log\left(\frac{i_k(G)}{\sigma(G)}\right) \\ &= \log(\sigma(G)) - \frac{1}{\sigma(G)} \sum_{k=0}^n i_k(G) \cdot \log(i_k(G)) \end{aligned} \quad (2)$$

设 $G=(V, E)$ 是简单连通图, 如果边集合 Q 中的两条边在 G 中没有交点, 则称子集 $Q \subseteq E$ 是匹配的, Q 又叫做 G 的匹配数, 用 $z_k(G)$ 表示 G 中大小为 k 的匹配的个数, 因为空集也被看做是一个匹配数, 所以 $z_0(G)=1$ 。用 $Z(G)$ 表示 G 中独立集的总个数, 可以表达为 $Z(G) = \sum_{k=0}^n i_k(G)$ 。在文献[25] [26]中, $Z(G)$ 称为 Hosoya 指数或 Z -指数, 是 Merrifield-Simmons 指数的边形式, 可以作为研究烷烃各种理化性质的指标。

定义 2.3: 设 G 是一个有 m 条边的图。我们用 $f := z_k(G)$ 定义信息泛函, 其中 $z_k(G)$ 表示 G 中大小为 k 的匹配的个数, 基于 G 的匹配数或 NM 熵, 用 $I_{nm}(G)$ 表示, 定义为

$$\begin{aligned} I_{nm}(G) &= -\sum_{k=0}^n \frac{z_k(G)}{Z(G)} \log\left(\frac{z_k(G)}{Z(G)}\right) \\ &= \log(Z(G)) - \frac{1}{Z(G)} \sum_{k=0}^n z_k(G) \cdot \log(z_k(G)) \end{aligned} \quad (3)$$

这两种图熵度量是曹淑娟等人[27]在论文中介绍的。对于完全图和删除一条边得到的几乎完全图, 我们有如下引理。

引理 2.4: 设 K_n 是 n 个顶点的完全图, 则

$$I_{nis}(K_n) = \log(n+1) - \frac{n \log n}{n+1} \quad (4)$$

和

$$I_{nm}(K_n) = \log(Z(K_n)) - \frac{\binom{n}{2} \log\left(\binom{n}{2}\right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(K_n)) \log(z_k(K_n))}{Z(K_n)} \quad (5)$$

其中 $Z(K_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2}$ 和 $z_k(K_n) = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2}$ 。

引理 1.5: (万鹏飞等[28]) 设 G 是由 K_n 删除一条边后得到的图, 则

$$I_{nis}(G) = \log(n+2) - \frac{n \log n}{n+2} \quad (6)$$

和

$$I_{nm}(G) = \log(Z(G)) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 1\right) \log\left(\binom{n}{2} - 1\right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G)) \log(z_k(G))}{Z(G)} \quad (7)$$

其中 $Z(G) = \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G)$ 和 $z_k(G) = \frac{(n-2)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)}{2k} - 1 \right)$ 。

下一章我们将使用这两类图熵对几乎完全网络进行研究, 吴廷增等人[29]给出了完全图 K_n 删除至多 5 条边的所有可能情况, 见图 1。

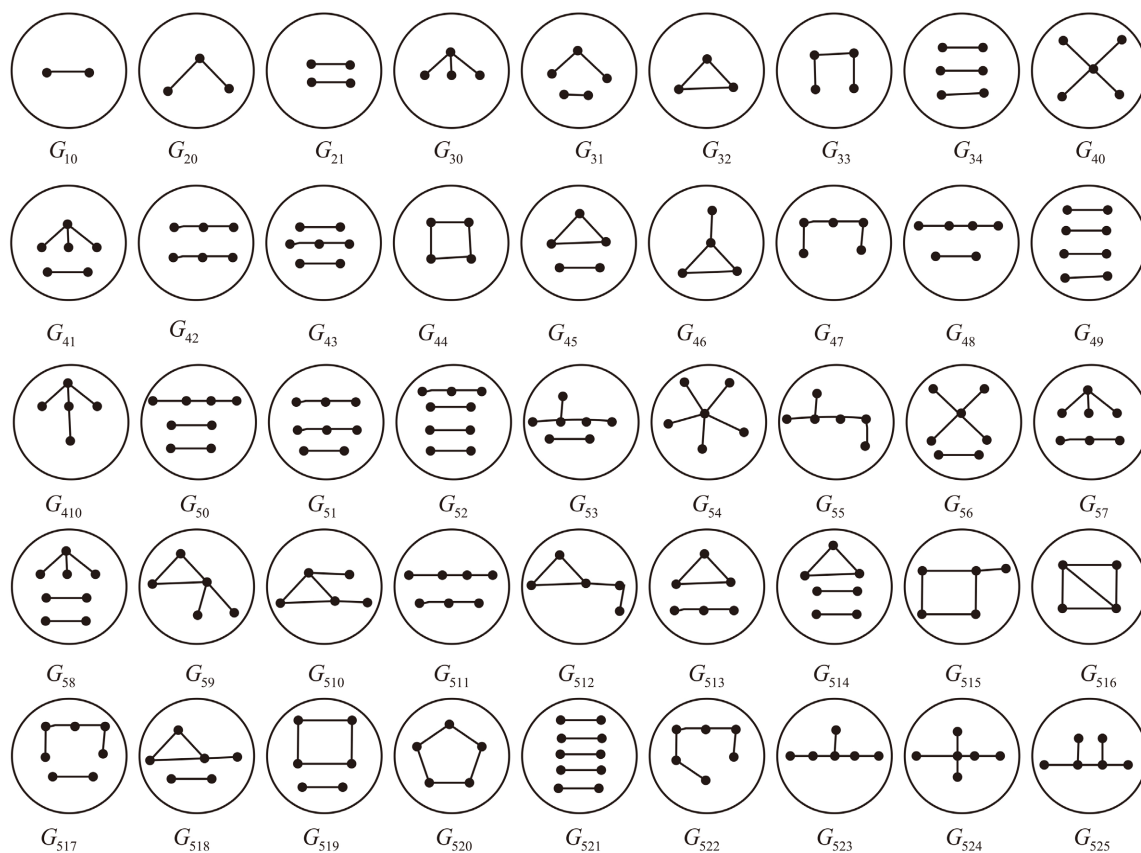


Figure 1. Delete all graphs G_i within five edges of the complete graph K_n , $i = 10, 20, \dots, 525$

图 1. 完全图 K_n 删除五条边以内的所有图集 G_i , $i = 10, 20, \dots, 525$

3. 几乎完全图的 NIS 和 NM 熵

在本章中, 我们规定对于式子 $\frac{1}{(k-r)!} \prod_{j=1}^{k-r} \binom{n-2j+2-2r}{2}$ 其中 $r \in \mathbb{Z}$, 当 k 取 r 时上式值为 1。

定理 3.1: 设 G 是由 K_n 删除两条边后得到的图, 则

(I)

$$I_{nis}(G_{20}) = \log(n+3) - \frac{n \log n + 2}{n+3} \quad (8)$$

和

$$I_{nm}(G_{20}) = \log \left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{20}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 2 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 2 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{20})) \log(z_k(G_{20}))}{\frac{(n-2)(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{20})} \quad (9)$$

$$\text{其中 } z_k(G_{20}) = \frac{(n-2)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)}{4k} - 1 \right).$$

(II)

$$I_{nis}(G_{21}) = \log(n+3) - \frac{n \log n + 2}{n+3} \quad (10)$$

和

$$I_{nm}(G_{21}) = \log \left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{21}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 2 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 2 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{21})) \log(z_k(G_{21}))}{\frac{(n-2)(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{21})} \quad (11)$$

$$\text{其中 } z_k(G_{21}) = \frac{(n-4)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k} - \frac{(n-2)(n-3)}{k} + 1 \right).$$

证明：无论是情况 I 还是情况 II，由于 $i_0(G)=1$ ， $i_1(G)=n$ ， $i_2(G)=2$ ，对于 $3 \leq k \leq n$ ， $i_k(G)=0$ ，我们有 $\sigma(G)=n+3$ 。因此，

$$I_{nis}(G_{20}) = I_{nis}(G_{21}) = \log(n+3) - \frac{n \log n + 2}{n+3}$$

假设 G 是由 K_n 删除 e_1, e_2 两条边得到的。不难看出对于 $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ，有 $\frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2}$ 。对于

$$K_n \text{ 分别包含 } e_1, e_2 \text{ 两条边的大小为 } k > 1 \text{ 的匹配数为 } \frac{2}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \binom{n-2j}{2}。$$

情况 I: 当 e_1, e_2 两条边有一个公共顶点时，如图 1 的 G_{20} 所示，此时删边内部不存在匹配，所以对 $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ，我们有

$$\begin{aligned} z_k(G_{20}) &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2} - \frac{2}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \binom{n-2j}{2} \\ &= \frac{(n-2)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)}{4k} - 1 \right) \end{aligned}$$

注意到 $z_0(G_{20})=1$ ， $z_1(G_{20})=\binom{2}{n}-2$ 这意味着

$$Z(G_{20}) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-2)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)}{4k} - 1 \right)$$

因此最终的公式为

$$I_{nm}(G_{20}) = \log \left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{20}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 2 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 2 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{20})) \log(z_k(G_{20}))}{\frac{(n-2)(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{20})}$$

情况 II: 当 e_1, e_2 两条边是独立的，如图 1 的 G_{21} 所示，此时同时包含这两条边的大小为 $k > 2$ 的匹配数为 $\frac{1}{(k-2)!} \prod_{j=1}^{k-2} \binom{n-2j-2}{2}$ ，根据容斥原理，对 $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ，我们有

$$z_k(G_{21}) = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2} - \frac{2}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \binom{n-2j}{2} + \frac{1}{(k-2)!} \prod_{j=1}^{k-2} \binom{n-2j-2}{2}$$

$$= \frac{(n-4)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k} - \frac{(n-2)(n-3)}{k} + 1 \right)$$

注意到 $z_0(G_{21})=1$, $z_1(G_{21})=\binom{2}{n}-2$ 这意味着

$$Z(G_{21}) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-4)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k} - \frac{(n-2)(n-3)}{k} + 1 \right)$$

因此最终的公式为

$$I_{nm}(G_{21}) = \log \left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{21}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 2 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 2 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{21})) \log(z_k(G_{21}))}{\frac{(n-2)(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{21})}$$

定理 3.2: 设 G 是由 K_n 删除三条边后得到的图, 则

(I)

$$I_{nis}(G_{30}) = \log(n+4) - \frac{n \log n + 3 \log 3}{n+4} \quad (12)$$

和

$$I_{nm}(G_{30}) = \log \left(\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{30}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 3 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 3 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{30})) \log(z_k(G_{30}))}{\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{30})} \quad (13)$$

$$\text{其中 } z_k(G_{30}) = \frac{(n-2)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)}{2k} - 3 \right).$$

(II)

$$I_{nis}(G_{31}) = \log(n+4) - \frac{n \log n + 3 \log 3}{n+4} \quad (14)$$

和

$$I_{nm}(G_{31}) = \log \left(\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{31}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 3 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 3 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{31})) \log(z_k(G_{31}))}{\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{31})} \quad (15)$$

$$\text{其中 } z_k(G_{31}) = \frac{(n-4)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k(k-1)} - \frac{3(n-2)(n-3)}{2k(k-1)} + 2 \right).$$

(III)

$$I_{nis}(G_{32}) = \log(n+5) - \frac{n \log n + 3 \log 3}{n+5} \quad (16)$$

和

$$I_{nm}(G_{32}) = \log\left(\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{32})\right) - \frac{\left(\binom{n}{2}-3\right)\log\left(\binom{n}{2}-3\right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{32}))\log(z_k(G_{32}))}{\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{32})} \quad (17)$$

$$\text{其中 } z_k(G_{32}) = \frac{(n-2)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)}{2k} - 3 \right).$$

(IV)

$$I_{nis}(G_{33}) = \log(n+4) - \frac{n \log n + 3 \log 3}{n+4} \quad (18)$$

和

$$I_{nm}(G_{33}) = \log\left(\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{33})\right) - \frac{\left(\binom{n}{2}-3\right)\log\left(\binom{n}{2}-3\right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{33}))\log(z_k(G_{33}))}{\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{33})} \quad (19)$$

$$\text{其中 } z_k(G_{33}) = \frac{(n-4)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k(k-1)} - \frac{3(n-2)(n-3)}{2k(k-1)} + 1 \right).$$

(V)

$$I_{nis}(G_{34}) = \log(n+4) - \frac{n \log n + 3 \log 3}{n+4} \quad (20)$$

和

$$I_{nm}(G_{34}) = \log\left(\frac{n^6-15n^5+73n^4-9n^3-914n^2+2304n-1152}{48} + \sum_{k=4}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{34})\right) - \frac{\left(\binom{n}{2}-3\right)\log\left(\binom{n}{2}-3\right) + z_2(G_{34})\log(z_2(G_{34})) + z_3(G_{34})\log(z_3(G_{34})) + \sum_{k=4}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{34}))\log(z_k(G_{34}))}{\frac{n^6-15n^5+73n^4-9n^3-914n^2+2304n-1152}{48} + \sum_{k=4}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{34})} \quad (21)$$

$$\text{其中 } z_2(G_{34}) = \frac{n^4-6n^3-n^2+54n-48}{8}, \quad z_3(G_{34}) = \frac{n^6-15n^5+67n^4+27n^3-932n^2+2004n-768}{48},$$

$$z_k(G_{34}) = \frac{(n-6)!}{2^{k-3}(k-3)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{8k(k-1)(k-2)} - \frac{3(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4(k-1)(k-2)} + \frac{3(n-4)(n-5)}{2(k-2)} - 1 \right).$$

证明: 删除三条边一共有 5 种情况, 在所有情况中除了 G_{32} 以外, 都有 $i_0(G)=1$, $i_1(G)=n$, $i_2(G)=3$, 对于 $3 \leq k \leq n$, $i_k(G)=0$, 我们有 $\sigma(G)=n+4$ 。因此,

$$I_{nis}(G_{30}) = I_{nis}(G_{31}) = I_{nis}(G_{33}) = I_{nis}(G_{34}) = \log(n+4) - \frac{n \log n + 3 \log 3}{n+4}$$

对于 G_{32} , 由于其存在 3-独立且 $i_3(G)=1$, 而对于 $4 \leq k \leq n$, $i_k(G)=0$, 所以 $\sigma(G)=n+5$ 。

$$I_{nis}(G_{32}) = \log(n+5) - \frac{n \log n + 3 \log 3}{n+5}$$

假设 G 是由 K_n 删除 e_1, e_2, e_3 三条边得到的。显而易见对于 $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, 有 $\frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2}$ 。对于 K_n 分别包含 e_1, e_2, e_3 三条边的大小为 $k > 1$ 的匹配数为 $\frac{2}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \binom{n-2j}{2}$ 。

情况 I: 当删除的是星图 S_3 时, 如图 1 的 G_{30} 所示, 此时删边内部不存在匹配, 因此对 $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, 有

$$\begin{aligned} z_k(G_{30}) &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2} - \frac{3}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \binom{n-2j}{2} \\ &= \frac{(n-2)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)}{2k} - 3 \right) \end{aligned}$$

注意到 $z_0(G_{30}) = 1$, $z_1(G_{30}) = \binom{2}{n} - 3$ 这意味着

$$Z(G_{30}) = \frac{n^2 - n - 4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-2)!}{2^{k-1}(k-1)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)}{2k} - 3 \right)$$

因此最终的公式为

$$I_{nm}(G_{30}) = \log \left(\frac{n^2 - n - 4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{30}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 3 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 3 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{30})) \log(z_k(G_{30}))}{\frac{n^2 - n - 4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{30})}$$

情况 II: 当删除的有一个公共顶点的两条边和一条独立边时, 如图 1 的 G_{31} 所示, 此时同时包含这两条边的大小为 $k > 2$ 的匹配数为 $\frac{2}{(k-2)!} \prod_{j=1}^{k-2} \binom{n-2j-2}{2}$, 根据容斥原理, 对 $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, 我们有

$$\begin{aligned} z_k(G_{31}) &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2} - \frac{3}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \binom{n-2j}{2} + \frac{2}{(k-2)!} \prod_{j=1}^{k-2} \binom{n-2j-2}{2} \\ &= \frac{(n-4)!}{2^{k-2}(k-2)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k(k-1)} - \frac{3(n-2)(n-3)}{2(k-1)} + 2 \right) \end{aligned}$$

注意到 $z_0(G_{31}) = 1$, $z_1(G_{31}) = \binom{2}{n} - 3$, 这意味着

$$Z(G_{31}) = \frac{n^2 - n - 4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-4)!}{2^{k-2}(k-2)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k(k-1)} - \frac{3(n-2)(n-3)}{2(k-1)} + 2 \right)$$

因此最终的公式为

$$I_{nm}(G_{31}) = \log \left(\frac{n^2 - n - 4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{31}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 3 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 3 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{31})) \log(z_k(G_{31}))}{\frac{n^2 - n - 4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{31})}$$

情况 III: 当删除的是长为 3 的圈时, 如图 1 的 G_{32} 所示, 此时其删边内部也不存在匹配, 结果与情况 I 的一致, 所以这里不再赘述。

情况 IV: 当删除的是路时, 如图 1 的 G_{33} 所示, 此时同时包含这两条边的大小为 $k > 2$ 的匹配数为 $\frac{1}{(k-2)!} \prod_{j=1}^{k-2} \binom{n-2j-2}{2}$, 所以对 $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, 我们有

$$\begin{aligned} z_k(G_{33}) &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2} - \frac{3}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \binom{n-2j}{2} + \frac{1}{(k-2)!} \prod_{j=1}^{k-2} \binom{n-2j-2}{2} \\ &= \frac{(n-4)!}{2^{k-2}(k-2)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k(k-1)} - \frac{3(n-2)(n-3)}{2(k-1)} + 1 \right) \end{aligned}$$

注意到 $z_0(G_{33})=1$, $z_1(G_{33})=\binom{2}{n}-3$, 这意味着

$$Z(G_{33}) = \frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-4)!}{2^{k-2}(k-2)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4k(k-1)} - \frac{3(n-2)(n-3)}{2(k-1)} + 1 \right)$$

因此最终的公式为

$$I_{nm}(G_{33}) = \log \left(\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{33}) \right) - \frac{\left(\binom{n}{2} - 3 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 3 \right) + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{33})) \log(z_k(G_{33}))}{\frac{n^2-n-4}{2} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{33})}$$

情况 V: 当删除的是三条独立边时, 如图 1 的 G_{34} 所示, 这种情况比前面所有的都要复杂得多, 此时同时包含任意两条边的大小为 $k > 2$ 的匹配数为 $\frac{3}{(k-2)!} \prod_{j=1}^{k-2} \binom{n-2j-2}{2}$, 同时包含三条边的大小为 $k > 3$ 的匹配数为 $\frac{1}{(k-3)!} \prod_{j=1}^{k-3} \binom{n-2j-4}{2}$, 根据容斥原理, 对 $4 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, 我们有

$$\begin{aligned} z_k(G_{34}) &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n-2j+2}{2} - \frac{3}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \binom{n-2j}{2} \\ &\quad + \frac{3}{(k-2)!} \prod_{j=1}^{k-2} \binom{n-2j-2}{2} - \frac{1}{(k-3)!} \prod_{j=1}^{k-3} \binom{n-2j-4}{2} \\ &= \frac{(n-6)!}{2^{k-3}(k-3)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{8k(k-1)(k-2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4(k-1)(k-2)} + \frac{3(n-4)(n-5)}{2(k-2)} - 1 \right) \end{aligned}$$

注意到 $z_0(G_{34})=1$, $z_1(G_{34})=\binom{2}{n}-3$, 同时对于 2-匹配和 3-匹配, 我们有

$$\begin{aligned} z_2(G_{34}) &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} - \frac{3(n-2)(n-3)}{2} + 3 = \frac{n^4-6n^3-n^2+54n-48}{8} \\ z_3(G_{34}) &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{48} - \frac{3(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{8} + \frac{3(n-4)(n-5)}{2} - 2 \\ &= \frac{n^6-15n^5+67n^4+27n^3-932n^2+2004n-768}{48} \end{aligned}$$

这意味着

$$Z(G_{34}) = \frac{n^6 - 15n^5 + 73n^4 - 9n^3 - 914n^2 + 2304n - 1152}{48} + \sum_{k=4}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-6)!}{2^{k-3}(k-3)!(n-2k)!} \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{8k(k-1)(k-2)} - \frac{3(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4(k-1)(k-2)} + \frac{3(n-4)(n-5)}{2(k-2)} - 1 \right)$$

因此最终的公式为

$$I_{nm}(G_{34}) = \log \left(\frac{n^6 - 15n^5 + 73n^4 - 9n^3 - 914n^2 + 2304n - 1152}{48} + \sum_{k=4}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{34}) \right) \\ \frac{\left(\binom{n}{2} - 3 \right) \log \left(\binom{n}{2} - 3 \right) + z_2(G_{34}) \log(z_2(G_{34})) + z_3(G_{34}) \log(z_3(G_{34})) + \sum_{k=4}^{\lfloor n/2 \rfloor} (z_k(G_{34})) \log(z_k(G_{34}))}{\frac{n^6 - 15n^5 + 73n^4 - 9n^3 - 914n^2 + 2304n - 1152}{48} + \sum_{k=4}^{\lfloor n/2 \rfloor} z_k(G_{34})}$$

对于删除四条边的几乎完全图，一共有 11 种情况，而删除五条边的几乎完全图情况更复杂，有 26 种。由于证明过程与前面类似，所以这里不再重复证明。通过将删除至多五条边的几乎完全图所有情况的两类熵经过计算后，根据删边的数量分布情况考虑，我们发现当删去长为 3 的圈时， I_{nis} 的值是最大的，而且删去的长为 3 的圈数量越多， I_{nis} 的值越大；而对于 I_{nm} 的值，当删去的都是独立边时，值是最大的，而当删去的是一个星图时，值是最小的。接下来我将通过数值模拟进一步对发现的规律进行验证。

4. 数值模型

为了保证结果的普遍性，这里我们分别取 30 个顶点和 31 个顶点进行模拟，计算结果如表 1 所示。从表中我们可以看到这两类熵无论奇数顶点还是偶数顶点，在删相同数量边的情况下，它们均有一些共同特征，例如有一些图的熵值是相同的，那是因为它们删边内部都拥有相同的匹配数，这个结果也暗示了它们的复杂度是一样的。另外我们还发现，对于由完全图删除两条边后得到的几乎完全图，显而易见得 $I_{nis}(G_{20}) = I_{nis}(G_{21})$ 且 $I_{nm}(G_{20}) < I_{nm}(G_{21})$ ；对于由完全图删除三条边后得到的几乎完全图， G_{32} 的 I_{nm} 值是最大的，其他情况都一样， G_{30} 和 G_{32} 的 I_{nm} 值相同，都是最小的， G_{34} 的 I_{nm} 值最大；对于由完全图删除四条边后得到的几乎完全图， G_{45} 和 G_{46} 的 I_{nis} 值相等，都是最大的，其他情况都一样，而 G_{40} 的 I_{nm} 值最小， G_{49} 的 I_{nm} 值最大；对于由完全图删除五条边后得到的几乎完全图， G_{516} 的 I_{nis} 值是最大的， G_{59} 、 G_{510} 、 G_{512} 、 G_{513} 、 G_{514} 、 G_{516} 和 G_{518} 次之，其他情况都一样，而 G_{54} 的 I_{nm} 值最小， G_{521} 的 I_{nm} 值最大。从结果来看，与上一节中得到的结论是一致的。

Table 1. NIS entropy and NM entropy of a complete graph with at most 5 edges deleted

表 1. 完全图删至多 5 条边的 NIS 熵和 NM 熵

顶点数	G	I_{nis}	I_{nm}	G	I_{nis}	I_{nm}
30	G_{20}	0.523	58.989	G_{54}	0.758	58.851
	G_{21}	0.523	58.990	G_{55}	0.758	58.858
	G_{30}	0.618	58.944	G_{56}	0.758	58.857
	G_{31}	0.618	58.947	G_{57}	0.758	58.860
	G_{32}	0.788	58.944	G_{58}	0.758	58.861

续表

G_{33}	0.618	58.946	G_{59}	0.917	58.854
G_{34}	0.618	58.949	G_{510}	0.917	58.855
G_{40}	0.695	58.898	G_{511}	0.758	58.861
G_{41}	0.695	58.903	G_{512}	0.917	58.857
G_{42}	0.695	58.904	G_{513}	0.917	58.860
G_{43}	0.695	58.905	G_{514}	0.917	58.861
G_{44}	0.695	58.901	G_{515}	0.758	58.857
G_{45}	0.859	58.903	G_{516}	1.016	58.854
G_{46}	0.859	58.900	G_{517}	0.758	58.861
G_{47}	0.695	58.903	G_{518}	0.917	58.858
G_{48}	0.695	58.904	G_{519}	0.758	57.860
G_{49}	0.695	58.907	G_{520}	0.758	58.858
G_{410}	0.695	58.901	G_{521}	0.758	58.865
G_{50}	0.758	58.860	G_{522}	0.758	58.860
G_{51}	0.758	58.862	G_{523}	0.758	58.858
G_{52}	0.758	58.864	G_{524}	0.758	58.855
G_{53}	0.758	57.860	G_{525}	0.758	58.857
G_{20}	0.512	61.587	G_{54}	0.745	61.453
G_{21}	0.512	61.588	G_{55}	0.745	61.460
G_{30}	0.605	61.543	G_{56}	0.745	61.459
G_{31}	0.605	61.546	G_{57}	0.745	61.461
G_{32}	0.772	61.543	G_{58}	0.745	61.463
G_{33}	0.605	61.545	G_{59}	0.901	61.456
G_{34}	0.605	61.547	G_{510}	0.901	61.457
G_{40}	0.682	61.499	G_{511}	0.745	61.463
G_{41}	0.682	61.503	G_{512}	0.901	61.459
G_{42}	0.682	61.504	G_{513}	0.901	61.461
G_{43}	0.682	61.506	G_{514}	0.901	61.463
G_{44}	0.682	61.502	G_{515}	0.745	61.459
G_{45}	0.842	61.503	G_{516}	0.998	61.456
G_{46}	0.842	61.500	G_{517}	0.745	61.463
G_{47}	0.682	61.503	G_{518}	0.901	61.460
G_{48}	0.682	61.504	G_{519}	0.745	60.461
G_{49}	0.682	61.507	G_{520}	0.745	61.460
G_{410}	0.682	61.502	G_{521}	0.745	61.466
G_{50}	0.745	61.461	G_{522}	0.745	61.461
G_{51}	0.745	61.464	G_{523}	0.745	61.460
G_{52}	0.745	61.465	G_{524}	0.745	61.457
G_{53}	0.745	61.461	G_{525}	0.745	61.459

31

5. 讨论

本研究通过系统计算完全图删除至多五条边形成的各类几乎完全网络在独立集熵和匹配数熵上的取值,揭示了删边拓扑结构对这两种熵的显著影响。数值结果清晰地表明,当删除的边构成一个长为3的圈 C_3 时, I_{nis} 值达到最大;而当删除的边彼此独立时, I_{nm} 值达到最大。相反,删除星形结构 S_k 会导致 I_{nm} 值最小。这些现象的根本原因在于不同删边模式对图中独立集数量分布 $i_k(G)$ 和匹配数数量分布 $z_k(G)$ 产生的迥异影响,其内在机理源于图论中独立集与匹配集的组合性质。

I_{nis} 度量的是图中顶点构成独立集的不确定性,其值依赖于不同大小独立集的数量分布 $i_k(G)$ 。在完全图 K_n 中,由于所有顶点两两相连,任何大小大于1的独立集都不可能存在。删除边会“解放”顶点间原有的强制性邻接关系,从而产生新的独立集。关键之处在于,删除边所形成的结构决定了哪些新的、更大规模的独立集能够出现。删除一个三角形 C_3 具有独特的影响是因为它移除了三个顶点之间所有的两两连接,在原始的 K_n 中,这三个顶点构成的集合不可能是一个大小为3的独立集。因此删除这三条边后,三个顶点变得彼此独立,不再有边相连,从而新增了一个大小为3的独立集,而在删除其他三条边构型如星、路或部分独立边时,通常是不存在大小为3的独立集的。这个新增的高阶独立集显著增加了独立集总数 $\sigma(G)$,并改变了 $i_k(G)$ 的分布,使得概率质量向更高的 k 值分散。根据香农熵的定义,这种分布的分散化会使不确定性增加,从而直接导致 I_{nis} 值的增大。删除的三角形数量越多,这种新增高阶独立集的效果叠加,导致 $\sigma(G)$ 进一步增大且分布更分散,因此 I_{nis} 值更大。相比之下,删除星形结构 S_k 仅移除了中心顶点与若干叶子顶点之间的边。虽然这允许中心顶点和叶子顶点之间形成新的大小为2的独立集,但它通常不会产生大小为3或更大的新独立集,因为叶子顶点之间原本就没有边(在 K_n 中是相连的,但星形删除不涉及这些边)。因此,它对独立集总数 $\sigma(G)$ 的增加以及 $i_k(G)$ 分布分散化的贡献相对较小。

I_{nm} 度量的是图中边构成匹配的不确定性,其值依赖于不同大小匹配的数量分布 $z_k(G)$ 。在完全图 K_n 中,匹配数分布相对均匀且丰富。删除边会减少图中边的总数,从而减少可能的匹配数量。然而,删边模式的不同决定了 $z_k(G)$ 下降的幅度和模式。删除彼此独立的边的影响最为特殊,虽然移除了这些边本身,但图中剩余的边集仍然非常稠密。更重要的是,移除这些独立边并不破坏其他边之间形成匹配的能力。那些没有被删除的、与这些独立边不相邻的边,仍然可以自由地组合进各种大小的匹配中。在计算包含特定边的匹配时,删除独立边意味着在扣除包含这些被删边的匹配,由于这些被删边之间没有交集,因此需要扣除的项相对较少且互斥性强。这导致对于大小大于1的匹配数 $z_k(G)$ 的下降相对较少,匹配数的分布 $z_k(G)$ 在多个 k 值上仍然保持较高的数值,分布相对分散,从而导致较高的 I_{nm} 。相反,删除一个星形结构 S_k 具有更强的抑制作用。星形的本质是所有边共享一个公共顶点,在完全图中,包含星形中任意两条边的匹配都是不可能的。因此,在计算 K_n 的匹配数时,包含星形中两条或更多边的 k -匹配($k \geq 2$)原本就不存在。删除星形边后,在计算新的 $z_k(G)$ 时,我们只需要考虑那些包含最多一条被删星边的匹配即可,这相当于在容斥原理的计算中,高阶交集项(同时包含多条被删边)天然为零。其结果就是,删除星形结构主要影响的是低阶匹配,而对于 $k \geq 2$ 的 $z_k(G)$ 的影响,相比于删除相同数量的独立边,其下降幅度更大,或者说恢复得更少。这导致匹配数分布 $z_k(G)$ 更加集中于较小的 k 值,分布的集中化会使得不确定性降低,从而导致 I_{nm} 值最小。路 P_n 或部分相交边的删除情况介于独立边和星形之间,其影响取决于边之间共享顶点的程度,共享顶点越多,对 $z_k(G)$ 的抑制作用越强,熵值相应越低。

综上所述,独立集熵对能产生新的、高阶独立集的删边结构(如 C_3)敏感,因为这增加了独立集大小分布的不确定性;而匹配数熵则对删边结构是否破坏边之间自由组合形成较大匹配的能力敏感。删除独立边最大程度地保留了这种组合自由度,因为边之间冲突少,维持了匹配数分布的分散性;而删除共享顶点的边(如星形)则显著限制了边的组合可能性,因为边之间冲突强,导致匹配数分布集中于低阶,从而

降低了熵值。这种内在的组合机理深刻揭示了图结构(特别是顶点与边的连接/冲突模式)如何通过影响基本图不变量的数量分布,最终决定了基于信息泛函的图熵度量值。

6. 总结

本文系统研究了完全图 K_n 分别删除至多 5 条边后形成的各类几乎完全网络的复杂性度量问题,重点聚焦于基于独立集数的图熵 I_{nis} 和基于匹配数的图熵 I_{nm} 。通过枚举所有可能的删边构型并精确计算其熵值,我们不仅确定了在删除相同数量边的情况下这两类熵的极值点,更重要的是,深入揭示了导致这些极值现象产生的内在组合机理,并用数值模拟结果有力地验证了这些理论发现和机理分析。我们的核心发现表明,网络的熵值强烈依赖于被删除边集所形成的拓扑结构。对于匹配熵,当删星图时,熵值是最小的;而当删独立边时,熵值是最大的。因为在任何 n 阶的非空图中,大小为 0 和 1 的独立集和匹配集的个数都是确定的,星图只有 0-匹配和 1-匹配,即在完全图中不存在同时包含星图两条边的 $k > 2$ 的匹配数,所以我们在计算时只需考虑在完全图中包含星图一条边的 $k > 1$ 的匹配数即可,熵值自然也会比较小;相反地,独立边的匹配数最多可以计算到它的边数大小,所以根据容斥原理它的匹配数要比其他同构图形要多,熵值自然也会大一些。独立熵也是如此,之所以删除长为 3 的圈熵值最大是因为 C_3 可以看成是顶点数为 3 的完全图,而完全图的独立集是最多的,熵值也会比较大。因此熵值高的图总是有更多大小大于 1 的独立集和匹配集。

一个完整的网络是由无数的节点和边构成的。 I_{nis} 用于度量节点独立的不确定性,但是对于有相同节点数但边数不相同的网络来说, I_{nis} 值可能是相同的,导致无法确定网络的结构信息;而 I_{nm} 用于度量边匹配的不确定性,刚好可以对 I_{nis} 进行互补,在 I_{nis} 值相同的情况下,比较 I_{nm} 值来确定网络的结构特征。例如 G_{30} 和 G_{31} 的 I_{nis} 值就是一样的,此时我们就无法判断网络的结构,而 G_{31} 的 I_{nm} 值要比 G_{30} 的要大,所以我们可以判断出 G_{31} 的网络结构更复杂。但这些结论是否还适合现有的其它图熵我们还不得而知,所以未来可以加入其他图熵进行比较,看是否能得到相同或者相似的结论,用更一般的规律来刻画网络熵的极值图形将是一个很有趣的事情。

基金项目

青海民族大学研究生创新项目《一些复杂网络熵的计算研究》。项目编号: 07M2024016。

参考文献

- [1] Boltzmann, L. (1866) Ueber die mechanische bedeutung des zweiten Hauptsatzes der wärmetheorie: Sond.-Abdr. Wiss. Staatsdruckerei.
- [2] Shannon, C.E. (1948) A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>
- [3] Rashevsky, N. (1955) Life, Information Theory, and Topology. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **17**, 229-235. <https://doi.org/10.1007/bf02477860>
- [4] Mowshowitz, A. (1968) Entropy and the Complexity of Graphs: I. An Index of the Relative Complexity of a Graph. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **30**, 175-204. <https://doi.org/10.1007/bf02476948>
- [5] Li, S., He, J. and Song, K. (2016) Network Entropies of the Chinese Financial Market. *Entropy*, **18**, Article 331. <https://doi.org/10.3390/e18090331>
- [6] Coutrot, A., Manley, E., Goodroe, S., Gahnstrom, C., Filomena, G., Yesiltepe, D., et al. (2022) Entropy of City Street Networks Linked to Future Spatial Navigation Ability. *Nature*, **604**, 104-110. <https://doi.org/10.1038/s41586-022-04486-7>
- [7] Ruby, U. and Yendapalli, V. (2020) Binary Cross Entropy with Deep Learning Technique for Image Classification. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*, **9**, 5393-5397. <https://doi.org/10.30534/ijatcse/2020/175942020>

- [8] Zhou, C., Ye, Z., Yao, C., Fan, X. and Xiong, F. (2024) Estimation of the Anisotropy of Hydraulic Conductivity through 3D Fracture Networks Using the Directional Geological Entropy. *International Journal of Mining Science and Technology*, **34**, 137-148. <https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2024.01.004>
- [9] Liu, T., Qi, S., Qiao, X. and Liu, S. (2024) A Hybrid Short-Term Wind Power Point-Interval Prediction Model Based on Combination of Improved Preprocessing Methods and Entropy Weighted GRU Quantile Regression Network. *Energy*, **288**, Article 129904. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2023.129904>
- [10] Bonchev, D. and Rouvray, D.H. (2003) Complexity in Chemistry: Introduction and Fundamentals. Taylor & Francis.
- [11] Bonchev, D.G. (1995) Kolmogorov's Information, Shannon's Entropy, and Topological Complexity of Molecules. *Bulgarian Chemical Communications*, **28**, 567-582.
- [12] Zenil, H., Kiani, N.A. and Tegnér, J. (2017) Low-Algorithmic-Complexity Entropy-Deceiving Graphs. *Physical Review E*, **96**, Article 012308. <https://doi.org/10.1103/physreve.96.012308>
- [13] Morzy, M., Kajdanowicz, T. and Kazienko, P. (2017) On Measuring the Complexity of Networks: Kolmogorov Complexity versus Entropy. *Complexity*, **2017**, Article ID: 3250301. <https://doi.org/10.1155/2017/3250301>
- [14] Cao, S., Dehmer, M. and Shi, Y. (2014) Extremality of Degree-Based Graph Entropies. *Information Sciences*, **278**, 22-33. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.03.133>
- [15] Bonchev, D. and Trinajstić, N. (1977) Information Theory, Distance Matrix, and Molecular Branching. *The Journal of Chemical Physics*, **67**, 4517-4533. <https://doi.org/10.1063/1.434593>
- [16] Braunstein, S.L., Ghosh, S. and Severini, S. (2006) The Laplacian of a Graph as a Density Matrix: A Basic Combinatorial Approach to Separability of Mixed States. *Annals of Combinatorics*, **10**, 291-317. <https://doi.org/10.1007/s00026-006-0289-3>
- [17] Estrada, E., de la Peña, J.A. and Hatano, N. (2014) Walk Entropies in Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **443**, 235-244. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.11.009>
- [18] Dehmer, M. (2008) Information Processing in Complex Networks: Graph Entropy and Information Functionals. *Applied Mathematics and Computation*, **201**, 82-94. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.12.010>
- [19] Dehmer, M., Grabner, M. and Furtula, B. (2012) Structural Discrimination of Networks by Using Distance, Degree and Eigenvalue-Based Measures. *PLOS ONE*, **7**, e38564. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0038564>
- [20] Kraus, V., Dehmer, M. and Emmert-Streib, F. (2014) Probabilistic Inequalities for Evaluating Structural Network Measures. *Information Sciences*, **288**, 220-245. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.07.018>
- [21] Dehmer, M. and Mowshowitz, A. (2011) A History of Graph Entropy Measures. *Information Sciences*, **181**, 57-78. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.08.041>
- [22] Chen, Z., Dehmer, M., Emmert-Streib, F. and Shi, Y. (2015) Entropy of Weighted Graphs with Randi's Weights. *Entropy*, **17**, 3710-3723. <https://doi.org/10.3390/e17063710>
- [23] Chen, Z., Dehmer, M. and Shi, Y. (2014) A Note on Distance-Based Graph Entropies. *Entropy*, **16**, 5416-5427. <https://doi.org/10.3390/e16105416>
- [24] Ilić, A. and Dehmer, M. (2015) On the Distance Based Graph Entropies. *Applied Mathematics and Computation*, **269**, 647-650. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.07.100>
- [25] Merrifield, R. and Simmons, H. (1989) Topological Methods in Chemistry. Wiley.
- [26] Wagner, S. and Gutman, I. (2010) Maxima and Minima of the Hosoya Index and the Merrifield-Simmons Index: A Survey of Results and Techniques. *Acta Applicandae Mathematicae*, **112**, 323-346. <https://doi.org/10.1007/s10440-010-9575-5>
- [27] Cao, S., Dehmer, M. and Kang, Z. (2017) Network Entropies Based on Independent Sets and Matchings. *Applied Mathematics and Computation*, **307**, 265-270. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.02.021>
- [28] Zhang, H., Wu, T. and Lai, H. (2014) Per-Spectral Characterizations of Some Edge-Deleted Subgraphs of a Complete Graph. *Linear and Multilinear Algebra*, **63**, 397-410. <https://doi.org/10.1080/03081087.2013.869592>
- [29] Wan, P., Chen, X., Tu, J., Dehmer, M., Zhang, S. and Emmert-Streib, F. (2020) On Graph Entropy Measures Based on the Number of Independent Sets and Matchings. *Information Sciences*, **516**, 491-504. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.11.020>