Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(9), 15-21
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.149395

Hans汉斯

数学期望的基本概念及其应用

李豆豆[1]**，关　丽**[1*]**，石万林**[2]

[1]北京工业大学数学统计学与力学学院，北京
[2]华北电力大学数理学院，北京

收稿日期：2025年8月2日；录用日期：2025年8月26日；发布日期：2025年9月2日

摘　要

随机变量的数字特征刻画了随机变量某一方面的性质，在实际应用中更容易估算出来，有更加广泛的应用价值。本文主要介绍数学期望的基本概念和性质，并结合实例，让大家对数学期望这一数字特征有更深入的认识和理解。

关键词

数学期望，加权平均，均值

The Basic Concepts and Applications of Mathematic Expectation

Doudou Li[1]**, Li Guan**[1*]**, Wanlin Shi**[2]

[1]School of Mathematics, Statistics and Mechanics, Beijing University of Technology, Beijing
[2]School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing

Received: Aug. 2nd, 2025; accepted: Aug. 26th, 2025; published: Sep. 2nd, 2025

Abstract

The numerical characteristics of a random variable describe specific aspects of its behavior, which facilitates estimation in practical applications and enhances its overall utility. This article primarily introduces the fundamental concepts and properties of mathematic expectation, and further deepens the reader's understanding through illustrative examples.

*通讯作者。

文章引用: 李豆豆, 关丽, 石万林. 数学期望的基本概念及其应用[J]. 应用数学进展, 2025, 14(9): 15-21.
DOI: 10.12677/aam.2025.149395

Keywords

Mathematic Expectation, Weighted Average, Mean

1. 数学期望的来源及定义

数学期望的起源可以追溯到 17 世纪的赌金分配问题，有一个赌徒向法国著名数学家帕斯卡挑战，给他出了一个问题：甲乙两个赌徒，假设他们两人获胜的机率相等，比赛进行五局，规定先胜三局者可以获得 100 法郎的奖励。当比赛进行到第四局的时候，甲胜了两局，乙胜了一局，此时由于某些原因中止了比赛，那么 100 法郎的赌金如何分配才算公平呢？是不是把赌金分成三份，甲赢了两局就拿走两份，乙赢了一局拿走一份？又或者，把赌金平均分配，甲乙各拿走一半？这两种分法都不是很合理。从概率论的角度出发，假如赌博继续进行下去，甲获胜的情况有以下两种：

(1) 甲赢了第四局；

(2) 甲在第四局输了，在第五局赢了，如图 1 所示：

Figure 1. Analysis of the situation for A wins
图 1. 甲获胜的情况分析

故甲获胜的概率为：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=75\%,$$

甲有 75%的可能性获得 100 法郎；

而乙获胜的可能性是连续赢得两局比赛的概率，即：

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25\%,$$

乙有 25%的可能性获得 100 法郎。

依据上述推断，甲应分得的奖金为

$$100\times75\%+0\times25\%=75,$$

乙应分得的奖金为

$$100\times25\%+0\times75\%=25.$$

此次讨论体现了“期望收益”思想，形成了数学期望的雏形。1657 年，荷兰数学家惠更斯在《De Ratiociniis in Ludo Aleae》[1]中正式提出“期望值”概念，定义为多次试验的预期平均收益，建立了概率加权计算的基本框架。1713 年，伯努利在《Ars Conjectandi》[2]中提出大数定律，首次严格证明：当独立

重复试验次数 n 趋于无穷时，事件的实际频率依概率收敛于其期望值，奠定了期望的客观稳定性。拉普拉斯[3]建立了公理化体系以及连续型期望。到了 20 世纪，柯尔莫哥洛夫[4]在概率论公理体系中严格数学化期望定义，明确其作为测度论框架下的积分概念，奠定了现代概率论的基础。

数学期望的引入将“随机结果”量化为可计算的预期值，推动概率论应用于更广泛的领域，如：统计学(最小二乘法误差分析)、金融风险评估(预期收益计算)、物理与工程(随机过程建模)等。本文主要对数学期望的定义和性质进行深入的分析，并结合实例来说明它在日常生活和实践中的应用价值，从而让读者对数学期望这一数字特征有更深入和全面的了解和学习。

定义 1 (离散型随机变量的期望[5])：设离散型随机变量 X 的概率分布为：

$$P\{X=x_i\}=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

若级数 $\sum_i x_i p_i$ 绝对收敛，即 $\sum_i |x_i| p_i$ 收敛，则称 $\sum_i x_i p_i$ 为随机变量 X 的期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_i x_i p_i.$$

从上述定义可以看到，随机变量 X 的期望是一个实数，并非随机变量，它是以 X 取每个可能值 x_i 的概率 p_i 为权重的一个加权平均和，它从本质上反映了随机变量取可能值的真正的平均值，故也称 $E(X)$ 为 X 的均值；级数的绝对收敛性保证了级数和不随级数各项次序的改变而改变，这意味着随机变量 X 的期望只与其概率分布有关，这也说明了如果两个随机变量的数学期望相等，并不意味着它们有相同的分布。

定义 2 (连续型随机变量的期望[5])：设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$

根据数学期望的定义，可得以下性质[5]：

(1) 设 c 是常数，则 $E(c)=c$。

(2) 设 k 是常数，则 $E(kX)=kE(X)$。

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

(4) 设 X 和 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$。

注意到，(4)可以推广到如下形式：

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n).$$

其中，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立。

2. 数学期望的应用

数学期望是刻画随机变量取值平均趋势的重要数字特征之一，相较于分布函数，它具有更强的可操作性和实用价值。在实际应用中，数学期望能够较为便捷地进行估算，因此在多个领域被广泛应用。在金融领域，数学期望被用于投资决策和资产组合优化，帮助投资者制定更加科学合理的投资策略；在医学领域，它用于优化医学检验流程、评估疾病风险并进行疾病预测，从而辅助制定更有效的治疗方案；在社会科学领域，数学期望常用于市场调查和社会调查，帮助决策者依据统计预期做出更合理的政策制定；在日常生活中，数学期望也广泛应用于保险定价、风险管理等情境中，指导人们做出更明智的选择。

本文将通过多个实例，展示数学期望在现实生活中的具体应用，帮助学生加深对数学期望实用价值

的理解，激发学习兴趣，并为后续《概率论与数理统计》的系统学习打下良好基础。

例 1 (产品决策问题)甲、乙两台机器生产同一个零件，在一天内生产的次品数分别记为 X 和 Y。已知 X 和 Y 的概率分布如下：

X	0	1	2	3
P	0.3	0.1	0.5	0.1

Y	0	1	2	3
P	0.3	0.4	0.2	0.1

如果两台机器的产量相同，试求：哪台机器生产的零件质量更好？

解：要比较两台机器生产的零件质量，实际就是比较 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 的大小。根据数学期望的定义，可得：

$$E(X)=0\times0.3+1\times0.1+2\times0.5+3\times0.1=1.4$$

$$E(Y)=0\times0.3+1\times0.4+2\times0.2+3\times0.1=1.1$$

由于 $E(X)>E(Y)$，所以乙机器生产的零件质量更好。

例 2 (商品利润问题)某商场某品牌的电子产品每周的销售量 X 是一个随机变量，且 X 服从[15, 30]上的均匀分布。商场每销售一件该电子产品可获利 100 元；如果供大于求，则每件多余的电子产品需交 10 元保存费；如果供不应求，则从外部调货，每销售一件该电子产品可获利 50 元。试求：此商场每周进货量应为多少，才能保证一周的平均利润最大？

解：设每周的进货量为 y，利润为 z。于是，

$$z=z(X)=\begin{cases}100X-10(y-X), y\geq X,\\ 100y+50(X-y), y<X.\end{cases}$$

从而，一周的平均利润为

$$\begin{aligned}E(z)&=E(z(X))\\ &=\int_{15}^{30}z(x)f(x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{15}\int_{15}^{y}100x-10(y-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{15}\int_{y}^{30}100y+50(x-y)\mathrm{d}x\\ &=-2y^2+110y+675.\end{aligned}$$

当 $y=55/2$ 时，上式达到最大值，因而商场每周的进货量应为 27 或者 28，才能保证一周的平均利润最大。

例 3 (客车停车问题)设一辆客车载有 40 名乘客，乘客有 15 个站点可以选择下车，当到达一个站点时，如果没有乘客下车，就不停车。(设每位乘客在各个站点下车是等可能的，并且各位乘客是否下车相互独立)，令 X 表示停车的次数，求 X 的数学期望。

解：令

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{第 } i \text{ 个站点没有人下车},\\ 1, & \text{第 } i \text{ 个站点有人下车},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,15.$$

根据题意可知：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{15},$$

且 $\{X_i; 1 \le i \le 15\}$ 是一列相互独立且有相同分布的随机变量。根据数学期望的性质，有

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{15}) = 15E(X_1).$$

接下来，我们计算 $E(X_1)$。由 X_1 的定义可知：

$$P(X_1 = 0) = (1 - 1/15)^{40},\quad P(X_1 = 1) = 1 - (1 - 1/15)^{40}.$$

于是，

$$E(X_1) = 1 \times \left(1 - (1 - 1/15)^{40}\right) + 0 \times (1 - 1/15)^{40} = 1 - (14/15)^{40}.$$

故

$$E(X) = 15\left(1 - (14/15)^{40}\right).$$

通过上述例子，我们展示了数学期望在日常生活中的多种应用场景。此外，从例 3 可以看出，数学期望的计算并不仅限于直接套用定义公式，在实际应用中，灵活运用其性质往往能够达到事半功倍的效果。

当然，数学期望不仅在日常生活与实践中应用广泛，在经济学和金融学领域同样发挥着重要作用。1952 年，Harry Markowitz 在其开创性论文《Portfolio Selection》[6]中，将概率统计中的两个核心数字特征——数学期望与方差——引入到经济学分析中，用以量化刻画风险资产的期望收益率(即平均回报率)和风险水平，从而建立了系统的投资组合分析框架。这一方法为投资决策提供了理论基础，也使 Markowitz 被誉为“投资组合之父”。下面的例子将围绕投资决策问题展开，以进一步说明数学期望在金融中的应用价值。

例 4 (投资决策问题) 假设投资者有 10,000 元，对于风险资产 A，B (不妨设 A，B 为股票)进行投资，已知风险资产 A，B 的收益率及概率分布如表 1 所示，设风险资产 A 与风险资产 B 是不相关的，有以下三种投资方案：

(a) 全部资金都投到风险资产 A 上；

(b) 全部资金都投到风险资产 B 上；

(c) 按照投资组合(1/2, 1/2)投资风险资产 A，B。

Table 1. Return rate and probability distribution of risk assets *A*, *B*

表 1. 风险资产 *A*，*B* 的收益率及概率分布

风险资产 A		风险资产 B	
收益率	概率	收益率	概率
−30%	1/3	−16%	1/2
30%	2/3	40%	1/2

分别计算以上三种投资方案的期望收益率和方差？并比较三种投资方案的优劣？

解：设证券 A，B 的收益率用 r_A, r_B 表示，它们都是随机变量，根据题意计算证券 A，B 的平均收益率分别为

$$E\left(r_A\right)=-\frac{30}{100}\times\frac{1}{3}+\frac{30}{100}\times\frac{2}{3}=10\%;$$

$$E\left(r_B\right)=-\frac{16}{100}\times\frac{1}{2}+\frac{40}{100}\times\frac{1}{2}=12\%.$$

则 A 的期望收益率是 10%，B 的期望收益率是 12%，若投资者按照投资组合为(1/2, 1/2)的方案进行投资，则其投资组合的收益率 r_p 也是随机变量，其期望为

$$E\left(r_p\right)=E\left[\frac{1}{2}r_A+\frac{1}{2}r_B\right]=\frac{1}{2}E\left(r_A\right)+\frac{1}{2}E\left(r_B\right)=11\%.$$

从期望收益率的角度看，风险资产 B 的期望收益率高于 A，且高于组合后的期望收益率，即方案(b)优于方案(c)，方案(c)优于组合方案(a)；

下面计算三种投资方案的方差；

$$\sigma_A^2=\left(-0.3-0.1\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(0.3-0.1\right)^2\times\frac{2}{3}=0.08;$$

$$\sigma_B^2=\left(-0.2-0.12\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(0.4-0.12\right)^2\times\frac{1}{2}=0.0904;$$

$$\sigma_p^2=\frac{1}{4}\times\sigma_A^2+\frac{1}{4}\times\sigma_B^2=0.0426.$$

通过计算发现风险资产 A 与风险资产 B 的方差相差不大，即风险接近，但组合后的方差却明显减小很多，再综合前面计算的期望收益率值进行考虑，发现组合后的投资方案，虽然期望收益率略低于风险资产 B 的期望收益率，但风险却大大减少了；下面我们计算三种风险资产的夏普比率，用来衡量每承担一个风险，风险资产所获得的超额收益：

$$\text{夏普比率}=\frac{r_i-r_f}{\sigma_i},\ i=A,B,p.$$

若假设无风险利率为常数 5%，则可计算得到三个夏普比率值分别为：0.177，0.233，0.291，因此三种方案综合对比，方案(c)较优。

该例中我们涉及到了经济、金融领域中的投资决策问题，对于投资者而言，投资组合的选择不仅仅取决于资产的预期收益和风险，还取决于投资者的风险态度。不同类型的投资者在面对风险时会采取不同的决策行为，根据期望效用理论可知，投资者选择使期望效用值达到最大的投资组合为最优投资组合。关于投资组合理论更详细的内容，读者可参考文献[6]。

3. 结束语

数学期望是刻画随机变量性质的核心数字特征之一，它通过将不确定性转化为可计算的预期值，体现了“概率思维”的力量，是“随机性中的必然性”的数学表达。在理性决策中，数学期望如同一把“隐形坐标尺”，为我们在不确定的世界中提供方向。从赌场博弈到金融市场，从科学实验到社会治理，数学期望广泛应用于各类量化分析场景，宛如一枚指南针，引导人类以理性方式应对风险和选择。

本文首先介绍数学期望的定义与基本性质，帮助学生建立系统的概念框架。随后，通过典型实例讲解其计算方法，并展示其在日常生活和实际问题中的多样化应用，使学生切实体会到“数学的确有用”。这一过程不仅有助于实现理论与实践的有机结合，也有助于激发学习兴趣，为后续深入学习《概率论与数理统计》打下坚实基础。

参考文献

[1] Huygens, C. (1657) De Ratiociniis in Ludo Aleae. Hagae-Comitum.

[2] Bernoulli, J. (1713) Ars coniectandi. Basel.

[3] Laplace, P.-S. (1820) Théorie analytique des probabilités. Courcier.

[4] Kolmogorov, A.N. (1933) Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-49888-6

[5] 王松桂, 张忠占, 程维虎, 高旅端. 概率论与数理统计[M]. 北京: 科学出版社, 2023.

[6] Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x