

N 价图的 $P_2(G)$ 不变量

杨琦*, 李佳, 冷旭东

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年7月12日; 录用日期: 2025年8月5日; 发布日期: 2025年8月12日

摘要

本文主要利用Jones-Wenzl幂等元的递归关系式中当 $n=2$ 时的情况, 给出了 n 价顶点拆接关系式, 根据该拆接关系式给出 n 价空间图的 $P_2(G)$ 不变量。

关键词

空间图, 嵌入图不变量, 着色Jones多项式

$P_2(G)$ Invariant of N -Valent Graphs

Qi Yang*, Jia Li, Xudong Leng

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jul. 12th, 2025; accepted: Aug. 5th, 2025; published: Aug. 12th, 2025

Abstract

This paper mainly uses the case when $n=2$ in the recursive relation of Jones-Wenzl idempotents to present the skein relation of n -valent vertices, and based on this skein relation, gives the invariant of n -valent spatial graphs.

Keywords

Spatial Graph, N -Valent Embedded Graphs, Colored Jones Polynomial

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

*通讯作者。

文章引用: 杨琦, 李佳, 冷旭东. N 价图的 $P_2(G)$ 不变量[J]. 应用数学进展, 2025, 14(8): 109-116.

DOI: 10.12677/aam.2025.148375

1. 引言

纽结可以看作 S^1 在 E^3 中的嵌入，它的分类问题是三维流形中的重要课题，Kauffman 尖括号多项式 [1] 和 Jones 多项式 [2] 在其中发挥了重要作用，作为 Jones 多项式的推广，着色琼斯多项式 (colored Jones polynomial) 在 1986 年被 E. Witten [3] 率先发现，在 Rashetikin 和 Turaev 的方法下，可由量子群 $U_a(sl_2)$ 的 n 维表示 [4] 得到。与之等价地，我们还可以利用 Temperley-Lieb 代数 [5] 和 Jones-Wenzl 幂等元 [6] 来定义着色琼斯多项式，其中 Jones-Wenzl 幂等元具有很好的性质，例如幂等性。

本文主要对 Kauffman 和 Lins [5] 引入的 3 价嵌入图的 $P_2(G)$ 不变量进行推广，推广到 n 价嵌入图不变量，给出了 n 价顶点的拆接关系式并计算了由不同价数的顶点组合而成的空间图。在预备知识部分我们将介绍 Temperley-Lieb 代数的定义、Jones-Wenzl 幂等元的递归关系式。在第二部分我们将介绍空间图理论与 $P_2(G)$ 不变量的一些基本概念。第三部分给出了 n 价嵌入图的 $P_2(G)$ 不变量的计算公式，并举了由不同价数的嵌入图不变量组成的稍复杂空间图的例子。

2. 预备知识

2.1. Temperley-Lieb 代数的定义

定义 2.1 [5] Temperley-Lieb 代数是 $Z[A, A^{-1}]$ 上的自由加法代数，具有基本缠结 $U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \in T_n$ ，这里 T_n 代表 n 股缠结构成的 Temperley Lieb 代数。也就是说，每个 U_i 是具有 n 个输入股和 n 个输出股的缠结，在 U_i 中，第 k 个输入端连接到第 k 个输出端，这里 $k \neq i, i+1$ ，而第 i 个输入端连接到第 $i+1$ 个输入端，第 i 个输出端连接到第 $i+1$ 个输出端。

下面以 T_4 为例，列举出其中的四个基本缠结，如图 1。



Figure 1. The elementary tangles of T_4

图 1. T_4 中的基本缠结

2.2. Temperley-Lieb 代数的性质

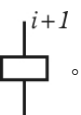
性质 2.2 [5]

- 1) $U_i^2 = dU_i$ ， d 表示分配给闭环的值。
- 2) $U_i U_{i+1} U_i = U_i$ 。
- 3) $U_i U_j = U_j U_i$ ， $|i - j| > 1$ 。

上式缠结的乘积是将第一个缠结的输出股线连接到第二个缠结的输入股线。

2.3. Jones-Wenzl 投影算子

定义 2.3 [5] 下面通过递归公式定义了 Temperley-Lieb 代数中的标准投影算子 $f_i (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ，

投影算子可图解地表示为 $f_i =$ 。

$$1) f_0 = 1_n.$$

$$2) f_{k+1} = f_k - \mu_{k+1} f_k U_{k+1} f_k.$$

这里 $\mu_1 = d^{-1}$, $\mu_{k+1} = (d - \mu_k)^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ 。

引理 2.4 [6] Jones-Wenzl 投影算子具有以下特性

$$1) f_i^2 = f_i, \quad (i=0,1,2,\dots,n-1).$$

$$2) f_i U_j = U_j f_i = 0, \quad j \geq i.$$

例如:

$$f_1 = \begin{array}{|c|} \hline \text{box} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} - \frac{1}{d} \begin{array}{|c|} \hline \cup \\ \hline \end{array} \quad \text{公式(2.1)}$$

$$f_1 U_1 = \begin{array}{|c|} \hline \text{box} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \cup \\ \hline \end{array} - \frac{1}{d} \begin{array}{|c|} \hline \cup \\ \hline \end{array} = 0. \quad \text{公式(2.2)}$$

3. 空间图理论

3.1. Reidemeister 变换

定义 3.1 [7] Reidemeister 变换如下(图 2):

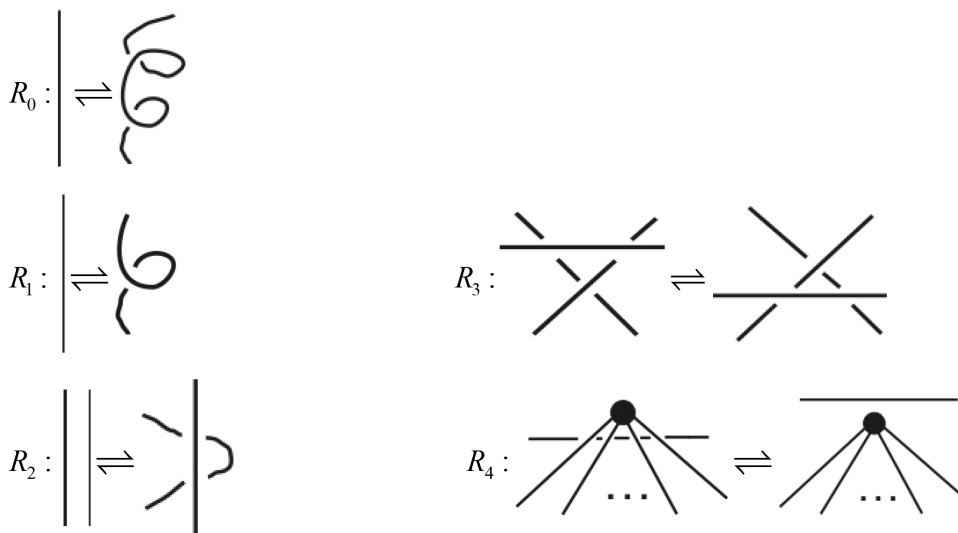


Figure 2. Reidemeister move

图 2. Reidemeister 变换

其中变换 R_0 可以由 R_1 生成。由 R_0 和 $R_2, \dots, R_4$ 生成的形变称为正则形变。这里我们研究的 $P_2(G)$ 不变量在 R_2, R_3, R_4 变换下保持不变。在没有图形顶点的位置上, 不变量在 R_2 和 R_3 (正则变换)变换下保持不变, 并且图形顶点展开后是平面缠结的形式, 所以不变量在 R_4 变换下保持不变。

3.2. 三价顶点定义

定义 3.2 [5] 在这个定义中, 我们将一个缠结的和与一个三价图顶点联系起来, 如图 3, 顶点和缠结之和可以互换使用, 顶点上的每一条线都用正整数 a, b, c 标记。假设 $(a+b-c)$, $(a+c-b)$ 和 $(b+c-a)$ 均为正偶数。这里 $m = \frac{(a+b-c)}{2}$, $n = \frac{(a+c-b)}{2}$, $p = \frac{(b+c-a)}{2}$ 。

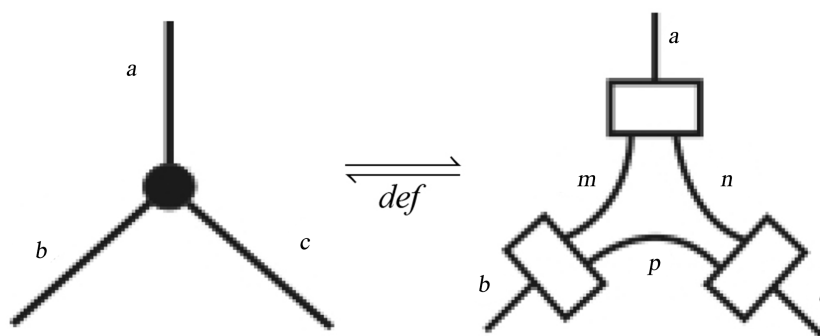


Figure 3. The definition of 3-valent graphical vertex
图 3. 三价图顶点的定义

3.3. $P_2(G)$ 不变量的定义

定义 3.3 [5]: $P_2(G) = \langle 2 * G \rangle$, 这里 $\langle \rangle$ 代表尖括号多项式的求值, $2 * G$ 代表将 G 的每条股线替换为 2 条平行股线得到的网络。下面我们将给出价数为 3 时 $P_2(G)$ 不变量, 让 $[G]$ 代表 $P_2(G)$, 因此, 对于一个链环 K 有 $[K] = \langle 2 * K \rangle$ 并且:

$$\left[\begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \right] = \left\langle \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 2 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{box} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{box} \end{array} \right\rangle$$

为了方便后面计算, 我们约定

$$\begin{aligned} 1) & \left[\text{---} \bullet \right] = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle \\ 2) & \left[\bullet \text{---} \bullet \right] = \left\langle \bigcirc \right\rangle = d \\ 3) & \left[\bigcirc \right] = \left\langle \bigodot \right\rangle = d^2 \\ 4) & \left[\begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \right] = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

引理 3.4 [5]: 依据公式(2.1)和公式(2.2)可以计算出一个三价顶点连接一个实心小圆点是等于零的, 此引理也为后文例 4.4 的计算过程提供帮助。

$$\left[\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \right] = \left\langle \begin{array}{c} \text{box} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{box} \end{array} \right\rangle = 0$$

引理 3.5 [5]

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \right] &= \left\langle \begin{array}{c} \text{box} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{box} \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right\rangle - \frac{1}{d} \left(\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagup \end{array} \right\rangle \right) + \frac{2}{d^2} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

把 3.3 节的约定(1)~(4)应用到引理 3.5 上, 可以得到:

$$\left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right] + \frac{2}{d^2} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right]$$

引理 3.6 [5]:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] &= A^4 \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] + A^{-4} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right] + A^2 \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + A^2 \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] + A^{-2} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] \\ &+ A^{-2} \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] \\ &+ (A^2 + A^{-2}) \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] \end{aligned}$$

该引理给出了交叉点的拆接关系式，可以用该引理结合定理 4.2 计算 n 价嵌入图不变量。

4. n 价嵌入图不变量

4.1. 计算四价嵌入图不变量

对于 n 价嵌入图不变量，我们继续研究着色为 2 时的情况。因此，对于一个链环 K 有 $[K] = \langle 2 * K \rangle$ ，其中 4 价嵌入图不变量的 4 价顶点有以下关系式：

例 4.1:

$$\left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] = \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right\rangle = \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left(\left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] \right)$$

证明:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left(\left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] \right) \\ &= \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] + \frac{1}{d^2} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] + \frac{1}{d^2} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d^2} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d^3} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] - \frac{1}{d} \left(\left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \right] \right) \\ &+ \frac{1}{d^2} \left(\left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] \right) \\ &- \frac{1}{d^3} \left(\left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] \right) + \frac{1}{d^3} \left(\left[\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right] \right) \end{aligned}$$

在此结果上应用约定(1)~(4)得到结果。

4.2. 推广的 n 价嵌入图不变量

定理 4.2 n 价嵌入图不变量中的 n 价顶点根据公式(2.1)打开 n 个投影算子后的局部空间投影图有如

下关系式:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with } n \text{ edges} \\ \vdots \end{array} \right] = \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^m \frac{1}{d^m} G_n^m + (-1)^{n-1} \frac{n-1}{d^{n-1}} G_n^n \quad (m=0,1,\dots,n-2) (n=3,4,\dots,n \in \mathbb{Z})$$

其中 G_n^m 表示对空间图作局部替换, 替换后得到原图中顶点上依次“拔出”1条边, 2条边…… m 条边, 使他们成为自由端点, 其余剩下的边由空心小圆点连接的 $\binom{n}{m}$ 个空间图情况的总和。 n 表示空间图中空心小圆点连接的边数, m 表示自由端点个数。

下面以三价图和四价图为例解释 G_n^m

$$G_3^0 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 3 edges} \\ \vdots \end{array} \right]$$

$$G_3^1 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 3 edges, one edge is a loop} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 3 edges, one edge is a loop} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 3 edges, one edge is a loop} \\ \vdots \end{array} \right]$$

$$G_3^3 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 3 edges, all edges are loops} \\ \vdots \end{array} \right]$$

$$G_4^0 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges} \\ \vdots \end{array} \right]$$

$$G_4^1 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, one edge is a loop} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, one edge is a loop} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, one edge is a loop} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, one edge is a loop} \\ \vdots \end{array} \right]$$

$$G_4^2 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, two edges are loops} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, two edges are loops} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, two edges are loops} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, two edges are loops} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, two edges are loops} \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, two edges are loops} \\ \vdots \end{array} \right]$$

$$G_4^4 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges, all edges are loops} \\ \vdots \end{array} \right]$$

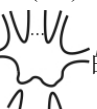
$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 3 edges} \\ \vdots \end{array} \right] = G_3^0 - \frac{1}{d} G_3^1 + \frac{2}{d^2} G_3^3$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram: a vertex with 4 edges} \\ \vdots \end{array} \right] = G_4^0 - \frac{1}{d} G_4^1 + \frac{1}{d^2} G_4^2 - \frac{3}{d^3} G_4^4$$

证明: n 价顶点空间图  按照公式(2.1)打开 n 个投影算子, 将得到 2^n 项。

每个投影算子都按照公式的第一项打开可以得到  , 记作 $\left(-\frac{1}{d}\right)^0 G_n^0$ 。

若 n 个投影算子其中的一个按照公式(2.1)的第二项打开, 其余 $n-1$ 个投影算子都按照公式(2.1)的第一项打开, 将得到 $-\frac{1}{d}$ 乘以 $\binom{n}{1}$ 个  的和, 记作 $-\frac{1}{d} G_n^1$ 。

若 n 个投影算子其中的两个按照公式(2.1)的第二项打开, 其余 $n-2$ 个投影算子都按照公式(2.1)的第一项打开, 将得到 $\left(-\frac{1}{d}\right)^2$ 乘以 $\binom{n}{2}$ 个  的和, 记作 $\left(-\frac{1}{d}\right)^2 G_n^2$ 。

如果 n 个投影算子其中的 $n-2$ 个按照公式(2.1)的第二项打开, 其余两个投影算子都按照公式(2.1)的第一项打开, 将得到 $\left(-\frac{1}{d}\right)^{n-2}$ 乘以 $\binom{n}{n-2}$ 个  的和, 记作 $\left(-\frac{1}{d}\right)^{n-2} G_n^{n-2}$ 。

以上, $\left(-\frac{1}{d}\right)^0 G_n^0 + \left(-\frac{1}{d}\right)^1 G_n^1 + \left(-\frac{1}{d}\right)^2 G_n^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{d}\right)^{n-2} G_n^{n-2} = \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^m \frac{1}{d^m} G_n^m$ 就是定理中的第一项。

如果 n 个投影算子其中的 $n-1$ 个投影算子都按照公式(2.1)的第二项打开, 只有一个按照公式中的第一项打开, 将得到 $\binom{n}{1}$ 个 $\left(-\frac{1}{d}\right)^{n-1}$ 乘以 , 即 $(-1)^{n-1} \frac{1}{d^{n-1}} \cdot n \cdot G_n^n$ 。

如果每个投影算子都按照公式(2.1)的第二项打开得到 1 个 $\left(-\frac{1}{d}\right)^n$ 乘以 , 即 $(-1)^n \frac{1}{d^n}$ 乘以 , 记作 $(-1)^n \frac{1}{d^n} G_n^n$ 。

所以 $(-1)^{n-1} \frac{1}{d^{n-1}} \cdot n \cdot G_n^n + (-1)^n \frac{1}{d^n} \cdot G_n^n = (-1)^{n-1} \frac{n-1}{d^{n-1}} G_n^n$ 即为定理中的第二项。

综上, 定理得证。

该定理还可以结合引理 3.6 计算 n 价嵌入图不变量。

例 4.3: 计算 P_2 ()

$$\begin{aligned}
 \text{解: } P_2 \left(\text{genus-2 surface with 2 boundary components} \right) &= \left[\text{genus-2 surface with 2 boundary components} \right] \\
 &= \left[\text{genus-2 surface with 2 boundary components} \right] - \frac{1}{d} \left(\left[\text{genus-2 surface with 1 boundary component} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 1 boundary component} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 1 boundary component} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 1 boundary component} \right] \right) + \frac{1}{d^2} \left(\left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] \right) \\
 &\quad + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] - \frac{3}{d^3} \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] \\
 &= \left[\text{genus-2 surface with 2 boundary components} \right] \\
 &= \left[\text{genus-2 surface with 2 boundary components} \right] - \frac{1}{d} \left(\left[\text{genus-2 surface with 1 boundary component} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 1 boundary component} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 1 boundary component} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 1 boundary component} \right] \right) + \frac{1}{d^2} \left(\left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] \right) \\
 &\quad + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] + \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] - \frac{3}{d^3} \left[\text{genus-2 surface with 0 boundary components} \right] \\
 &= \langle \text{genus-2 surface with 2 boundary components} \rangle - \frac{1}{d} \left(\langle \text{genus-2 surface with 1 boundary component} \rangle + \langle \text{genus-2 surface with 1 boundary component} \rangle + \langle \text{genus-2 surface with 1 boundary component} \rangle + \langle \text{genus-2 surface with 1 boundary component} \rangle \right) + \frac{1}{d^2} \left(\langle \text{genus-2 surface with 0 boundary components} \rangle + \langle \text{genus-2 surface with 0 boundary components} \rangle \right) \\
 &\quad + \langle \text{genus-2 surface with 0 boundary components} \rangle + \langle \text{genus-2 surface with 0 boundary components} \rangle + \langle \text{genus-2 surface with 0 boundary components} \rangle + \langle \text{genus-2 surface with 0 boundary components} \rangle - \frac{3}{d^3} \langle \text{genus-2 surface with 0 boundary components} \rangle \\
 &= d^4 - \frac{1}{d} \cdot 4d^3 + \frac{1}{d^2} \cdot 6d^2 - \frac{3}{d^3} \cdot d
 \end{aligned}$$

$$= d^4 - 4d^2 + 6 - 3 \cdot \frac{1}{d^2}$$

在第二个等号中, 从第二项开始都有两个实心黑色小圆点相连, 根据公式(2.2)可知这些项都等于零, 所以在第三个等号中只留下了第一项, 后续继续应用公式可得到结果。

例 4.4: 计算 P_2 ()

$$\begin{aligned} \text{解: } P_2 \left(\text{Diagram} \right) &= \left[\text{Diagram} \right] \\ &= \left[\text{Diagram} \right] - \frac{1}{d} \left(\left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] \right) + \frac{2}{d^2} \left[\text{Diagram} \right] \\ &= \left[\text{Diagram} \right] \\ &= \left[\text{Diagram} \right] - \frac{1}{d} \left(\left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] \right) + \frac{2}{d^2} \left[\text{Diagram} \right] \\ &= \left[\text{Diagram} \right] - \frac{1}{d} \left[\text{Diagram} \right] \\ &= \left[\text{Diagram} \right] - \frac{1}{d} \left(\left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] \right) - \frac{3}{d^3} \left[\text{Diagram} \right] \\ &\quad + \frac{1}{d^2} \left(\left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] \right) \\ &\quad - \frac{1}{d} \left[\text{Diagram} \right] + \frac{1}{d^2} \left(\left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] \right) - \frac{3}{d^4} \left[\text{Diagram} \right] \\ &\quad - \frac{1}{d^3} \left(\left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] \right) \\ &= d^4 - 5d^2 - 4 \cdot \frac{1}{d^2} + 8 \end{aligned}$$

基金项目

国家自然科学基金项目(12001255)。

参考文献

- [1] Kauffman, L.H. (1987) State Models and the Jones Polynomial. *Topology*, **26**, 395-407. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(87\)90009-7](https://doi.org/10.1016/0040-9383(87)90009-7)
- [2] Jones, V.F.R. (1985) A Polynomial Invariant for Knots via Von Neumann Algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 103-111. <https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1985-15304-2>
- [3] Witten, E. (1989) Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, **121**, 351-399. <https://doi.org/10.1007/bf01217730>
- [4] Reshetikhin, N. and Turaev, V.G. (1991) Invariants of 3-Manifolds via Link Polynomials and Quantum Groups. *Inventiones Mathematicae*, **103**, 547-597. <https://doi.org/10.1007/bf01239527>
- [5] Kauffman, L.H. and Lins, S. (1994) Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds. Princeton University Press.
- [6] Prasolov, V.V. and Sossinsky, A.B. (1996) Knots, Links, Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 154). American Mathematical Society, 171-176. <https://doi.org/10.1090/mmono/154>
- [7] Yamada, S. (1989) An Invariant of Spatial Graphs. *Journal of Graph Theory*, **13**, 537-551. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190130503>