

基于化归思维的高等数学问题求解策略及应用研究

文生兰*, 韩艺兵, 孙铭娟

信息工程大学基础部, 河南 郑州

收稿日期: 2025年7月29日; 录用日期: 2025年8月22日; 发布日期: 2025年8月29日

摘要

化归思维是解决自然科学尤其是数学问题常采用的方法, 它能够把复杂、陌生的问题转化为简单、熟悉的问题, 有助于知识的迁移, 提高解决问题的效率, 本文以高等数学中常见问题的求解为例, 介绍常用的形式统一法和换元法实现问题转化的化归思维。

关键词

化归思维, 知识迁移, 形式统一法, 换元法

Research on Strategies and Applications for Solving Higher Mathematics Problems Based on Reduction Thinking

Shenglan Wen*, Yibing Han, Mingjuan Sun

Basic Department of Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Jul. 29th, 2025; accepted: Aug. 22nd, 2025; published: Aug. 29th, 2025

Abstract

Reduction thinking is a commonly used method for solving natural science, especially mathematical problems. It can transform complex and unfamiliar problems into simple and familiar ones, which helps to transfer knowledge and improve problem-solving efficiency. This article takes the solution of common problems in higher mathematics as an example to introduce the commonly used formal

*通讯作者。

unification method and substitution method to achieve problem transformation of reduction thinking.

Keywords

Reduction Thinking, Knowledge Transfer, Formal Unification Method, Substitution Method

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

化归思维,是将一个问题由难化易,由繁化简,由未知化已知的过程,它是转化和归结的简称。在数学领域,是一种重要的解题思想和思维策略。众多学者对化归思维展开研究:叶立军[1]探讨了化归思维中的极端化、特殊化、一般化、整体化方法;傅小波[2]研究了高等数学中的从特殊到一般的化归思维;张智倍,纪德生[3]探索了高等数学中离散化连续,多元化一元,无限化有限的化归思维;覃佳君[4]提出了知识迁移的方法;李霞[5]简述了高等数学教学中用已知探索未知,借助一元研究多元的化归思想;顾洁[6]讨论了初等数论中的化归思维方法。现有研究多聚焦一般化特殊,多元化一元的常用化归思路,对化归实现方法的多样性挖掘不足,未系统梳理基于形式统一与换元法的化归路径。本文以高等数学中一些常见问题的求解为例,深入探讨形式统一和换元这两种化归方法,弥补研究空白,为数学解题提供新视角,助力挖掘知识本质关联,辅助学习者打通解题思路。

2. 化归思维中形式统一法在解决数学问题中的应用

形式统一作为化归的核心方法,聚焦于对问题外在形式的规整重塑,借助将其转化为学习者已知且熟悉的数学模型,搭建解题思路的桥梁,深度挖掘数学知识间内在的本质关联。以极限问题求解为例,首先分析极限的类型(分析结构,如“ $\infty-\infty$ ”型),这是一种未定式,提到未定式,联想到洛必达法则,(类比已知)而洛必达法则直接适用于“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式极限,本着化未知为已知的化归思维,需要将所讨论的未定式极限转化成“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,也就是说,必须要出现分母,(挖掘特点)如果原式有分母,可通过通分合并,如果分子含根号,可通过分子有理化,有时候需要借助于换元(如倒代换“ $x=\frac{1}{t}$ ”),实现形式统一,达成化未知为已知的解目标。

在证明含有中值且与函数值和导数值都有关的等式时,罗尔定理是常用工具,(对比已知)其结论是导数零点的存在性 $f'(\xi)=0$,于是解题关键在于对所要证的结论变形,构造出 $F'(\xi)=0$ (形式统一),左端看成一个函数在某点 ξ 的导数值,然后逆向思维,倒着找求导前的函数 $F(x)$,最后通过验证辅助函数 $F(x)$ 满足罗尔定理的三个条件,用罗尔定理攻克未知等式的证明。

在用格林公式计算对坐标的曲线积分问题时,由于格林公式的条件要求积分弧段 L 分段光滑且封闭,被积函数在 L 所围的区域 D 上有一阶连续偏导。若曲线积分不满足积分弧段 L 封闭的条件,可通过添加辅助线使曲线封闭,然后用格林公式;若区域 D 内有偏导不连续的点,则用“打洞”法,将奇点去掉,然后在复联通区域上用格林公式,实现问题的转化。

以上均是通过分析结构、挖掘特点、类比已知、形式统一,最终找到解决问题的方法,实现问题的化归。

3. 以一道微分方程的求解为例说明换元法在化归思维中的应用

求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(\ln y - x)}$ 解。

分析:这是一道一阶微分方程,一阶微分方程常见可解类型有:可分离变量的微分方程(形式 $P(X)dX = Q(Y)dY$,通过变量分离,两边积分求解),齐次方程(通过换元,转化成可分离变量),一阶线性微分方程(标准型是 $\frac{dY}{dX} + P(X)Y = Q(X)$,通解公式为 $Y = e^{-\int P(X)dX} \left(\int Q(X)e^{\int P(X)dX} dX + C \right)$),全微分方程($P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 中 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$)。这些已知类型是化归的“目标形式”,面对陌生方程,需转化成上述类型求解。观察待求解方程,它不属于上述类型,可通过以下换元法实现化归。

[法一]转化自变量与未知函数:将 x 看成未知函数, y 看成自变量,方程两边取倒数(实现化未知为已知),可变成

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = \frac{2\ln y}{y}$$

这是一个一阶线性微分方程,代入公式求解,得

$$x = e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{2\ln y}{y} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) = \ln y - \frac{1}{2} + \frac{C}{y^2}。$$

[法二]令 $\ln y - x = u$, 两边对 x 求导得, $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} - 1 = \frac{du}{dx}$, 原方程可变为 $y + y \frac{du}{dx} = \frac{y}{2u}$, 化简整理得 $\frac{du}{dx} = \frac{1-2u}{2u}$ (实现化未知为已知), 这是一个以 u 为未知函数, x 为自变量的可分离变量的微分方程, 将变量分离得 $\frac{2u}{1-2u} du = dx$, 两边积分得 $\frac{1}{2} \ln |1-2u| + u = C - x$, 带回原变量并化简得 $1 - 2\ln y + 2x = \frac{C_1}{y^2}$ 。

[法三]令 $\ln y - x = u$, 即 $x = \ln y - u$, 两边对 y 求导得, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{du}{dy}$, 原方程可变为 $\frac{1}{y} - \frac{du}{dy} = \frac{2u}{y}$, 化简整理得 $\frac{du}{dy} = \frac{1-2u}{y}$ (实现化未知为已知), 这是一个以 u 为未知函数, y 为自变量的可分离变量的微分方程, 将变量分离得 $\frac{du}{1-2u} = \frac{dy}{y}$, 两边积分得 $-\frac{1}{2} \ln |1-2u| = \ln |y| + C$, 带回原变量并化简得 $1 - 2\ln y + 2x = \frac{C_1}{y^2}$ 。

[法四]令 $\frac{y}{e^x} = t$, 即 $y = e^x t$, 两边对 x 求导得, $\frac{dy}{dx} = e^x t + e^x \frac{dt}{dx}$, 原方程可变为 $e^x t + e^x \frac{dt}{dx} = \frac{e^x t}{2\ln t}$, 化简整理得 $\frac{dt}{dx} = \frac{t(1-2\ln t)}{2\ln t}$ (实现化未知为已知), 这是一个以 t 为未知函数, x 为自变量的可分离变量的微分方程, 将变量分离得 $\frac{2\ln t dt}{t(1-2\ln t)} = dx$, 两边积分 $\int \left(\frac{1}{1-2\ln t} - 1 \right) d(\ln t) = \int dx$, 可得

$-\frac{1}{2}\ln|1-2\ln t|-\ln|t|=x+C$, 带回原变量并化简得 $1-2\ln y+2x=\frac{C_1}{y^2}$ 。

[法五]令 $\frac{x}{y}=v$, 即 $x=yv$, 两边对 y 求导得, $\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$, 原方程可变为 $v+y\frac{dv}{dy}=\frac{2\ln y}{y}-2v$, 化简整理得 $\frac{dv}{dy}+\frac{3v}{y}=\frac{2\ln y}{y^2}$ (实现化未知为已知), 这是一个以 v 为未知函数, y 为自变量的一阶线性微分方程, 代入公式求解, 得

$$v=e^{-\int\frac{3}{y}dy}\left(\int\frac{2\ln y}{y^2}e^{\int\frac{3}{y}dy}dy+C\right)=\frac{1}{y^3}\left(y^2\ln y-\frac{y^2}{2}+C\right)$$

带回原变量得原方程的通解为 $x=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}$ 。

微分方程的求解常借助换元实现化归: 如齐次方程借助换元转化为可分离变量的微分方程; 可化为齐次方程的, 通过换元转化为齐次方程; 可降阶的二阶微分方程, 凭借换元实现降阶; 欧拉方程利用换元转化成常系数线性微分方程。多样的换元方法, 为学习搭建思维拓展平台: 引导学生探讨不同换元路径, 能拓宽思维的广度和深度, 打破固定思维模式的局限; 在寻找解法的过程中, 学生依据题目的具体条件和要求, 灵活转换思考方向, 思维的灵活性得以提升, 面对复杂问题时, 也能快速筛选适配策略。从这一微分方程案例看, 思维灵活性的培养, 源于对同一问题多元转化路径的探索——学生不再囿于单一解法, 而是主动挖掘换元的多种可能, 在“变”中锻炼调整思路、适配问题的能力, 这启示教学中需为学生创造多元思考场景, 驱动思维突破惯性。

4. 结束语

本文以具体案例探讨了形式统一法和换元法在实现化归中的应用, 运用化归思维, 需从多元角度切入, 尝试多样转化路径, 这有助于锤炼思维的灵活性。在探索化归途径的过程中, 新想法常应运而生, 为创造性思维的发展注入动力。

本研究案例聚焦微分方程, 只是以其为代表说明多样化的换元在实现化归中的应用。未来研究可尝试将这种一题多解(多样换元)模式, 拓展至微分、积分、级数、几何等其他知识点教学(如三重积分的求解, 对坐标的曲面积分的求解等), 探究其对学生思维培养、知识掌握的有效性; 也可深入分析化归思维在跨学科问题解决中的迁移应用, 挖掘数学思维对综合学科能力提升的价值, 为数学教学与学习的纵深发展提供更多支撑。

参考文献

- [1] 叶立军. 化归思维在数学解题中的应用及其教学对策[J]. 杭州师范学院学报, 2003, 4(2): 72-76.
- [2] 傅小波. 高等数学中的一般化化归思维[J]. 考试周刊, 2010(40): 78-79.
- [3] 张智倍, 纪德生. 高等数学中化归思想的体现[J]. 高等数学研究, 2018, 21(2): 61-63.
- [4] 覃佳君. 高等数学课程中结构化思维培养的有效策略[J]. 学周刊, 2024(19): 49-52.
- [5] 李霞. 转化化归思想在高等数学教学中的应用[J]. 高教视野, 2013(21): 17, 19.
- [6] 顾洁. 初等数论中的化归思维方法[J]. 佳木斯教育学院学报, 2013(12): 214.