Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(9), 130-140
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.149407

块H-矩阵新的等价表征及谱分析

朱开心，谢智慧*，黄　琦

湖南科技学院理学院，湖南　永州

收稿日期：2025年8月9日；录用日期：2025年9月2日；发布日期：2025年9月10日

摘　要

本文首先给出了块严格 $S-\alpha$ 对角占优矩阵的一类等价条件，从而得到非奇异块H-矩阵新的判定条件。同时，给出了一类非奇异H-矩阵的特征值范围。最后通过例子说明了判定条件的有效性以及对近期结果的改进。

关键词

块H-矩阵，块严格 $S-\alpha$ 对角占优矩阵，谱分析

New Equivalent Characterizations and Spectral Analysis of Block H-Matrices

Kaixin Zhu, Zhihui Xie*, Qi Huang

College of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou Hunan

Received: Aug. 9th, 2025; accepted: Sep. 2nd, 2025; published: Sep. 10th, 2025

Abstract

This paper first presents a class of equivalent conditions for block strictly $S-\alpha$ diagonally dominant matrices, thereby obtaining new criteria for nonsingular block H-matrices. Meanwhile, it provides the eigenvalue range of a class of nonsingular H-matrices. Finally, examples are given to illustrate the effectiveness of the criteria and the improvement over recent results.

Keywords

Block H-Matrix, Block Strictly $S-\alpha$ Diagonal Dominance Matrix, Spectral Analysis

*通讯作者。

文章引用: 朱开心, 谢智慧, 黄琦. 块 H-矩阵新的等价表征及谱分析[J]. 应用数学进展, 2025, 14(9): 130-140.
DOI: 10.12677/aam.2025.149407

1. 引言

在矩阵理论这一充满深度与广度的研究领域中，矩阵分块技术凭借其独特的优势占据着举足轻重的地位，有着极为广泛的应用。它能够将复杂的高维矩阵问题巧妙分解为若干个低维子矩阵问题，极大地简化了矩阵的运算与分析过程，为众多矩阵理论难题的解决提供了关键思路。1962 年，Feingold 和 Varga 首次提出了分块矩阵的对角占优性，吸引众多学者对此进行了颇有价值的推广与改进。如李敏、孙玉祥、孙吉荣、高会双、Ren Y 等[1]-[12]诸多学者，分别利用了$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1} > (R_i)^{\alpha}(C_i)^{(1-\alpha)}$与$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1} > \alpha R_i + (1-\alpha)C_i$两种等价形式，以及相关的诸多块 H-矩阵类，从不同角度、不同层面深入探究，研究了一系列的块 H-矩阵等价形式的判定条件。这些条件为块 H-矩阵的识别与分析提供了有力的依据。不仅如此，部分学者还在此基础上，在等价形式的框架下进一步开展了矩阵特征值包含域的谱分析。

本文在诸多学者研究的基础上，主要结合文献[3]和文献[9]讨论了一类块 H-矩阵等价表征的新的判定条件。同时，针对该类块 H-矩阵，对其特征值包含域进行了细致且深入的分析，旨在进一步丰富块 H-矩阵的理论体系。最后，通过数值算例直观且有效地验证了新判定条件的可行性与有效性，充分展现了本研究的理论价值与实际意义。

2. 记号与相关定理定义

设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，且分块如下

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

其中 $A_{ij}\in M_{n_i}(C)$ 且非奇异，$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$，$i\in M=\{1,2,\cdots,m\}$。对 $\forall i,j\in M$ 给出定义 $R_i(A)=\sum_{j\neq i}\left\|A_{ij}\right\|=R_i$ 和 $C_i(A)=\sum_{j\neq i}\left\|A_{ji}\right\|=C_i$，记 $\sigma(A)$ 为矩阵 A 的谱，$\|\bullet\|$ 为任意的矩阵诱导范数。定义分块矩阵 A 的块比较矩阵 $T(A)=(t_{ij})_{m\times m}\in R^{m\times m}$，其中

$$t_{ij}=\begin{cases} \left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}, i=j \\ -\left\|A_{ij}\right\|, i\neq j \end{cases}, \quad \forall i,j\in M.$$

故可定义其范数矩阵为

$$A'=\begin{pmatrix} \left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1} & \left\|A_{12}\right\| & \cdots & \left\|A_{1m}\right\| \\ \left\|A_{21}\right\| & \left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1} & \cdots & \left\|A_{2m}\right\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\|A_{m1}\right\| & \left\|A_{m2}\right\| & \cdots & \left\|A_{mm}^{-1}\right\|^{-1} \end{pmatrix}.$$

记 S 是 M 的任意非空子集，$\bar{S}$ 是 M 中 S 的补集，即 $S,\bar{S}\subset M$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$，$S\cup\bar{S}=M$。

对 $\forall i\in S$，设 $R_i^S(A)=\sum_{t\in S,t\neq i}\|A_{it}\|=R_i^S$，$R_i^{\bar{S}}(A)=\sum_{t\in\bar{S}}\|A_{it}\|=R_i^{\bar{S}}$，$C_i^S(A)=\sum_{t\in S,t\neq i}\|A_{ti}\|=C_i^S$，$C_i^{\bar{S}}(A)=\sum_{t\in\bar{S}}\|A_{ti}\|=C_i^{\bar{S}}$，故有 $R_i=R_i^S+R_i^{\bar{S}}$，$C_i=C_i^S+C_i^{\bar{S}}$。另设 $r_i^S(A)=\sum_{t\in S,t\neq i}|a_{it}|$，$r_i^{\bar{S}}(A)=\sum_{t\in\bar{S}}|a_{it}|$，$c_i^S(A)=\sum_{t\in S,t\neq i}|a_{ti}|$，$c_i^{\bar{S}}(A)=\sum_{t\in\bar{S}}|a_{ti}|$，同样有 $r_i(A)=r_i^S(A)+r_i^{\bar{S}}(A)$，$c_i(A)=c_i^S(A)+c_i^{\bar{S}}(A)$。

对矩阵指标集进行划分，具体如下：

$$M_1=\left\{i\middle|R_i^S<\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}<C_i^S\right\},\ M_2=\left\{i\middle|C_i^S<\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}<R_i^S\right\},$$

$$M_3=\left\{i\middle|\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\geq C_i^S>R_i^S\right\},\ M_4=\left\{i\middle|\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\geq R_i^S>C_i^S\right\},$$

$$M_5=\left\{i\middle|\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}>C_i^S=R_i^S\right\},\ M_6=\left\{i\middle|\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\leq R_i^S,\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\leq C_i^S\right\},$$

显然，$M=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5\cup M_6$。

定义 1 [2] 存在 $\alpha\in[0,1]$ 和 $k\in N$，使得

$$|a_{ii}|>\left(r_i^S\right)^{\alpha}\left(c_i^S\right)^{1-\alpha}+r_i^{\bar{S}},S\subset N,|S|=k,\tag{2}$$

则称 A 为严格 $S-\alpha$ 对角占优矩阵。

定义 2 [5] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且分块如式(1)，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>(R_i)^{\alpha}(C_i)^{(1-\alpha)},\quad\forall i\in M,$$

则称 A 为严格 α_2 型块对角占优矩阵，记为 $A\in\alpha_2\text{-}BSD$。

定义 3 [6] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且分块如式(1)，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>\alpha R_i+(1-\alpha)C_i,\quad\forall i\in M,$$

则称 A 为严格 α_1 型块对角占优矩阵，记为 $A\in\alpha_1\text{-}BSD$。

引理 1 [6] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且分块如式(1)，若矩阵 A 满足 $A\in\alpha_1\text{-}BSD$ 或 $A\in\alpha_2\text{-}BSD$，则 A 是一个块 H-矩阵。

引理 2 [7] 若 τ,σ 为两个非负实数，则对 $\forall\alpha\in[0,1]$ 有

$$\alpha\tau+(1-\alpha)\sigma\geq\tau^{\alpha}\sigma^{(1-\alpha)},$$

当且仅当 $\alpha=0$ 或 $\alpha=1$ 时，有 $\tau=\sigma$。

引理 3 [4] 假设 $f(t)=at+b(1-t)$，对 $\forall t\in(0,1)$ 有

若 $a>b>0$，则 $f(t)$ 是一个单调递增的函数。

若 $b>a>0$，则 $f(t)$ 是一个单调递减的函数。

引理 4 [4] 对 $\forall\varepsilon>0\left(\varepsilon=o(x),x\to 0\right)$，定义

$$E=\left\{z\in C\middle||z-a|\leq b+\varepsilon\right\},\quad F=\left\{z\in C\middle||z-a|\leq b\right\},$$

有 $E=F$。

引理 5 [8] 设矩阵 $B=(b_{ij})\in C^{m\times m}$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}, i=j\\ \left\|A_{ij}\right\|, i\neq j\end{cases}, i,j\in M,$$

若矩阵 B 满足(2)式为严格 $S-\alpha$ 对角占优矩阵，则有

$$\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]>\left(R_i^S\right)^{\alpha}\left(C_i^S\right)^{1-\alpha},\quad S\subset N,|S|=k,$$

成立，并称矩阵 A 为块严格 $S-\alpha$ 对角占优矩阵。

证明 由定义 1 可知，若矩阵 B 满足(2)式为严格 $S-\alpha$ 对角占优矩阵，则存在正数 $x_1,x_2,\cdots,x_m>0$，使得

$$x_i\left|b_{ii}\right|>x_j\sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right|, i,j\in M.$$

作正对角矩阵 $X=diag\left\{x_1,x_2,\cdots,x_m\right\}$，即可得 BX 为严格对角占优矩阵。于是作 $X_1=diag\left\{x_1I_{n_1},x_2I_{n_2},\cdots,x_mI_{n_m}\right\}$，则 AX_1 为块严格对角占优矩阵，故有引理 5 结论成立。

引理 6 [3] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若 $M_6=\varnothing$，对 $\forall i\in M_1$，$\forall j\in M_2$ 有

$$\max_{j\in M_2}\frac{R_j-\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}}{R_j-C_j}<\min_{i\in M_1}\frac{\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i}{C_i-R_i},$$

则 A 为非奇异块 H-矩阵。

引理 7 [3] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若矩阵 $A\in\alpha_1\text{-}BSD$，那么

$$\sigma\left(A\right)\subseteq G\left(A\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\sigma\left(A_{ii}\right)\bigcup_{i\in M_1\cup M_3}G_i\bigcup_{j\in M_2\cup M_4\cup M_5}G_j,$$

其中

$$G_M=\bigcup_{i\in M}\left\{z\in C\left|\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}\leq R_i^{\bar{S}}\left(A\right)\right.\right\},$$

$$G_i=\left\{z\in C\left|\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}\leq\left(\min_{t\in M_2}\frac{\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t}{C_t-R_t}\right)R_i+\left(\max_{t\in M_2}\frac{C_t-\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}}{C_t-R_t}\right)C_i\right.\right\},\quad i\in M_1\cup M_3;$$

$$G_j=\left\{z\in C\left|\left\|\left(A_{jj}-zI_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1}\leq\left(\max_{v\in M_1}\frac{R_v-\left\|A_{vv}^{-1}\right\|^{-1}}{R_v-C_v}\right)R_j+\left(\min_{v\in M_1}\frac{\left\|A_{vv}^{-1}\right\|^{-1}-C_v}{R_v-C_v}\right)C_j\right.\right\},\quad j\in M_2\cup M_4\cup M_5.$$

引理 6 和引理 7 为文献[3]中的主要结果，本文在此基础上利用不等式的放缩技巧，扩大的块 H-矩阵的判定范围，给出一类新的等价表征，并对其进行谱分析。从而对文献[3]中的结果进行改进。

3. 主要结果

3.1. 定理 1

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若存在 $S,\bar{S}\subset M$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$，$S\cup\bar{S}=M$。对 $\forall i\in S$，有 $\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>R_i^S$，对 $\forall i\in M_1$，$\forall j\in M_2$ 有

$$\max_{j\in M_2}\frac{R_j^S-\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]}{R_j^S-C_j^S}<\min_{i\in M_1}\frac{\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]-R_i^S}{C_i^S-R_i^S},\tag{3}$$

当且仅当 $M_6=\varnothing$，则 A 为非奇异块 H-矩阵。

证明 充分性，对 $\forall i\in M_1$， $\forall j\in M_2$ 有

$$R_i^S<\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}<C_i^S，\quad C_j^S<\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}<R_j^S,$$

则有 $0<\dfrac{\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]-R_i^S}{C_i^S-R_i^S}<1$， $0<\dfrac{R_j^S-\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]}{R_j^S-C_j^S}<1$。

由(3)式和引理 2 可知，存在 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$\max_{j\in M_2}\frac{R_j^S-\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]}{R_j^S-C_j^S}<1-\alpha<\min_{i\in M_1}\frac{\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]-R_i^S}{C_i^S-R_i^S}, \tag{4}$$

故而可得

$$\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]>\alpha R_j^S+(1-\alpha)C_j^S\geq\left(R_j^S\right)^{\alpha}\left(C_j^S\right)^{1-\alpha},$$

$$\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]>\alpha R_i^S+(1-\alpha)C_i^S\geq\left(R_i^S\right)^{\alpha}\left(C_i^S\right)^{1-\alpha}.$$

对 $\forall i\in M_3\cup M_4\cup M_5$ 以及 $\forall\alpha\in(0,1)$，显然有

$$\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]>\alpha R_i^S+(1-\alpha)C_i^S\geq\left(R_i^S\right)^{\alpha}\left(C_i^S\right)^{1-\alpha},$$

由条件 $M_6=\varnothing$，对 $\forall i\in M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5\cup M_6$， $\exists\alpha\in(0,1)$，使得

$$\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]>\alpha R_i^S+(1-\alpha)C_i^S\geq\left(R_i^S\right)^{\alpha}\left(C_i^S\right)^{1-\alpha},$$

故 A 为非奇异块 H-矩阵。

必要性，因为 A 为非奇异块 H-矩阵，显然有 $M_6=\varnothing$，且对 $\forall i\in M_1$ 有

$$\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]>\alpha R_i^S+(1-\alpha)C_i^S\geq\left(R_i^S\right)^{\alpha}\left(C_i^S\right)^{1-\alpha},$$

故

$$1-\alpha<\frac{\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]-R_i^S}{C_i^S-R_i^S}. \tag{5}$$

而对 $\forall j\in M_2$，有 $\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]>\alpha R_j^S+(1-\alpha)C_j^S\geq\left(R_j^S\right)^{\alpha}\left(C_j^S\right)^{1-\alpha}$，故有

$$\frac{R_j^S-\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]}{R_j^S-C_j^S}<1-\alpha. \tag{6}$$

由(5)式和(6)式可知对 $\forall i\in M_1$， $\forall j\in M_2$ 有

$$\max_{j\in M_2}\frac{R_j^S-\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]}{R_j^S-C_j^S}<\min_{i\in M_1}\frac{\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]-R_i^S}{C_i^S-R_i^S}.$$

综上，矩阵 A 为非奇异块 H-矩阵。该定理对文献[3]中的引理 6 进行改进，相较于文献[3]中的结果，此定理的判定范围更广。最后由数值算例 2 进行相关证明。

3.2. 定理 2

设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且分块如式(1)，若矩阵 A 为非奇异块 H-矩阵，那么

$$\sigma(A)\subseteq G(A)=\bigcup_{i=1}^{m}\sigma(A_{ii})\bigcup G_M \bigcup_{i\in M_1\cup M_3} G_i \bigcup_{j\in M_2\cup M_4\cup M_5} G_j,$$

其中

$$G_M=\bigcup_{i\in M}\left\{z\in C\,\middle|\,\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}\le R_i^{\bar{S}}(A)\right\},$$

$$G_i=\left\{z\in C\,\middle|\,\left[\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}(A)\right]\le\left(\min_{t\in M_2}\frac{\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]-R_t^S}{C_t^S-R_t^S}\right)R_i^S+\left(\max_{t\in M_2}\frac{C_t^S-\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]}{C_t^S-R_t^S}\right)C_i^S\right\}$$

$i\in M_1\cup M_3$;

$$G_j=\left\{z\in C\,\middle|\,\left[\left\|\left(A_{jj}-zI_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}(A)\right]\le\left(\max_{v\in M_1}\frac{R_v^S-\left[\left\|A_{vv}^{-1}\right\|^{-1}-R_v^{\bar{S}}\right]}{R_v^S-C_v^S}\right)R_j^S+\left(\min_{v\in M_1}\frac{\left[\left\|A_{vv}^{-1}\right\|^{-1}-R_v^{\bar{S}}\right]-C_v^S}{R_v^S-C_v^S}\right)C_j^S\right\}$$

$j\in M_2\cup M_4\cup M_5$.

证明 因 $\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]>\alpha R_i^S+(1-\alpha)C_i^S$，$\alpha\in K$，其中

$$K=\left(\max_{j\in M_2}\frac{R_j^S-\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]}{R_j^S-C_j^S},\min_{i\in M_1}\frac{\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}\right]-R_i^S}{C_i^S-R_i^S}\right)\subset(0,1).$$

当 $\lambda\in\sigma(A_{ii})$，则 $\exists i\in M$，有 $\left[\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}(A)\right]\le\alpha R_i^S+(1-\alpha)C_i^S$，$\alpha\in K$。

接着根据引理 3 考虑以下五种情况：

若 $i\in M_1$，则 $0<R_i^S<C_i^S$，因为 $f(t)=R_i^St+C_i^S(1-t)$ 是一个单调递减的函数，故对 $\forall\varepsilon>0$，令 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{C_i^S-R_i^S}$，可以得到 $\varepsilon_1>0$ 和

$$\begin{aligned}\left[\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{\bar{S}}(A)\right]&\le\left(\min_{t\in M_2}\frac{\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]-R_t^S}{C_t^S-R_t^S}-\varepsilon_1\right)R_i^S+\left(1-\left(\min_{t\in M_2}\frac{\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]-R_t^S}{C_t^S-R_t^S}-\varepsilon_1\right)\right)C_i^S\\&=\left(\min_{t\in M_2}\frac{\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]-R_t^S}{C_t^S-R_t^S}-\varepsilon_1\right)R_i^S+\left(1-\left(1-\max_{t\in M_2}\frac{C_t^S-\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]}{C_t^S-R_t^S}\right)+\varepsilon_1\right)C_i^S\\&=\left(\min_{t\in M_2}\frac{\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]-R_t^S}{C_t^S-R_t^S}\right)R_i^S+\left(\max_{t\in M_2}\frac{C_t^S-\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]}{C_t^S-R_t^S}\right)C_i^S+\varepsilon_1\left(C_i^S-R_i^S\right)\\&=\left(\min_{t\in M_2}\frac{\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]-R_t^S}{C_t^S-R_t^S}\right)R_i^S+\left(\max_{t\in M_2}\frac{C_t^S-\left[\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}-R_t^{\bar{S}}\right]}{C_t^S-R_t^S}\right)C_i^S+\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$\lambda \in \left\{ z \in C \left| \left[\left\| \left(A_{ii} - zI_{n_i} \right)^{-1} \right\|^{-1} - R_i^{\bar{S}}(A) \right] \le \left(\min_{t \in M_2} \frac{\left[\left\| A_{tt}^{-1} \right\|^{-1} - R_t^{\bar{S}} \right] - R_t^S}{C_t^S - R_t^S} \right) R_i^S + \left(\max_{t \in M_2} \frac{C_t^S - \left[\left\| A_{tt}^{-1} \right\|^{-1} - R_t^{\bar{S}} \right]}{C_t^S - R_t^S} \right) C_i^S + \varepsilon \right. \right\}$$

$$\lambda \in G_i, \quad i \in M_1.$$

2) 若 $j \in M_2$，则 $0 < C_j^S < R_j^S$，因为 $f(t) = R_j^S t + C_j^S (1-t)$ 是一个单调递增的函数，故对 $\forall \varepsilon > 0$，令 $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_j^S - C_j^S}$，可以得到 $\varepsilon_2 > 0$ 和

$$\begin{aligned}
\left[\left\| \left(A_{jj} - zI_{n_j} \right)^{-1} \right\|^{-1} - R_j^{\bar{S}}(A) \right] &\le \left(\max_{v \in M_1} \frac{R_v^S - \left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right]}{R_v^S - C_v^S} + \varepsilon_2 \right) R_j^S + \left(1 - \left(\max_{v \in M_1} \frac{R_v^S - \left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right]}{R_v^S - C_v^S} + \varepsilon_2 \right) \right) C_j^S \\
&= \left(\max_{v \in M_1} \frac{R_v^S - \left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right]}{R_v^S - C_v^S} + \varepsilon_2 \right) R_j^S + \left(1 - \left(1 - \min_{v \in M_1} \frac{\left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right] - C_v^S}{R_v^S - C_v^S} \right) - \varepsilon_2 \right) C_j^S \\
&= \left(\max_{v \in M_1} \frac{R_v^S - \left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right]}{R_v^S - C_v^S} \right) R_i^S + \left(\min_{v \in M_1} \frac{\left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right] - C_v^S}{R_v^S - C_v^S} \right) C_j^S + \varepsilon_2 \left(R_j^S - C_j^S \right) \\
&= \left(\max_{v \in M_1} \frac{R_v^S - \left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right]}{R_v^S - C_v^S} \right) R_i^S + \left(\min_{v \in M_1} \frac{\left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right] - C_v^S}{R_v^S - C_v^S} \right) C_j^S + \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$\lambda \in \left\{ z \in C \left| \left[\left\| \left(A_{jj} - zI_{n_j} \right)^{-1} \right\|^{-1} - R_j^{\bar{S}}(A) \right] \le \left(\max_{v \in M_1} \frac{R_v^S - \left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right]}{R_v^S - C_v^S} \right) R_j^S + \left(\min_{v \in M_1} \frac{\left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right] - C_v^S}{R_v^S - C_v^S} \right) C_j^S + \varepsilon \right. \right\}$$

$$\lambda \in G_j, \quad j \in M_2.$$

3) 若 $i \in M_3$，则 $0 < R_i^S < C_i^S$，因为 $f(t) = R_i^S t + C_i^S (1-t)$ 是一个单调递减的函数，这与 1)类似，故可得 $\lambda \in G_i$，$i \in M_3$。

4) 若 $j \in M_4$，则 $0 < C_j^S < R_j^S$，因为 $f(t) = R_j^S t + C_j^S (1-t)$ 是一个单调递增的函数，这与 2)类似，故可得 $\lambda \in G_j$，$j \in M_4$。

5) 若 $j \in M_5$，则 $0 < C_j^S = R_j^S < \left[\left\| \left(A_{jj} - zI_{n_j} \right)^{-1} \right\|^{-1} - R_j^{\bar{S}}(A) \right]$，故有

$$\left[\left\| A_{jj}^{-1} \right\|^{-1} - R_j^{\bar{S}} \right] > \alpha R_j^S + (1-\alpha) C_j^S, \quad \alpha \in (0,1),$$

若令这 $\alpha = \max\limits_{v \in M_1} \dfrac{R_v^S - \left[\left\| A_{vv}^{-1} \right\|^{-1} - R_v^{\bar{S}} \right]}{R_v^S - C_v^S}$，则有

$$\left[\left\|\left(A_{jj}-zI_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}(A)\right]\le\left(\max_{v\in M_1}\frac{R_v^S-\left[\left\|A_{vv}^{-1}\right\|^{-1}-R_v^{\bar{S}}\right]}{R_v^S-C_v^S}\right)R_j^S+\left(\min_{v\in M_1}\frac{\left[\left\|A_{vv}^{-1}\right\|^{-1}-R_v^{\bar{S}}\right]-C_v^S}{R_v^S-C_v^S}\right)C_j^S,$$

即可得出 $\lambda\in G_j$， $j\in M_5$。

综上所述，矩阵 A 为非奇异块 H-矩阵且有 $M=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5$ 时，有

$$\sigma(A)\subseteq G(A)=\bigcup_{i=1}^{m}\sigma(A_{ii})\bigcup_{i\in M}G_M\bigcup_{i\in M_1\cup M_3}G_i\bigcup_{j\in M_2\cup M_4\cup M_5}G_j.$$

4. 论数值算例

4.1. 算例 1

考虑矩阵 A：

$$A=\begin{pmatrix}8&1&1&3&1&-1&1&0\\2&13&2&5&1&2&0&-1\\3&1&13&8&-1&1&1&-3\\0&1&7&31&1&1&2&1\\1&-4&1&1&14&2&1&2\\1&1&-1&1&1&35&-1&1\\1&0&1.5&0.5&0&0.5&7&2\\0&1&0&1&0.5&0&3&11\end{pmatrix}.$$

将矩阵 A 作如下分块，并得其范数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}&A_{24}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{34}\\A_{41}&A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}\left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1}&\|A_{12}\|&\|A_{13}\|&\|A_{14}\|\\\|A_{21}\|&\left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1}&\|A_{23}\|&\|A_{24}\|\\\|A_{31}\|&\|A_{32}\|&\left\|A_{33}^{-1}\right\|^{-1}&\|A_{34}\|\\\|A_{41}\|&\|A_{42}\|&\|A_{43}\|&\left\|A_{44}^{-1}\right\|^{-1}\end{pmatrix}.$$

即将矩阵 A 划分成每个子块均为 2×2 阶的分块矩阵。令 $S=\{1,2\}$，则 $\bar{S}=\{3,4\}$ 取范数为矩阵的 2-范数。

通过计算可以得

$$\left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1}=7.5964,\ \|A_{12}\|=6.2429,\ \|A_{13}\|=2.3028,\ \|A_{14}\|=1;$$

$$\|A_{21}\|=3.1796,\ \left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1}=10.2903,\ \|A_{23}\|=1.4142,\ \|A_{24}\|=3.1926;$$

$$\|A_{31}\|=4.1926,\ \|A_{32}\|=1.4142,\ \left\|A_{33}^{-1}\right\|^{-1}=13.8985,\ \|A_{34}\|=2.3028;$$

$$\|A_{41}\|=1,\ \|A_{42}\|=1.6283,\ \|A_{43}\|=0.5,\ \left\|A_{44}^{-1}\right\|^{-1}=5.8123.$$

对于定理 1 有以下结果：

第一行： $R_1^S=6.2429>\left[\left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1}-R_1^{\bar{S}}\right]=7.7964-2.3028-1=4.2936>C_1^S=3.1796$；

第二行： $R_2^S=3.1796<\left[\left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1}-R_2^{\bar{S}}\right]=10.2903-1.4142-3.1926=5.6835<C_2^S=6.2429$；

第三行：$C_3^{\bar{S}}=0.5<R_3^{\bar{S}}=2.3028<\left[\left\|A_{33}^{-1}\right\|^{-1}-R_3^S\right]=13.8985-4.1926-1.4142=8.2917$；

第四行：$R_4^{\bar{S}}=0.5<C_4^{\bar{S}}=2.3028<\left[\left\|A_{44}^{-1}\right\|^{-1}-R_4^S\right]=5.8123-1-1.6283=3.184$。

综上，$M_1=\{2\},M_2=\{1\},M_3=\{4\},M_4=\{3\},M_5=M_6=\varnothing$。将以上数据代入(4)式计算可得

$$0.6363\approx\frac{R_1^S-\left[\left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1}-R_1^{\bar{S}}\right]}{R_1^S-C_1^S}<\frac{\left[\left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1}-R_2^{\bar{S}}\right]-R_2^S}{C_2^S-R_2^S}\approx 0.8174.$$

根据定理 1 可知矩阵 A 为非奇异块 H-矩阵。

4.2. 算例 2

考虑矩阵 A：

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 13 & 2 & 5 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 13 & 8 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 31 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 14 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 35 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

将矩阵 A 作如下分块，并得其范数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix} \left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1} & \left\|A_{12}\right\| & \left\|A_{13}\right\| & \left\|A_{14}\right\| \\ \left\|A_{21}\right\| & \left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1} & \left\|A_{23}\right\| & \left\|A_{24}\right\| \\ \left\|A_{31}\right\| & \left\|A_{32}\right\| & \left\|A_{33}^{-1}\right\|^{-1} & \left\|A_{34}\right\| \\ \left\|A_{41}\right\| & \left\|A_{42}\right\| & \left\|A_{43}\right\| & \left\|A_{44}^{-1}\right\|^{-1} \end{pmatrix}.$$

即将矩阵 A 划分成每个子块均为 2×2 阶的分块矩阵。令 $S=\{1,2\}$，则 $\bar{S}=\{3,4\}$ 取范数为矩阵的 2-范数。

通过计算可以得

$$\left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1}=8.5114,\ \left\|A_{12}\right\|=6.2429,\ \left\|A_{13}\right\|=2.3028,\ \left\|A_{14}\right\|=1;$$

$$\left\|A_{21}\right\|=3.1796,\ \left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1}=10.2903,\ \left\|A_{23}\right\|=1.4142,\ \left\|A_{24}\right\|=3.1926;$$

$$\left\|A_{31}\right\|=4.1926,\ \left\|A_{32}\right\|=1.4142,\ \left\|A_{33}^{-1}\right\|^{-1}=13.8985,\ \left\|A_{34}\right\|=2.3028;$$

$$\left\|A_{41}\right\|=1,\ \left\|A_{42}\right\|=1.6283,\ \left\|A_{43}\right\|=0.5,\ \left\|A_{44}^{-1}\right\|^{-1}=5.8123.$$

对于引理 2 有：

第一行：$R_1=9.5457>\left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1}=8.5114>C_1=8.3722$；

第二行：$R_2=7.7864<C_2=9.2854<\left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1}=10.2903$；

第三行：$C_3=4.217<R_3=7.9096<\left\|A_{33}^{-1}\right\|^{-1}=13.8985$；

第四行：$R_4 = 3.1283 < \left\| A_{44}^{-1} \right\|^{-1} = 5.8123 < C_4 = 6.2206$。

综上，$M_1 = \{4\}, M_2 = \{1\}, M_3 = \{2\}, M_4 = \{3\}, M_5 = M_6 = \varnothing$。将以上数据代入(4)式计算可得

$$0.8814 \approx \frac{R_1 - \left\| A_{11}^{-1} \right\|^{-1}}{R_1 - C_1} > \frac{\left\| A_{44}^{-1} \right\|^{-1} - R_4}{C_4 - R_4} \approx 0.8680 .$$

这不满足引理 2 的条件。

对于本文定理 1 有以下结果：

第一行：$R_1^S = 6.2429 > \left[\left\| A_{11}^{-1} \right\|^{-1} - R_1^{\bar{S}} \right] = 8.5114 - 2.3028 - 1 = 5.2086 > C_1^S = 3.1796$；

第二行：$R_2^S = 3.1796 < \left[\left\| A_{22}^{-1} \right\|^{-1} - R_2^{\bar{S}} \right] = 10.2903 - 1.4142 - 3.1926 = 5.6835 < C_2^S = 6.2429$；

第三行：$C_3^{\bar{S}} = 0.5 < R_3^{\bar{S}} = 2.3028 < \left[\left\| A_{33}^{-1} \right\|^{-1} - R_3^S \right] = 13.8985 - 4.1926 - 1.4142 = 8.2917$；

第四行：$R_4^{\bar{S}} = 0.5 < C_4^{\bar{S}} = 2.3028 < \left[\left\| A_{44}^{-1} \right\|^{-1} - R_4^S \right] = 5.8123 - 1 - 1.6283 = 3.184$。

综上，$M_1 = \{2\}, M_2 = \{1\}, M_3 = \{4\}, M_4 = \{3\}, M_5 = M_6 = \varnothing$。将以上数据代入(4)式计算可得

$$0.3376 \approx \frac{R_1^S - \left[\left\| A_{11}^{-1} \right\|^{-1} - R_1^{\bar{S}} \right]}{R_1^S - C_1^S} < \frac{\left[\left\| A_{22}^{-1} \right\|^{-1} - R_2^{\bar{S}} \right] - R_2^S}{C_2^S - R_2^S} \approx 0.8174 .$$

根据定理 1 可知矩阵 A 为非奇异块 H-矩阵。

5. 总结

本文给出了块严格 $S-\alpha$ 对角占优矩阵的一类等价表征并理论证明其为非奇异块 H-矩阵，描述了其特征值包含域。数值算例 1 中可以看出定理 1 是成立的。数值算例 2 可以看出其判定范围相比于文献[3]中的结果是更加广泛的。因此，本文结果块 H-矩阵中可判定范围更加广泛，特征值包含域更加精确。

致 谢

感谢导师、师姐和同门对本项目的悉心指导和帮助，在此表示由衷的感谢！

基金项目

湖南省科研创新一般项目《广义严格对角占优矩阵的高效迭代算法研究(23C0342)》。

参考文献

[1] Feingold, D.G. and Varga, R. (1962) Block Diagonally Dominant Matrices and Generalizations of the Gerschgorin Circle Theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, **12**, 1241-1250. https://doi.org/10.2140/pjm.1962.12.1241

[2] Cvetković, L. (2006) H-Matrix Theory vs. Eigenvalue Localization. *Numerical Algorithms*, **42**, 229-245. https://doi.org/10.1007/s11075-006-9029-3

[3] Gao, H., Han, G., Sun, Y., Sun, F. and Ren, Y. (2020) Block H-Matrices and Spectrum of Block Matrices. *Journal of Physics*: *Conference Series*, **1575**, Article 012114. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1575/1/012114

[4] 李敏，孙玉翔. H-矩阵的实用判定及谱分析[J]. 高等学校计算数学学报, 2007(2): 117-125.

[5] 李庆春，刘磊，等. 矩阵对角占优性的推广[J]. 吉林师范学院学报, 1996(5): 4-7.

[6] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 1997(3): 216-223.

[7] Xu, C. and Xu, Z. (1991) Matrix Analysis. Northwestern Polytechnical University Press.

[8] 黄廷祝，蒲和平. (块)*H*-矩阵与亚正定矩阵[J]. 电子科技大学学报, 1998(2): 106-108.

[9] 李敏，孙玉翔. 块 α-对角占优矩阵的等价表征及应用[J]. 北华大学学报, 2008, 9(6): 485- 489.

[10] 孙吉荣，吴建勇，王焕东. 块 α-对角占优矩阵的等价表征及应用[J]. 武汉理工大学学报, 2009, 31(16): 200-204.

[11] 高会双，韩贵春. 块 α-对角占优矩阵的充要条件[J]. 湖北民族学院学报, 2017, 35(2): 131-133.

[12] Ren, Y. and Gao, H. (2022) Criteria for Block H-Matrices. 2022 8*th Annual International Conference on Network and Information Systems for Computers* (*ICNISC*), Hangzhou, 16-19 September 2022, 960-962. https://doi.org/10.1109/icnisc57059.2022.00193