Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(9), 123-129
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.149406

Hans汉斯

弱链对角占优M-矩阵$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$上界改进的估计式

赵仁庆

楚雄师范学院数学与统计学院，云南 楚雄

收稿日期：2025年8月9日；录用日期：2025年9月2日；发布日期：2025年9月10日

摘　要

本文研究弱链对角占优M-矩阵A的逆矩阵的无穷大范数上界估计问题，给出矩阵A及其逆矩阵元素关系的不等式，结合新不等式得到了$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$的上界新估计式，理论分析和数值算例表明新估计式改进了某些现有结果。

关键词

弱链对角占优矩阵，M-矩阵，无穷大范数，上界

Improved Estimation on Upper Bounds for $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$ of Weakly Chained Diagonally Dominant M-Matrices

Renqing Zhao

School of Mathematics and Statistics, Chuxiong Normal University, Chuxiong Yunnan

Received: Aug. 9th, 2025; accepted: Sep. 2nd, 2025; published: Sep. 10th, 2025

Abstract

In this paper, the problem of estimating the bounds of the infinite norm of the inverse matrix of a weakly chained dominant M-matrix A is studied. The inequalities of element relation on matrix A and its inverse matrix are given, combined with the new inequality, new estimation upper bounds of $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$ are obtained. The theory analysis and numerical examples show that the new estimations improve some of the related results.

文章引用: 赵仁庆. 弱链对角占优 M-矩阵$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$上界改进的估计式[J]. 应用数学进展, 2025, 14(9): 123-129.
DOI: 10.12677/aam.2025.149406

Keywords

Weakly Chained Diagonal Dominant Matrix, *M*-Matrix, Infinity Norms, Upper Bound

1. 引言

M-矩阵在生物学、数学、经济学、环境科学等领域具有广泛的应用价值，*M*-矩阵理论为这些问题的研究和解决提供了数学基础和工具。近年来众多学者对 *M*-矩阵的最小特征值、逆矩阵的无穷大范数、Hadamard 积的最小特征值界的估计等问题进行了大量研究，也给出了许多重要结果[1]-[9]。本文通过定义弱链对角占优 *M*-矩阵 A 的新参数，结合矩阵 A 的元素对其逆矩阵元素的界进行放缩，给出弱链对角占优 *M*-矩阵的 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ 的上界新估计式。

2. 预备知识

为叙述方便，先给出本文需要用到的一些记号。

用 $R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵的集合，记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 且 $d_i=\dfrac{\sum\limits_{j\in N,j\neq i}|a_{ij}|}{a_{ii}}$，

$$J(A)=\{i\in N:d_i<1\},\quad u_i=\frac{\sum\limits_{i+1\le j\le n}|a_{ij}|}{a_{ii}},\quad s_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|},\quad r_i=\max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|}\right\},$$

$$m_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i}{|a_{jj}|},\quad q_{ji}=\min\{s_{ji},m_{ji}\},\quad h_{ji}=\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|q_{ji}-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|q_{ki}},\quad h_i=\max_{j\neq i}\{h_{ji}\}。$$

$$v_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|q_{ki}h_i}{|a_{jj}|},\quad p_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|v_{ki}}{|a_{jj}|},\quad p_i=\max_{i\le j\le n}\{p_{ji}\}。$$

定义 1.1 [2] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，如果对任意的 $i,j\in N$，$i\neq j$，都有 $a_{ij}\le 0$，则称 A 为 *Z*-矩阵，记为 $A\in Z_n$。设 $A\in Z_n$，则 A 可表示为 $A=sI-B$，其中 $B\ge 0$。当 $s\ge\rho(B)$ 时，则称 A 为 *M*-矩阵；当 $s>\rho(B)$ 时，则称 A 为非奇异 *M*-矩阵。

定义 1.2 [1] [2] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，如果满足下面条件

(1) $|a_{ii}|\ge\sum\limits_{j\in N,j\neq i}|a_{ij}|$，$i\in N$；

(2) $J(A)\neq\Phi$；

(3) 对于任意 $i\in N,i\notin J(A)$，存在非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rk}\neq 0$，其中 $i\neq i_1$，$i_1\neq i_2$，$i_r\neq k$，$k\in J(A)$，则称 A 为弱链对角占优矩阵。

引理 1.1 [1] [2] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 *M*-矩阵，则 $A^{(k,n)}\,(k=1,\cdots,k-1)$ 也是弱链对角占优

M-矩阵。这里 $A^{(n_1,n_2)}$ 表示由 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 的 n_1 至 n_2 行和 n_1 至 n_2 列的元素组成的子矩阵。

引理 1.2 [1] [2] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，$B=A^{(2,n)}$，$A^{-1}=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$，$B^{-1}=(\beta_{ij})_{i,j=2}^{n}$，有

$$\alpha_{11}=\frac{1}{\Delta},\quad \alpha_{i1}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1}),\quad \alpha_{1j}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\beta_{kj}(-a_{1k}),\quad \alpha_{ij}=\beta_{ij}+\alpha_{1j}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1}).$$

其中，$\Delta=a_{11}-\sum_{k=2}^{n}a_{1k}\left[\sum_{i=2}^{n}\beta_{ki}a_{i1}\right]$。

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，P N Shivakumar 在文献[2]中给出

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\le\sum_{i=1}^{n}\left[a_{ii}\prod_{j=1}^{i}(1-u_j)\right]^{-1}. \tag{1}$$

2012 年，潘淑珍等在文献[3]给出优于文献[2]的弱链对角占优 M-矩阵的上界估计式

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\le\frac{1}{a_{11}(1-u_1t_1)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}(1-u_it_i)}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{u_j}{1-u_jt_j}\right)\right]. \tag{2}$$

其中

$$t_{ki}=\begin{cases}\dfrac{|a_{ki}|}{|a_{kk}|-\sum\limits_{j=i+1,\,j\ne k}^{n}|a_{kj}|}, & |a_{ki}|\ne 0,\\ 0, & |a_{ki}|=0.\end{cases}\qquad t_i=\begin{cases}\max\limits_{i+1\le k\le n}t_{ki}, & 1\le i\le n-1,\\ 0, & i=n.\end{cases}$$

3. 弱链对角占优矩阵的$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$的上界估计

本节给出 $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$ 上界的一些新估计式，为此给出以下引理。

引理 2.1 [1] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，$A^{-1}=(\alpha_{ij})$，则

$$|\alpha_{ji}|\le\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\ne i,j}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|}|\alpha_{ii}|=s_{ji}|\alpha_{ii}|,\quad i\ne j. \tag{3}$$

引理 2.2 [3] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，$n\ge 2$，$A^{-1}=(\alpha_{ij})$，满足 $u_1<1$，则

$$\alpha_{11}\le\frac{1}{a_{11}(1-t_1u_1)}. \tag{4}$$

引理 2.3 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，$A^{-1}=(\alpha_{ij})$，则

$$|\alpha_{ji}|\le\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\ne i,j}|a_{jk}|v_{ki}}{a_{jj}}|\alpha_{ii}|=p_{ji}|\alpha_{ii}|\le p_i|\alpha_{ii}|\le|\alpha_{ii}|,\quad i\ne j. \tag{5}$$

证明 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，则 $|a_{jj}|\ge\sum_{k\ne j}|a_{jk}|=\sum_{k\ne j,i}|a_{jk}|+|a_{ji}|$，所以 $0\le\dfrac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum_{k\ne j,i}|a_{jk}|}\le 1$，由 r_i 的定义知 $0\le r_i\le 1$，故 $r_i\ge\dfrac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum_{k\ne j,i}|a_{jk}|}$，即 $r_i\ge\dfrac{|a_{ji}|+\sum_{k\ne j,i}|a_{jk}|r_i}{|a_{jj}|}=m_{ji}$，则

$0 \le m_{ji} \le r_i \le 1$。因为 $A=(a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，所以 $0 \le s_{ji} \le d_i \le 1$。

由 q_{ji} 的定义知 $0 \le q_{ji} \le 1$。当 $q_{ji}=m_{ji}$ 时，有

$$0 \le h_{ji} = \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|q_{ji} - \sum\limits_{k\ne j,i}|a_{jk}|q_{ki}} = \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|m_{ji} - \sum\limits_{k\ne j,i}|a_{jk}|m_{ki}} = \frac{|a_{ji}|}{|a_{ji}| + \sum\limits_{k\ne j,i}|a_{jk}|(r_i - m_{ki})} \le 1.$$

当 $q_{ji}=s_{ji}$ 时，有

$$0 \le h_{ji} = \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|q_{ji} - \sum\limits_{k\ne j,i}|a_{jk}|q_{ki}} = \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|s_{ji} - \sum\limits_{k\ne j,i}|a_{jk}|s_{ki}} = \frac{|a_{ji}|}{|a_{ji}| + \sum\limits_{k\ne j,i}|a_{jk}|(d_i - s_{ki})} \le 1.$$

故 $0 \le h_i \le 1$。

设

$$h_i(\varepsilon,1) = \max_{j\ne i}\{h_{ji}(\varepsilon,1)\}, \quad h_{ji}(\varepsilon,1) = \begin{cases} \dfrac{|a_{ji}|+\varepsilon}{|a_{jj}|q_{ji} - \sum\limits_{k\ne j,i}|a_{jk}|q_{ki}}, & i \in J(A), \\ 1, & i \in N, i \notin J(A). \end{cases}$$

在此不妨假设 $q_{ji}=s_{ji}$，则

$$q_{ji}(\varepsilon,1) = s_{ji}(\varepsilon,1) = \begin{cases} \dfrac{|a_{ji}| + \sum\limits_{k\ne j,i}|a_{jk}|d_k + \varepsilon}{|a_{jj}|}, i \in J(A), \\ 1, \qquad i \in N, \notin J(A). \end{cases}$$

其中 ε 为使得 $0 < h_i(\varepsilon,1), s_{ji}(\varepsilon,1) \le 1$ 的充分小的正数。设

$$D_j(\varepsilon,1) = \left(q_{1i}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1), \cdots, q_{i-1,i}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1), 1, q_{i+1,i}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1), \cdots, q_{ni}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1)\right), \quad i \in N.$$

显然，当 $D_j(\varepsilon,1) = diag(1,1,\cdots,1) = I$ 时，$AD_j(\varepsilon,1)$ 是弱链对角占优矩阵，且当 $D_j(\varepsilon,1) \ne I$ 时，$AD_j(\varepsilon,1)$ 是严格对角占优矩阵，所以，$AD_j(\varepsilon,1)$ 一定是弱链对角占优矩阵，由引理 2.1 得

$$\frac{\alpha_{ji}}{q_{ji}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1)} \le \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\ne i,j}|a_{jk}|q_{ki}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1)d_{ki}^{(1)}(\varepsilon,1)}{a_{jj}q_{ji}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1)}|\alpha_{ii}|, j \ne i.$$

其中 $d_{ki}^{(1)}(\varepsilon,1) = \dfrac{|a_{ki}| + \sum_{t\ne k,i}|a_{kt}|q_{ti}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1)}{|a_{kk}|q_{ki}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1)}$，则

$$\alpha_{ji} \le \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\ne i,j}|a_{jk}|\dfrac{|a_{ki}| + \sum_{t\ne k,i}|a_{kt}|q_{ti}(\varepsilon,1)h_i(\varepsilon,1)}{|a_{kk}|}}{a_{jj}}|\alpha_{ii}|, \quad j \ne i.$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，有

$$\alpha_{ji} \le \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\ne i,j}|a_{jk}|\dfrac{|a_{ki}| + \sum_{t\ne k,i}|a_{kt}|q_{ti}h_i}{|a_{kk}|}}{a_{jj}}|\alpha_{ii}| = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\ne i,j}|a_{jk}|v_{ki}}{a_{jj}}|\alpha_{ii}|, j \ne i.$$

即 $\alpha_{ji} \le p_{ji}|\alpha_{ii}| \le p_i|\alpha_{ii}| \le |\alpha_{ii}|,\ j \ne i$。

引理 2.4 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，$A^{-1}=\left(\alpha_{ij}\right)$，则

$$\frac{1}{a_{ii}}\le\alpha_{ii}\le\frac{1}{a_{ii}-\sum_{j\ne i}\left|a_{ij}\right|p_{ji}}. \tag{6}$$

证明 类似于文献[4]中的引理 2.3 的证明，可证结论成立。

定理 2.1 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，$B=A^{(2,n)}$，$A^{-1}=\left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ 且 $B^{-1}=\left(\beta_{ij}\right)_{i,j=2}^{n}$，则

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\le\frac{1}{a_{11}\left(1-d_1t_1\right)}+\frac{\max\left\{d_1,1+\left(p_1-t_1\right)d_1\right\}}{1-d_1t_1}\left\|B^{-1}\right\|_{\infty}. \tag{7}$$

证明 设 $\eta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}$，$M_A=\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$，$M_B=\left\|B^{-1}\right\|_{\infty}$，则 $M_A=\max_{i\in N}\left\{\eta_i\right\}$，$M_B=\max_{2\le i\le n}\left\{\sum_{j=2}^{n}\beta_{ij}\right\}$。由引理 1.2 和(4)式可得

$$\begin{aligned}\eta_1&=\alpha_{11}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}=\alpha_{11}+\frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\left(-a_{1k}\right)\sum_{j=2}^{n}\beta_{kj}\\&\le\alpha_{11}+\frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\left(-a_{1k}\right)M_B=\alpha_{11}+\alpha_{11}a_{11}d_1M_B\\&\le\frac{1}{a_{11}\left(1-d_1t_1\right)}+\frac{d_1}{1-d_1t_1}M_B.\end{aligned}$$

当 $2\le i\le n$ 时，由引理 1.2 和(5)式得

$$\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}\left(-a_{k1}\right)=\Delta\alpha_{i1}\le\Delta p_1\alpha_{11}=p_1\le 1. \tag{8}$$

故对 $2\le i\le n$，由引理 1.2，(5)和(8)式知

$$\begin{aligned}\eta_i&=\alpha_{i1}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{ij}=\alpha_{i1}+\sum_{j=2}^{n}\left(\beta_{ij}+\alpha_{1j}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}\left(-a_{k1}\right)\right)\\&\le p_1\alpha_{11}+\sum_{j=2}^{n}\left(\beta_{ij}+\alpha_{1j}p_1\right)=\eta_1p_1+\sum_{j=2}^{n}\beta_{ij}\le\eta_1p_1+M_B.\end{aligned}$$

若 $\eta_1\le p_1\eta_1+M_B$，则

$$\begin{aligned}M_A&=\max_{2\le i\le n}\left|\eta_i\right|\le p_1\eta_1+M_B\le p_1\left(\frac{1}{a_{11}\left(1-d_1t_1\right)}+\frac{d_1}{1-d_1t_1}M_B\right)+M_B\\&=\frac{p_1}{a_{11}\left(1-d_1t_1\right)}+\frac{1+\left(p_1-t_1\right)d_1}{1-d_1t_1}M_B\le\frac{1}{a_{11}\left(1-d_1t_1\right)}+\frac{1+\left(p_1-t_1\right)d_1}{1-d_1t_1}M_B.\end{aligned}$$

若 $\eta_1>p_1\eta_1+M_B$，则

$$M_A=\eta_1\le\frac{1}{a_{11}\left(1-d_1t_1\right)}+\frac{d_1}{1-d_1t_1}M_B.$$

综上有

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\le\frac{1}{a_{11}\left(1-d_1t_1\right)}+\frac{\max\left\{d_1,1+\left(p_1-t_1\right)d_1\right\}}{1-d_1t_1}\left\|B^{-1}\right\|_{\infty}.$$

定理得证。

对定理 2.1 利用迭代法可得如下结论。

定理 2.2 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，则

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \le \frac{1}{a_{11}\left(1-u_1t_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{a_{ii}\left(1-u_it_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\max\left\{u_j,1+\left(p_j-t_j\right)u_j\right\}}{1-u_jt_j}\right) \tag{9}$$

应用引理 2.4，类似于定理 2.1 和定理 2.2 的证明可得如下定理，其证明不再赘述。

定理 2.3 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，$B=A^{(2,n)}$，$A^{-1}=\left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ 且 $B^{-1}=\left(\beta_{ij}\right)_{i,j=2}^{n}$，则

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \le \frac{1}{a_{11}-\sum_{j=2}^{n}\left|a_{1j}\right|p_{j1}}+\frac{\max\left\{d_1,1+\left(p_1-t_1\right)d_1\right\}}{1-d_1t_1}\left\|B^{-1}\right\|_\infty . \tag{10}$$

定理 2.4 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，则

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \le \frac{1}{a_{11}-\sum_{j=2}^{n}\left|a_{1j}\right|p_{j1}}+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}\left|a_{ij}\right|p_{ji}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\max\left\{u_j,1+\left(p_j-t_j\right)u_j\right\}}{1-u_jt_j}\right) \tag{11}$$

定理 2.5 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 是弱链格对角占优 M-矩阵，则

$$\begin{aligned}\left\|A^{-1}\right\|_\infty &\le \frac{1}{a_{11}\left(1-u_1t_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{a_{ii}\left(1-u_it_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\max\left\{u_j,1+\left(p_j-t_j\right)u_j\right\}}{1-u_jt_j}\right)\\ &\le \frac{1}{a_{11}\left(1-u_1t_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}\left(1-u_it_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{u_j}{1-u_jt_j}\right)\right].\end{aligned}$$

证明 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，显然有 $0\le p_i,t_i\le 1$，$u_i<1$，则

$$1+\frac{u_j}{1-u_jt_j}=\frac{1+\left(1-t_j\right)u_j}{1-u_jt_j},$$

又 $1+\left(1-t_j\right)u_j\ge 1>u_j$，且 $1+u_j\left(1-t_j\right)\ge 1+u_j\left(p_j-t_j\right)$，结论成立。

故定理 2.5 改进了文献[3]的定理 3.3，进而优于文献[2]中定理 3.3。

4. 数值算例

例 1 设

$A=\begin{pmatrix}6 & -2 & -1\\ -2 & 5 & -3\\ -2 & -3 & 7\end{pmatrix}$，$J\left(A\right)=\left\{1,3\right\}$，显然 A 是弱链对角占优矩阵 M 矩阵，应用文献[2] [3]分别计算得 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le 2.0476$，$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le 1.3883$。应用本文定理 2.2 和定理 2.4 分别计算得 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le 1.1821$，$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le 1.1651$。

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 1 & -0.1 & -0.7 \\ -0.1 & -0.2 & 1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}$$，$J(A)=\{1,3,4\}$，显然 A 是弱链对角占优矩阵 M 矩阵，应用文献[2] [3]分别计算得 $\|A^{-1}\|_\infty \le 24.4444$，$\|A^{-1}\|_\infty \le 9.1163$。应用本文定理 2.2 和定理 2.4 分别计算得 $\|A^{-1}\|_\infty \le 5.7309$，$\|A^{-1}\|_\infty \le 5.4204$。数值例子进一步验证了本文的结果比参考文献[2] [3]中的结果更为精确。

5. 结论

本文通过弱链对角占优 M-矩阵 A 及其逆矩阵元素关系的不等式，得到 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的新上界改进了已有的某些结果，同时数值算例也说明新估计式的有效性和可行性。

基金项目

云南省教育厅科学研究基金项目，项目编号：2023J1074，2023J1078。

参考文献

[1] Huang, T.Z. and Zhu, Y. (2010) Estimation of $\|A^{-1}\|_\infty$ for Weakly Chained Diagonally Dominant *M*-Matrices. *Linear Algebra and Its Application*, **432**, 670-677.

[2] Shivakumar, P.N., Williams, J.J., Ye, Q. and Marinov, C.A. (1996) On Two-Sided Bounds Related to Weakly Diagonally Dominant *M*-Matrices with Application to Digital Circuit Dynamics. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **17**, 298-312. https://doi.org/10.1137/s0895479894276370

[3] 潘淑珍, 陈神灿. 弱链对角占优矩阵 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界估计[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2012, 40(1): 281-284.

[4] Li, Y.T., Chen, F.B. and Wang, D.F. (2009) *Linear Algebra and Its Applications*, **430**, 1423-1431. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.11.002

[5] 李慧君, 莫宏敏. 弱链对角占优 *M*-矩阵逆的无穷范数新上界估计[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4683-4689. https://doi.org/10.12677/aam.2022.117494

[6] 李艳艳, 蒋建新. 弱链对角占优矩阵的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的新界[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2014, 23(4): 259-261.

[7] 吴念, 王峰. 严格对角占优 *M*-矩阵逆的无穷范数新的上界估计[J]. 西华大学学报: 自然科学版, 2021, 40(5): 98-105.

[8] Wang, F., Sun, D.S. and Zhao, J.F. (2015) New Upper Bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$ of Strictly Diagonally Dominant *M*-Matrices. *Journal of Inequalities and Applications*, **72**, 1-15.

[9] Zeng, W.L. and Liu, J.Z. (2022) A Lower Bound Sequence for the Minimum Eigenvalue of Hadamard Product of an *M*-Matrix and Its Inverse. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **72**, 663-679. https://doi.org/10.21136/cmj.2021.0092-21