Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(9), 65-75
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.149400

Hans汉斯

广义Hopf-Langford系统的可积性研究

马林祺

中国地质大学(武汉)数学与物理学院，湖北 武汉

收稿日期：2025年8月4日；录用日期：2025年8月28日；发布日期：2025年9月8日

摘 要

该文研究了一个三维自治广义Hopf-Langford系统的可积性和不变代数曲面。首先介绍了一种利用Puiseux级数研究二维系统不变代数曲线的方法，然后利用柱坐标变换和该方法，证明了系统在三个特殊情况下是可积的，并且得到了该系统的不变代数曲面。

关键词

广义Hopf-Langford系统，可积性，不变代数曲面，Darboux多项式，Puiseux级数

Study on the Integrability of the General Hopf-Langford System

Linqi Ma

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei

Received: Aug. 4th, 2025; accepted: Aug. 28th, 2025; published: Sep. 8th, 2025

Abstract

This paper investigates the integrability and invariant algebraic surfaces of a three-dimensional autonomous general Hopf-Langford system. During the study, we first introduce a recently proposed method that uses Puiseux series to study invariant algebraic curves of two-dimensional systems. Then, it is proved that the system is integrable in three special cases, and the invariant algebraic surfaces of the system are obtained by utilizing cylindrical coordinate transformations and this method.

Keywords

General Hopf-Langford System, Integrability, Invariant Algebraic Surfaces, Darboux Polynomial, Puiseux Series

文章引用：马林祺. 广义 Hopf-Langford 系统的可积性研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(9): 65-75.
DOI: 10.12677/aam.2025.149400

1. 引言

在过去的 50 年里，三维自治非线性常微分方程系统引起了许多研究者的关注，这些系统根据分岔参数的取值会表现出许多复杂的现象，如周期解和混沌解[1]-[6]。大多数非线性数学模型无法解析求解，因为它们既不能被正交积分，也不能在其他意义上被积分[7]。因此，动力系统的行为和性质通常通过应用该领域发展出的定性理论和方法来研究和描述[8]。为了定性地研究系统的动力学，学者们经常通过证明系统的可积性，以及寻找系统的不变代数曲面来实现系统的降维并简化系统。因此，研究微分系统的可积性和不变代数曲面是非常必要的。

目前，尚无通用且有效的方法来研究微分系统的可积性。研究系统的 Darboux 多项式可以帮助寻找系统的首次积分，或者通过证明系统不存在 Darboux 多项式，推导出系统不存在首次积分。然而，寻找系统的 Darboux 多项式同样是一个困难的问题，目前仍有许多挑战需要克服。关于代数可积性和 Darboux 多项式的研究是一个经典而复杂的研究领域。Darboux 是第一个阐明代数几何与首次积分之间关系的人，他提供了构造首次积分和多项式向量场不变代数曲面的方法。1992 年，Ma 研究了一类 Liouville 可积的有限维 Hamilton 系统[9]。1999 年，Moulin 等人研究了 Lotka-Volterra 系统的齐次有理首次积分[10]。2000 年，Llibre 等人找出了 Rikitake 系统的所有不变代数曲面和有理首次积分[11]。2002 年，Llibre 等人利用加权齐次多项式和特征曲线法求解线性偏微分方程，给出了经典 Lorenz 系统 Darboux 多项式的完整分类[12]。2007 年，Cao 等人研究了 Lorenz 系统在不变代数曲面限制下的动力学行为[13]。2011 年，Deng 等人通过重新定义多项式权值，求出了 Chen 系统的所有不变代数曲面[14]。2018 年，Candido 等人利用加权齐次多项式和特征曲线法，证明了一个金融模型在任何参数值下都不具有不变代数曲面[15]。2020 年，Dias 等人通过三维空间中的 Poincaré 紧化，对 Maxwell-Bloch 系统进行了全局分析，证明了该系统在某些参数值下具有首次积分和不变代数曲面[16]。2022 年，Yang 等人研究了 Vallis 系统的可积性和全局动力学，得到了系统的两类 Darboux 多项式[17]。2023 年，Karim 等人研究了 Lotka-Volterra 三物种模型的可积性问题，证明了当系统中两个相关参数为零时系统是完全可积的，并深入探讨了不变代数曲面和指数因子的可积性问题[18]。2023 年，Chen 等人研究了统一 Lorenz 型系统在不变代数曲面上由扰动中心出发的极限环，证明了在对系统参数进行适当扰动的情况下，系统的不变代数曲面上存在一个从扰动中心分岔的极限环[19]。同年，Li 等人利用不变代数曲面研究了一类次二次 Lorenz 系统同宿轨的存在性[20]。

1979 年，为简化 Hopf 于 1948 年提出的解释流体动力学中湍流现象的方程[21]，Langford 引入并分析了一种三维系统(被称为“Hopf-Langford 系统”) [22]，其形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu-\lambda)x_1 - bx_2 + x_1x_3 + cx_1\left(1-x_3^2\right), \\ \dot{x}_2 = bx_1 + (\mu-\lambda)x_2 + x_2x_3 + cx_2\left(1-x_3^2\right), \\ \dot{x}_3 = \mu x_3 - \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right). \end{cases} \tag{1}$$

其中，μ，λ，b 和 c 是系统参数，点表示相对于时间 t 的微分。当 $c=0$ 时，学者们对系统(1)进行了分析：Liu 和 Tang 分析了系统的分岔现象，并研究采用线性反馈控制方法控制该系统的分岔[23]；Nikolov 等人给出了第一 Lyapunov 值的具体表达式，并首次得到了一个混沌解[24]；Krishchenko 等人使用迭代

算法获得了紧致不变集的定位[25]；Guo 等人研究了 Hopf 分岔和稳态分岔，得到了极限环的近似表达式及其稳定性条件[26]；Yang 等人将方程的一次项参数改为任意参数，提出了广义 Hopf-Langford 系统，并分析了其中存在的分岔和异宿轨现象[27]，与之前的研究不同，系统引入了一般化的参数，可以进一步考虑线性项对湍流系统动力学行为的影响；Svetoslav 等人利用柱坐标变换研究了 $c=0$ 情况下系统(1)的可积性[28]。基于上述研究，本文将进一步研究当 $c\neq 0$ 时，广义 Hopf-Langford 系统的可积性，与 Yang 等人提出的系统不同[27]，本文将进一步考虑了高次项的引入对系统可积性的影响，并为之后研究高次项对系统动力学行为的影响打下基础。

本文组织如下：第 2 节介绍了本文用到的引理和本文的主要定理，第 3 节给出了定理的证明过程，第 4 节给出了全文的总结。

2. 主要结论和定义

为了便于研究，考虑广义 Hopf-Langford 系统的如下形式

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = ax_1 - bx_2 + x_1x_3 - cx_1x_3^2,\\ \dot{x}_2 = bx_1 + ax_2 + x_2x_3 - cx_2x_3^2,\\ \dot{x}_3 = dx_3 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right).\end{cases} \tag{2}$$

通过柱坐标变换 $x_1 = r\cos\theta$ ， $x_2 = r\sin\theta$， $x_3 = z$， 系统(2)变为

$$\begin{cases}\dot{r} = r\left(a + z - cz^2\right),\\ \dot{\theta} = b,\\ \dot{z} = dz - \left(r^2 + z^2\right).\end{cases} \tag{3}$$

为了确定解曲线，只需要考虑二维系统

$$\begin{cases}\dot{r} = r\left(a + z - cz^2\right),\\ \dot{z} = dz - \left(r^2 + z^2\right).\end{cases} \tag{4}$$

由第二个方程得到

$$r^2 = dz - z^2 - \dot{z}. \tag{5}$$

以及

$$2r\dot{r} = d\dot{z} - 2z\dot{z} - \ddot{z}. \tag{6}$$

将(6)代入(4)中第一个方程，得到

$$d\dot{z} - 2z\dot{z} - \ddot{z} = 2\left(dz - z^2 - \dot{z}\right)\left(a + z - cz^2\right). \tag{7}$$

即

$$\ddot{z} = \dot{z}\left(2a + d - 2cz^2\right) - 2cz^4 + 2\left(cd + 1\right)z^3 + 2\left(a - d\right)z^2 - 2adz. \tag{8}$$

经变换 $x = z$， $y = \dot{z}$ 方程(8)变为

$$\begin{cases}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = y\left(2a + d - 2cx^2\right) - 2cx^4 + 2\left(cd + 1\right)x^3 + 2\left(a - d\right)x^2 - 2adx.\end{cases} \tag{9}$$

为了研究广义 Hopf-Langford 系统的可积性及不变代数曲面，只需要研究方程(9)的可积性及不变代数曲线。

定义在 $\mathbb{C}^2$ 上的多项式向量场可以表示如下：

$$X=P(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y},\quad P(x,y),Q(x,y)\in\mathbb{C}[x,y].$$

其中 $\mathbb{C}[x,y]$ 表示以 x 和 y 为变量的多项式环。与 X 相关的动力系统表示为

$$\begin{cases}\dot{x}=P(x,y),\\ \dot{y}=Q(x,y).\end{cases}\tag{10}$$

如果一个非常数函数 $I:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ 在开子集 $D\subset\mathbb{C}^2$ 上满足 $I(x(t),y(t))=C$ 且 C 对所有 t 值都是常数(此处 $(x(t),y(t))$ 是 X 的解并定义在 D 上)，则称其为多项式向量场 X 的首次积分。

如果代数曲线 $F(x,y)=0,F(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]\backslash\mathbb{C}$ 满足方程 $XF=\lambda(x,y)F$，即

$$P(x,y)\frac{\partial F}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial F}{\partial y}=\lambda(x,y)F.\tag{11}$$

则称其为向量场 X 的不变代数曲线(或 Darboux 多项式)。其中 $\lambda(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ 称为不变曲线 $F(x,y)$ 的余因子多项式。可以发现多项式 $\lambda(x,y)$ 的次数最多为 $m-1$，其中 m 是 X 的次数：$m=\max\{\deg P,\deg Q\}$。

假设多项式 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 没有非常数的公共因子，考虑辅助方程

$$P(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-Q(x,y)=0.\tag{12}$$

在点 $x=\infty$ 的邻域内，Puiseux 级数[29]定义为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{\frac{l_0}{n}-\frac{k}{n}},\tag{13}$$

其中 $l_0\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$。所有形式为(13) 且满足方程 $F(x,y)=0,F(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ 的 Puiseux 级数在点 $x=\infty$ 的邻域内收敛，收敛域记为 $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ [30]。我们有以下引理[29]：

引理 1 设 $F(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]\backslash\mathbb{C},F_y\neq 0$ 是多项式向量场 X 和相关动力系统(10)的不可约不变代数曲线，则 $F(x,y)$ 具有以下形式

$$F(x,y)=\left\{\mu(x)\prod_{j=1}^{N}\left(y-y_j(x)\right),N\in\mathbb{N}\right\}_+\tag{14}$$

其中 $\mu(x)\in\mathbb{C}[x]$，且 $y_1(x),\cdots,y_N(x)$ 是在点 $x=\infty$ 邻域内不同的满足方程(12)的 Puiseux 级数。符号 $\{W(x,y)\}_+$ 表示取表达式 $W(x,y)$ 的多项式部分。$F(x,y)$ 关于 y 的次数不超过满足方程(12)形式的不同 Puiseux 级数的数量。

其逆定理也成立：

引理 2 假设 $y_1(x),\cdots,y_N(x)$ 是在点 $x=\infty$ 邻域内不同的满足方程(12)的 Puiseux 级数。设多项式 $\mu(x)\in\mathbb{C}[x]$ 使得以下表达式

$$F(x,y)=\mu(x)\prod_{j=1}^{N}\left(y-y_j(x)\right)\tag{15}$$

是 $\mathbb{C}[x,y]$ 中的不可约多项式，即(15)中的非多项式部分消失产生多项式 $F(x,y)$，则 $F(x,y)$ 是多项式向量场 X 和相关动力系统(10)的不可约不变代数曲线。

引理 1 和 2 介绍了一种新的代数方法，可以显式地找到所有不可约不变代数曲线。首先获得在点 $x=\infty$ 附近满足方程(12)的所有 Puiseux 级数。随后考虑 Puiseux 级数的不同组合，并要求表达式(14)的非多项式部分消失，即可找到所有的不可约不变代数曲线。为了计算系统的 Puiseux 级数，下面给出了计算代数微分方程 Puiseux 级数的 Painlevé 方法[31]。

考虑常微分方程

$$E\left(\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k},\cdots,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},y,x\right)=0. \tag{16}$$

其中 E 是其自变量的多项式。方程(16)可以看作是形式为

$$M\left[y(x),x\right]=cx^j y^{j_0}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}^{j_1}\cdots\left\{\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}\right\}^{j_k},\quad c\in\mathbb{C}. \tag{17}$$

的微分单项式之和。

在下文中，用 $W\left[y(x),x\right]$ 表示 $x,y(x)$ 及其导数的多项式。

定义 1 称代数常微分方程(16)在点 $x=\infty$ 处有一个优势平衡 $E_0\left[y(x),x\right]$，如果以下条件成立：

(1) 所有出现在 $E_0\left[y(x),x\right]$ 中的微分单项式 $M\left[y(x),x\right]$ 也出现在原方程(16)中；

(2) 存在一个幂函数 $y(x)=b_0x^r$，$b_0\neq 0,r\in\mathbb{C}$，使得 $E_0\left[y(x),x\right]$ 的所有微分单项式 $M\left[y(x),x\right]$ 在关系 $M\left[b_0x^r,x\right]=C_Mx^s$ 中具有相同的指数 $s\in\mathbb{C}$；

(3) 对于所有不出现在 $E_0\left[y(x),x\right]$ 中的方程(16)的微分单项式 $L\left[y(x),x\right]$，有 $L\left[b_0x^r,x\right]=C_Lx^{p_L}$，其中 $p_L<s$。

考虑在点 $x=\infty$ 处具有幂解 $y(x)=b_0x^r$ ($r\in\mathbb{Q}$)的优势平衡 $E_0\left[y(x),x\right]$ 的存在性，随后寻找满足方程(16)的 Puiseux 级数的方法可以细分为几个步骤：

第一步 找到优势平衡 $E_0\left[y(x),x\right]$ 并得到方程 $E_0\left[y(x),x\right]=0$ 的幂解 $y(x)=b_0x^r$，其中 $r\in\mathbb{Q}$。优势平衡非平凡解 $E_0\left[y(x),x\right]$ 实际上可以作为 Puiseux 级数中的最高次项。

第二步 计算在解 $y(x)=b_0x^r$ 处优势平衡 $E_0\left[y(x),x\right]$ 的 Gâteaux 导数：

$$\delta E_0\left[b_0x^r,x\right]=\lim_{t\to 0}\frac{E_0\left[b_0x^r+tx^{r-j},x\right]-E_0\left[b_0x^r,x\right]}{t}=V(j)x^r. \tag{18}$$

在表达式(18)中，$V(j)$ 是一个关于 j 的多项式，$V(j)$ 的零点被称为平衡 $E_0\left[y(x),x\right]$ 的 Fuchs 指数。方程 $E_0\left[y(x),x\right]=0$ 的幂解 $y(x)=b_0x^r$ 中的非负有理 Fuchs 指数对于进一步的分析至关重要，当不存在非负有理 Fuchs 指数时，所考虑的 Puiseux 级数具有唯一确定的系数。最后，取所有这些 Fuchs 指数：$0<j_1<\cdots<j_{m_0}$，并计算 $n=\operatorname{lcm}\left(q_1,\cdots,q_{m_0},r_2\right)$，其中 q_m 和 r_2 定义为 $j_m=p_m/q_m$，$r=r_1/r_2$，$p_m\in\mathbb{N}$，$q_m\in\mathbb{N}$，$\left(p_m,q_m\right)=1$，$1\le m\le m_0$，$r_1\in\mathbb{Z}$，$r_2\in\mathbb{N}$，$\left(r_1,r_2\right)=1$，其中 lcm 表示最小公倍数。

第三步 验证 Puiseux 级数(13)的存在性。取 $l_0=rn$，将级数(13)代入方程(16)，得到级数系数的递推关系：

$$V\left(\frac{k}{n}\right)b_k=U_k\left(b_0,\cdots,b_{k-1}\right),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{19}$$

其中 U_k 是系数多项式。U_k 和 $V(j)$ 一样，可能依赖于原方程的参数。方程 $U_{nj_m}=0,1\le m\le m_0$，其中 n，j_m 如第二步中所述，被称为兼容性条件。如果至少有一个兼容性条件不满足，则所考虑的 Puiseux

级数不存在。如果所有的兼容性条件都满足，则相应的 Puiseux 级数存在并具有任意系数。

本文的主要定理如下：

定理 1 以下条件之一成立时，系统(9)有下列不可约不变代数曲线

(1) $F(x,y)=y+x^2-dx$ 是余因子为 $\lambda(x,y)=2a-2cx^2+2x$ 的 Darboux 多项式。

(2) 当 $a=-\dfrac{5d}{4}$，$c=\dfrac{5}{4d}$ 时，$F(x,y)=y+\dfrac{5}{6d}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3d}{2}x-\dfrac{5d^2}{6}$ 是系统(9)的 Darboux 多项式，余因子为 $\lambda(x)=-3x$。

(3) 当 $a=d$，$c=\dfrac{15}{4d}$ 时，$F(x,y)=y+\dfrac{5x^3}{2d}-\dfrac{3x^2}{2}-dx$ 是系统(9)的 Darboux 多项式，余因子为 $\lambda(x)=-3x+2d$。

(4) 当 $a=-\dfrac{d}{8}$，$c=\dfrac{15}{8d}$ 时，$F(x,y)=y+\dfrac{5x^3}{4d}-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{xd}{4}$ 是系统(9)的 Darboux 多项式，余因子为 $\lambda(x)=-3x+d$。

由以上定理，系统(2)的不可约不变代数曲面结果如下。

推论 1 以下条件之一成立时，系统(2)有下列不可约不变代数曲面

(1) 当 $a=-\dfrac{5d}{4}$，$c=\dfrac{5}{4d}$ 时，$F(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{5dx_3}{2}+\dfrac{5x_3^3}{6d}-\dfrac{5x_3^2}{2}-\dfrac{5d^2}{6}-x_1^2-x_2^2$ 是系统(2)的 Darboux 多项式，余因子为 $\lambda(x_3)=-3x_3$。

(2) 当 $a=d$，$c=\dfrac{15}{4d}$ 时，$F(x_1,x_2,x_3)=-\dfrac{5x_3^2}{2}+\dfrac{5x_3^3}{2d}-x_1^2-x_2^2$ 是系统(2)的 Darboux 多项式，余因子为 $\lambda(x_3)=-3x_3+2d$。

(3) 当 $a=-\dfrac{d}{8}$，$c=\dfrac{15}{8d}$ 时，$F(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{5dx_3}{4}+\dfrac{5x_3^3}{4d}-\dfrac{5x_3^2}{2}-x_1^2-x_2^2$ 是系统(2)的 Darboux 多项式，余因子为 $\lambda(x_3)=-3x_3+d$。

3. 定理 1 的证明

为了便于分析，首先给出以下引理：

引理 3 如果 $F(x,y)$ 是系统(9)的不变代数曲线，那么 $F(x,y)$ 有形式

$$F(x,y)=\mu_0 y^N+\sum_{k=0}^{N-1}a_k(x)y^k,\mu\neq 0,N\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

余因子 $\lambda(x,y)$ 满足 $\lambda(x,y)=\lambda(x)$ 与 y 无关。

证明 设 $F(x,y)$ 为向量场(8)的不变代数曲线。那么 $F(x,y)$ 满足方程

$$y\frac{\partial F}{\partial x}+\left(y\left(2a+d-2cx^2\right)-2cx^4+2(cd+1)x^3+2(a-d)x^2-2adx\right)\frac{\partial F}{\partial y}=\lambda(x,y)F. \tag{21}$$

比较两边多项式的次数可以得到 $\lambda(x,y)$ 次数最高为 3，设 $F(x,y)$ 和 $\lambda(x,y)$ 关于 y 最高项为 $\mu(x)y^N$ 和 $\lambda_0(x)y^l$，代入比较两侧 y 的最高项系数得到 $l=1$ 以及 $\mu_x(x)=\lambda_0(x)\mu(x)$。考虑到上式关于 x 的次数可以得到 $\lambda_0(x)=0$ 和 $\mu(x)=\mu_0$ 为常数，不失一般性，可以设 $\mu_0=1$。

□

下面利用 Puiseux 级数相关理论来研究方程(9)的不变代数曲线。

首先相应辅助微分方程为

$$yy_x - y\left(2a + d - 2cx^2\right) + \left(2cx^4 - 2(cd+1)x^3 - 2(a-d)x^2 + 2adx\right) = 0. \tag{22}$$

在点 $x=\infty$ 的邻域中存在两个产生 Puiseux 级数的优势平衡，其解如下：

$$\begin{aligned}&(1)\ yy_x + 2cx^2 y = 0, y = -\frac{2}{3}cx^3,\\&(2)\ 2cx^2 y + 2cx^4 = 0, y = -x^2.\end{aligned} \tag{23}$$

对于情形(1)，计算 Gâteaux 导数为

$$\frac{\delta E_0}{\delta y}\left[b_0 x^r\right] = \frac{2}{3}c(j-3)x^{5-j}. \tag{24}$$

因此平衡的 Fuch 指数为 3， $n=1$。可以计算 Puiseux 级数满足形式 $y(x) = -\frac{2}{3}cx^3 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{2-i}$ 。

对于情形(2)，计算 Gâteaux 导数为

$$\frac{\delta E_0}{\delta y}\left[b_0 x^r\right] = 2cx^{4-j}. \tag{25}$$

不存在非负有理 Fuchs 指数，因此 Puiseux 级数具有唯一确定的系数。可以计算 Puiseux 级数满足形式

$$y(x) = -x^2 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{1-i}。$$

根据引理 1 和引理 3，方程(9)的不可约不变代数曲线可以写为

$$F(x,y) = \left\{\left(y + x^2 - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{1-i}\right)^k \times \prod_{j=1}^{N-1}\left\{y - \left(-\frac{2}{3}cx^3 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^j x^{2-i}\right)\right\}\right\}_+, \tag{26}$$

其中 $k=0$ 或 1， $N \in \mathbb{N}$。下面分情况对方程(9)参数进行具体分析。考虑到当 $c=0$ 时系统变为文[28]中的系统，这里只考虑 $c \neq 0$ 的情况。

情况 A： $N=1, k=1$

此时

$$F(x,y) = y + x^2 - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{1-i}. \tag{27}$$

代入(22)计算得到等式两端各项的系数满足的条件见表 1。

Table 1. The coefficient conditions of the Puiseux series of A
表 1. 情况 A 的 Puiseux 级数系数条件

项	条件
x^3	$2 + 2ca_0 - 2(cd+1) = 0$
x^2	$-a_0 - 2a_0 + (2a+d) + 2ca_1 - 2(a-d) = 0$
x	$a_0^2 - 2a_1 - (2a+d)a_0 + 2ca_2 + 2ad = 0$
常数项	$a_2 + a_1 a_0 - 2a_2 - (2a+d)a_1 + 2ca_3 = 0$

求解得到 $a_0 = d$， $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$，于是有

$$F(x,y)=y+x^2-dx. \tag{28}$$

带入方程得到系统的余因子为

$$\lambda(x,y)=2a-2cx^2+2x. \tag{29}$$

因此，$F(x,y)=y+x^2-dx$ 是余因子为 $\lambda(x,y)=2a-2cx^2+2x$ 的 Darboux 多项式。

情况 B：$N=1,k=0$

此时

$$F(x,y)=y+\frac{2}{3}cx^3-\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^{2-i}. \tag{30}$$

代入(22)计算得到等式两端各项的系数满足的条件见表 2。

Table 2. The coefficient conditions of the Puiseux series of B
表 2. 情况 B 的 Puiseux 级数系数条件

项	条件
x^4	$-\frac{4}{3}ca_0-2ca_0+2ca_0+2c=0$
x^3	$-\frac{2}{3}ca_1+2a_0^2-2ca_1+\frac{2}{3}c(2a+d)+2ca_1-2(cd+1)=0$
x^2	$a_0a_1+2a_0a_1-2ca_2-(2a+d)a_0+2ca_2-2(a-d)=0$
x	$\frac{2}{3}ca_3+a_1^2+2a_0a_2-2ca_3-(2a+d)a_1+2ca_3+2ad=0$
常数项	$\frac{4}{3}ca_4-a_0a_3+a_1a_2+2a_0a_3-2ca_4-(2a+d)a_2+2ca_4=0$

为了使(30)为多项式，需要 $a_i=0$，$i\ge 3$。求解得到 $a_0=\frac{3}{2}$，$a_1=\frac{15}{4c}+2(a-d)$，由于 x^2 项的系数中 a_2 消去，因此 a_2 为一个任意系数，x^2 的系数为兼容性条件

$$\frac{135}{8c}+4a-\frac{17}{2}d=0. \tag{31}$$

为了使 x 项系数为 0，有

$$3a_2+2ad+\left(\frac{15}{4c}+2(a-d)\right)\left(\frac{15}{4c}-3d\right)=0. \tag{32}$$

为了使常数项为 0，有

$$a_2\left(\frac{15}{4c}-3d\right)=0. \tag{33}$$

下面对条件(33)进行分类讨论。

情况 B1：$\frac{15}{4c}-3d=0$

代入(32)得到系数条件 $a_2=-\frac{2}{3}ad$，和参数条件 $a=-\frac{5d}{4}$，$c=\frac{5}{4d}$，此时

$$F(x,y)=y+\frac{5}{6d}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3d}{2}x-\frac{5d^2}{6}. \tag{34}$$

代入不变代数曲线的计算公式得到余因子 $\lambda(x)=-3x$ 。

情况 B2： $a_2=0$

代入(32)结合(31)得到两个参数条件：

$$(a)\quad a=d\text{，}\quad c=\frac{15}{4d}$$

$$(b)\quad a=-\frac{d}{8}\text{，}\quad c=\frac{15}{8d}$$

对于条件(a)，代入不变代数曲线的计算公式得到

$$F(x,y)=y+\frac{5x^3}{2d}-\frac{3x^2}{2}-dx. \tag{35}$$

余因子 $\lambda(x)=-3x+2d$ 。

对于条件(b)，代入不变代数曲线的计算公式得到

$$F(x,y)=y+\frac{5x^3}{4d}-\frac{3x^2}{2}+\frac{xd}{4}. \tag{36}$$

余因子 $\lambda(x)=-3x+d$ 。

情况 C： $N>1,k=1$

此时

$$F(x,y)=\left\{\left(y+x^2-dx\right)\times\prod_{j=1}^{N-1}\left\{y+\frac{2}{3}cx^3-\frac{3}{2}x^2-\left(\frac{15}{4c}+2(a-d)\right)x+\sum_{i=0}^{\infty}a_i^jx^{-i}\right\}\right\}_+. \tag{37}$$

由于 $F(x,y)$ 是一个不可约多项式，因此(37)中的非多项式项消失，而 $y+x^2-dx$ 是一个多项式，因此 $y+x^2-dx$ 是 $F(x,y)$ 的一个因子，从而与 $F(x,y)$ 是不可约多项式矛盾，因此此时不存在 Darboux 多项式。

情况 D： $N>1,k=0$

此时

$$F(x,y)=\left\{\prod_{j=1}^{N}\left\{y+\frac{2}{3}cx^3-\frac{3}{2}x^2-\left(\frac{15}{4c}+2(a-d)\right)x+\sum_{i=0}^{\infty}a_i^jx^{-i}\right\}\right\}_+. \tag{38}$$

考虑变换 $s=x$， $z=y+\frac{2}{3}cx^3-\frac{3}{2}x^2-\left(\frac{15}{4c}+2(a-d)\right)x$，在变换下，方程(38)变为

$$G(s,z)=\left\{\prod_{j=1}^{N}\left\{z+\sum_{i=0}^{\infty}a_i^js^{-i}\right\}\right\}_+. \tag{39}$$

为了使 $G(s,z)$ 为多项式， $G(s,z)$ 关于 s 的次数只能是 0，从而 $G(s,z)=G(z)$ 。

根据代数基本定理，为了使 $G(s,z)=G(z)$ 不可约，只能有

$$G(s,z)=z-z_0,z_0\in\mathbb{C}. \tag{40}$$

因此， $F(x,y)=y+\frac{2}{3}cx^3-\frac{3}{2}x^2-\left(\frac{15}{4c}+2(a-d)\right)x-z_0$，从而 $N>1,k=0$ 时不存在不可约 Darboux 多项式。

定理 1 证毕。

□

4. 结论

可积性是描述动力系统因其内在结构而具有高度规则性和可解性的性质，对于研究动力系统的整体性质至关重要。本文聚焦于研究广义 Hopf-Langford 系统的代数可积性，基于柱坐标变换和 Puiseux 级数的方法，通过计算辅助微分方程的 Puiseux 级数，研究了广义 Hopf-Langford 系统的不变代数曲面问题。最终，在适当的参数条件下得到了相应系统全部的不可约 Darboux 多项式，通过不可约 Darboux 多项式的不同组合，可以得到所有 Darboux 多项式的一般形式。除了 Darboux 多项式和可积性问题，广义 Hopf-Langford 系统在不变代数曲面上的限制也值得研究。通过不变代数曲面和 Darboux 多项式的相关理论，系统的所有吸引子都位于系统的不变代数曲面上，只需要考虑系统降维在不变代数曲面上的动力学性质即可推出系统的全局动力学性质，进一步可推出系统在对应参数条件下不存在混沌现象。此外，系统是否存在其他可积形式，如对称可积、Liouville 可积等形式，也是未来的一个研究方向。

基金项目

高维分段光滑动力系统的全局分岔与共存隐藏吸引子产生机制及其应用，国家自然科学基金面上项目(2022.9-2025.12)，项目编号：No. 12172340。

参考文献

[1] Zhao, M., Yang, Q. and Zhang, X. (2024) Dynamical Analysis of a Class of Generalized Chua's Systems with Infinitely Many Attractors. *Computational and Applied Mathematics*, **43**, Article No. 367. https://doi.org/10.1007/s40314-024-02833-0

[2] Lu, X. and Yang, Q. (2024) Jacobi Stability, Hamilton Energy and the Route to Hidden Attractors in the 3D Jerk Systems with Unique Lyapunov Stable Equilibrium. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **470**, Article ID: 134423. https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134423

[3] Zhang, L. and Ding, Y. (2024) A Novel Hyperchaotic System with Corresponding Multi-Scroll System. *International Journal of Dynamics and Control*, **12**, 1-15.

[4] Li, C., Ma, Z. and Zhou, Y. (2016) Periodic Orbits in 3-Dimensional Systems and Application to a Perturbed Volterra System. *Journal of Differential Equations*, **260**, 2750-2762. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.10.018

[5] Belozyorov, V.Y. (2015) Exponential-Algebraic Maps and Chaos in 3D Autonomous Quadratic Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **25**, Article 1550048. https://doi.org/10.1142/S0218127415500480

[6] Zhang, Y., Zhang, W. and Yue, Y. (2024) Hopf Bifurcation Analysis of a Nose Landing Gear System of Aircraft. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **34**, Article ID: 2450184. https://doi.org/10.1142/s0218127424501840

[7] Goriely, A. (2001) Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems. World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789812811943

[8] Lakshmanan, M. and Rajaseekar, S. (2012) Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns. Springer Science & Business Media.

[9] 马文秀. 一族 Liouville 可积的有限维 Hamilton 系统[J]. 应用数学和力学, 1992, 13(4): 349-357.

[10] Ollagnier, J.M. (1999) Rational Integration of the Lotka-Volterra System. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **123**, 437-466. https://doi.org/10.1016/s0007-4497(99)00111-6

[11] Llibre, J. and Zhang, X. (2000) Invariant Algebraic Surfaces of the Rikitake System. *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, **33**, 7613-7635. https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/42/310

[12] Llibre, J. and Zhang, X. (2002) Invariant Algebraic Surfaces of the Lorenz System. *Journal of Mathematical Physics*, **43**, 1622-1645. https://doi.org/10.1063/1.1435078

[13] Cao, J. and Zhang, X. (2007) Dynamics of the Lorenz System Having an Invariant Algebraic Surface. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, 4370-4371. https://doi.org/10.1063/1.2767007

[14] Deng, X. and Chen, A. (2011) Invariant Algebraic Surfaces of the Chen System. *International Journal of Bifurcation

and Chaos, **21**, 1645-1651. https://doi.org/10.1142/s0218127411029331

[15] Cândido, M.R., Llibre, J. and Valls, C. (2018) Invariant Algebraic Surfaces and Hopf Bifurcation of a Finance Model. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **28**, Article ID: 1850150. https://doi.org/10.1142/s021812741850150x

[16] Dias, F.S. and Valls, C. (2020) Global Dynamics of the Maxwell-Bloch System with Invariant Algebraic Surfaces. *Dynamical Systems*, **35**, 668-681. https://doi.org/10.1080/14689367.2020.1770202

[17] 杨静, 谈文慧, 魏周超. Vallis 系统的不变代数曲面研究[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(1): 84-93.

[18] Karim, A., Amen, A. and Aziz, W. (2023) Integrability of a Family of Lotka-Volterra Three Species Biological System.

[19] Chen, Y. and Yang, Q. (2023) Limit Cycles from Perturbed Center on the Invariant Algebraic Surface of Unified Lorenz-Type System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **33**, Article ID: 2350172. https://doi.org/10.1142/s0218127423501729

[20] Xu, Y., Huang, J., Lenci, S. and Luo, A.C.J. (2023) Constructed Complex Motions and Chaos. *Chaos*: *An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **33**, 1263-1273. https://doi.org/10.1063/5.0151818

[21] Hopf, E. (1948) A Mathematical Example Displaying Features of Turbulence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **1**, 303-322. https://doi.org/10.1002/cpa.3160010401

[22] Langford, W.F. (1979) Periodic and Steady-State Mode Interactions Lead to Tori. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **37**, 22-48. https://doi.org/10.1137/0137003

[23] 刘素华, 唐驾时. Langford 系统 Hopf 分叉的线性反馈控制[J]. 物理学报, 2007, 56(6): 3145-3151.

[24] Nikolov, S. and Bozhkov, B. (2004) Bifurcations and Chaotic Behavior on the Lanford System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **21**, 803-808. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2003.12.040

[25] Krishchenko, A.P. and Starkov, K.E. (2006) Localization of Compact Invariant Sets of Nonlinear Systems with Applications to the Lanford System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **16**, 3249-3256. https://doi.org/10.1142/s0218127406016768

[26] Guo, G., Wang, X., Lin, X. and Wei, M. (2017) Steady-State and Hopf Bifurcations in the Langford ODE and PDE Systems. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **34**, 343-362. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.09.008

[27] Yang, Q. and Yang, T. (2017) Complex Dynamics in a Generalized Langford System. *Nonlinear Dynamics*, **91**, 2241-2270. https://doi.org/10.1007/s11071-017-4012-1

[28] Nikolov, S.G. and Vassilev, V.M. (2021) Completely Integrable Dynamical Systems of Hopf-Langford Type. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **92**, Article ID: 105464. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105464

[29] Demina, M.V. (2018) Novel Algebraic Aspects of Liouvillian Integrability for Two-Dimensional Polynomial Dynamical Systems. *Physics Letters A*, **382**, 1353-1360. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.03.037

[30] Walker, R.J. (1978) Algebraic Curves. Springer-Verlag.

[31] Conte, R. (1999) The Painlevé Approach to Nonlinear Ordinary Differential Equations. In: Conte, R., Ed., *The Painlevé Property*, Springer, 77-180. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1532-5_3