

带休息的不对称性随机化莱维游走与CTRW结合的反常扩散研究

王小瑄

成都理工大学数学科学学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年8月4日; 录用日期: 2025年8月28日; 发布日期: 2025年9月8日

摘要

作为描述自然界中间歇性搜索行为的双态随机游走模型, 已在物理学等多个领域得到深入研究。本研究提出一种混合模型, 该模型结合了方向不对称性经随机化处理的Lévy游走与连续时间随机游走。本研究的意义在于对经典间歇性搜索模型(LWR)进行关键扩展: 将传统模型中“绝对静止的休息阶段”替换为具有自身动力学的CTRW过程, 以更真实地刻画复杂系统中的多模式输运现象。在物理和生物系统中, 粒子常表现为弹道迁移与局部扩散双模式动态交替, 而非完美运动与绝对静止的二元切换。为此, 我们构建了“弹道飞行阶段”(Lévy游走)与“局部扩散阶段”(CTRW)交替的混合机制, 并设定两阶段的持续时间均服从指数分布(速率参数 λ_1 和 λ_2), 系统分析其反常扩散行为。传统Lévy游走休息模型中, 粒子在弹道迁移与静态休息阶段间交替切换, 其休息时间分布常导致均方位移呈现复杂标度行为。本模型通过CTRW驱动的局部扩散机制协同调控长等待时间引起的滞留效应, 与Lévy飞行及随机跳跃共同实现的长程转移特性, 突破了经典LWR模型在多模式输运刻画中的局限性。

关键词

连续时间随机游走, 莱维游走, 反常扩散, 指数分布

Research on Anomalous Diffusion Combining Asymmetrically Randomized Lévy Walks with Rests and Continuous-Time Random Walks

Xiaoxuan Wang

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Aug. 4th, 2025; accepted: Aug. 28th, 2025; published: Sep. 8th, 2025

文章引用: 王小瑄. 带休息的不对称性随机化莱维游走与 CTRW 结合的反常扩散研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(9): 76-87. DOI: 10.12677/aam.2025.149401

Abstract

The two-state random walk model, as a framework for describing intermittent search behavior in natural systems, has been extensively studied in physics and related fields. This work proposes a hybrid model that integrates directionally randomized Lévy walks with continuous-time random walks (CTRW). The significance of this study lies in its key extension of the classical Lévy walk with rests (LWR) model: replacing the traditional “absolutely static resting phase” with a CTRW process possessing intrinsic dynamics, thereby more realistically capturing multi-mode transport phenomena in complex systems. In physical and biological systems, particles often exhibit dynamic alternation between ballistic migration and local diffusion modes, rather than a binary switch between perfect motion and complete rest. To this end, we construct a hybrid mechanism featuring alternating “ballistic flight phases” (Lévy walks) and “local diffusion phases” (CTRW), with the duration of both phases following exponential distributions (rate parameters λ_1 and λ_2). We systematically analyze its anomalous diffusion behavior. In traditional Lévy walk with rest models, particles alternate between ballistic migration and static resting phases, where the resting time distribution typically leads to complex scaling behaviors in mean squared displacement. Our model coordinates the trapping effects induced by long waiting times (via CTRW-driven local diffusion) with the long-range transfer capabilities achieved through Lévy flights and random jumps, overcoming the limitations of classical LWR models in characterizing multi-mode transport phenomena.

Keywords

Continuous-Time Random Walk, Lévy Walk, Anomalous Diffusion, Exponential Distribution

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着越来越多的反常扩散过程在自然界的各个领域中被发现，反常扩散成为计算数学，物理，生物等领域广受欢迎的课题之一[1]-[5]。区别于正常扩散粒子位置的均方位移与时间 t 呈线性关系，反常扩散的粒子的轨迹的均方位移与时间之间呈现出非线性的幂律关系，其数学表达式为：

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^\alpha,$$

实际上，我们依据反常尺度指数 α 的取值来对扩散类型进行界定。当 α 等于 1 时，这种情况被定义为正常扩散；当 $0 < \alpha < 1$ 时，可以用来描述细胞质中蛋白质和蛋白质核酸的运动的欠扩散运动；与之相反，当 $\alpha > 1$ 时，我们称其为超扩散，例如细胞内纳米粒子的运动。在超扩散这一类别里，还能进一步细分：当 $\alpha = 2$ 时，属于弹道扩散；当 $\alpha > 2$ 时，为超弹道扩散；当 $1 < \alpha < 2$ 时，则是欠弹道的超扩散。

反常扩散现象的动力学特征常通过随机行走理论及朗之万动力学方程进行数学刻画。在经典理论框架下，Montroll 与 Weiss 创新性地将时间等待分布与空间跃迁幅值两个统计量解耦，建立了连续时间随机行走模型(CTRW) [6]。该模型通过概率密度函数的演化方程，成功解释了亚扩散与标准扩散的动力学行为。然而当研究体系涉及超扩散过程时，传统 CTRW 模型会引发与物理实际相悖的结论。为此，学术界提出了具有时空耦合的莱维行走模型(Lévy Walk) [7]，其核心突破在于对粒子运动速率的物理约束。这种有限传播速度的设定不仅保证了体系二阶矩的收敛性，更赋予模型更强的工程应用价值[8] [9]。

莱维游走(Lévy Walk, LW)的工作原理是通过速度以及飞行时间来驱动, 首先对于飞行时间服从截断幂律分布的恒定速度模型研究其截断效应[10]。也有学者通过变速度的广义 Lévy Walk 具有非线性的时空耦合来描述理查森的湍流分散[11][12]。但在实际生活中例如间歇性搜索行为单态模型难以描述。此时作为带休息的莱维游走(Lévy Walk with Rests, LWR)作为拓展对于描述觅食行为等有着更好的效果。例如冷原子在光学双势的飞行中, 他的运动类似于莱维游走, 但是每次运动之间她都会被困在晶格势中等待跃迁。然后再被放置到莱维游走的环境中[13]。考虑到粒子在等待阶段也可能发生随机扩散, 例如间歇性搜索过程包含了局部布朗运动阶段和弹道运动相互交替[14][15]。此时的局部布朗运动可以用 CTRW 来描述。

在本文中, 我们提出一种新型混合输运模型: 将由 CTRW 描述, 其等待时间与跳跃长度分别表征粒子局部探索的滞留期与随机运动步长的“局部扩散阶段”与由方向不对称性随机化的 Lévy Walk 实现的“弹道飞行阶段”动态耦合。本研究重点分析两阶段持续时间均服从指数分布的情形(速率参数 λ_1 对应扩散阶段, λ_2 对应飞行阶段)。通过分别计算经典 LWR 模型(弹道飞行 + 静态休息)与本混合模型(弹道飞行 + CTRW 扩散)的传播子, 系统解析了 CTRW 机制对输运行为的调控作用, 并对比揭示二者反常扩散特性的本质差异。

2. 预备知识

2.1. 连续时间随机游走模型

连续时间随机游走是基于步行者在连续两次跳跃之间的跳跃长度 $\lambda(x)$ 和等待时间 $\omega(t)$ 的框架下构造出来。假设 $\eta(x, t)$ 表示粒子在 t 时刻刚到达位置 x 的概率密度函数, $P(x, t)$ 表示粒子在 t 时刻处于位置 x 的概率密度函数, 我们有以下关系[16]-[19]:

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta(x', t') \lambda(x) \omega(t) dx' dt' + \delta(x) \delta(t) \\ P(x, t) &= \int_0^t \eta(x, t') \Psi(t-t') dt\end{aligned}\quad (1)$$

其中 $\Psi(t) = \int_t^{\infty} \omega(t') dt' = 1 - \int_0^t \omega(t') dt'$ 代表存活概率, 也就是说粒子到时间 t 为止都没有发生移动。因此我们得到在傅里叶 - 拉普拉斯空间中有:

$$P(k, s) = \frac{1 - \omega(s)}{s} \frac{P_0(k)}{1 - \omega(s) \lambda(k)} \quad (2)$$

上式为著名的 Montroll-Weiss 方程。

如果等待时间和跳跃长度的方差 T 和 Σ^2 均有限的话, 那么长时间极限将对应于布朗运动。例如, 我们考虑等待时间服从泊松分布 $\omega(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ 以及高斯跳跃长度 $\lambda(x) = \sqrt{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$, 因此对应的拉普拉斯变换和傅里叶变换分别为

$$\begin{aligned}\omega(s) &\sim 1 - s\tau + O(\tau^2) \\ \lambda(k) &\sim 1 - \sigma^2 k^2 + O(k^4)\end{aligned}\quad (3)$$

在长时间极限下有

$$P(k, s) = \frac{1}{s + K_1 k^2} \quad (4)$$

对上式做 Fourier-Laplace 逆变换可以得到:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_1 t}} e^{-\frac{x^2}{4K_1 t}} \quad (5)$$

该式子为高斯状传播子等式。

2.2. 莱维游走

作为时空耦合的莱维游走, 这也是它区别于 CTRW 的特点。首先介绍一维对称恒速度莱维游走, 此时粒子会朝着一个方向以固定速度持续运动一段时间, 方向选择是均等的, 然后之后再随机选择一个方向以恒定速度运动一段时间, 如此循环下去。此时我们将飞行时间的概率密度函数表达为 $\omega_j(t)$, 粒子运动的速度为常量 v , 则粒子在时间间隔 t 内, 位移为 $\pm vt$ 的概率密度函数为[20]:

$$\phi_j(x, t) = \frac{1}{2} \delta(|x| - vt) \omega_j(t) \quad (6)$$

对上式进行 Fourier-Laplace 变换后, 并且利用 δ 函数性质, 便可得到:

$$\phi_j(k, s) = \frac{1}{2} [\omega_j(s + ikv) + \omega_j(s - ikv)] \quad (7)$$

同样我们可以定义存活概率 $\Psi_j(t) = \int_t^\infty \omega_j(t') dt' = 1 - \int_0^t \omega_j(t') dt'$ 。表示表示粒子按照一个方向运行 t' 事件后, 不改变方向仍然按着原来的方向游走。此时有:

$$\Phi_j(x, t) = \frac{1}{2} \delta(|x| - vt) \Phi_j(t) \quad (8)$$

表示由莱维游走控制的粒子在 t' 时间内做了 vt' 的位移后, 在时间 t' 结束时不改变方向, 继续按着原来方向运动。

对于非对称的一维莱维游走, 不同于与对称的是他将以不均等的概率选择方向, 例如以概率 b ($0 \leq b \leq 1$ 且 $b \neq \frac{1}{2}$) 或 $1-b$ 选择向右(向左)运动, 然后在时间 t 内发生 $vt(-vt)$ 的位移, 在时间 t 结束后重新选择方向发生持续运动, 如此持续下去。因此我们给出概率密度函数为

$$\phi(x, t) = b \delta(x - vt) \omega(t) + (1-b) \delta(x + vt) \omega(t) \quad (9)$$

此时 $\omega(t)$ 指飞行时间概率密度函数。本文中我们假设不对称概率为随机变量, 服从 $[0, 1]$ 之间的均匀分布, 对应的概率密度函数为:

$$f(b) = \begin{cases} 1, & 0 \leq b \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

此时我们可以得到新的概率密度函数为

$$\begin{aligned} \phi_{LW}(x, t) &= \int_0^1 b \delta(x - vt) \omega_j(t) + (1-b) \delta(x + vt) \omega_j(t) db \\ &= \frac{1}{2} \delta(x - vt) \omega_j(t) + \frac{1}{2} \delta(x + vt) \omega_j(t) = \phi_j(x, t) \end{aligned} \quad (11)$$

通过方向偏好概率 b 均匀随机化时, 系统非对称性在统计平均下被消除, 其动力学等效于对称莱维游走(见图 1)。

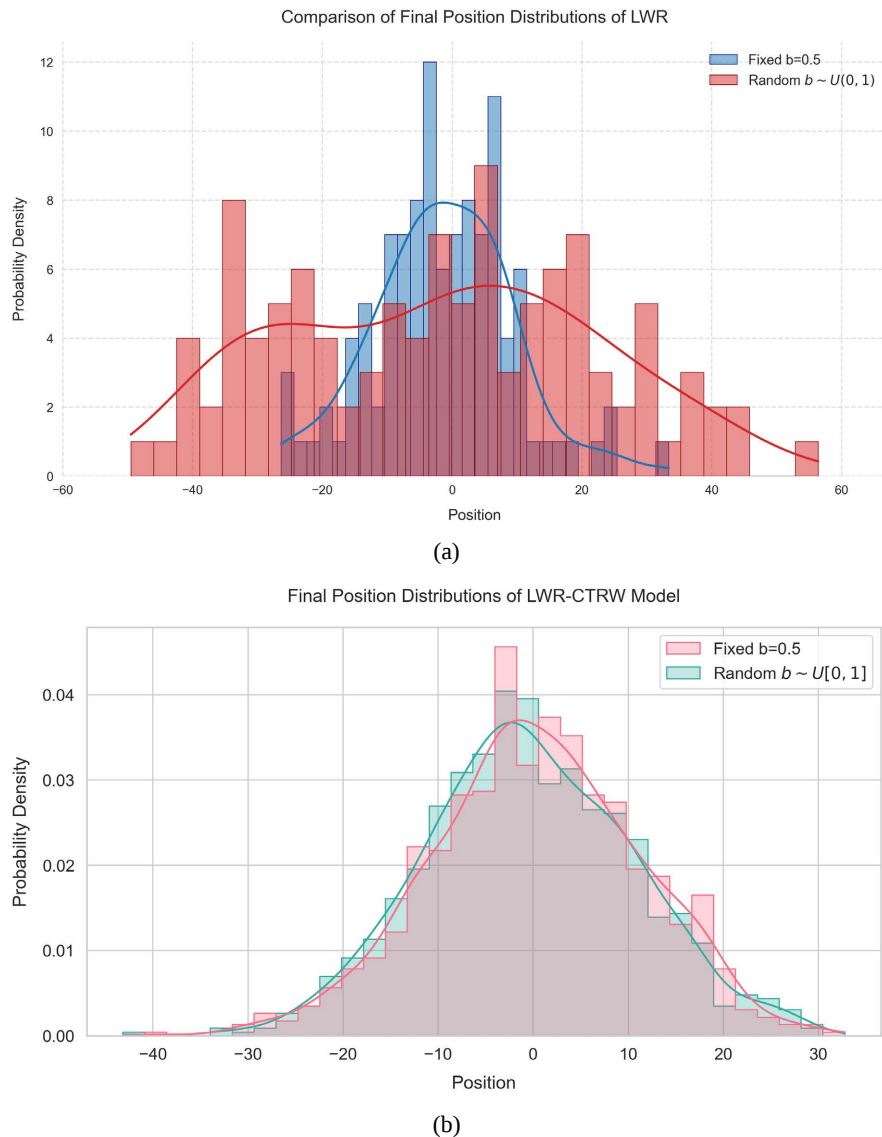


Figure 1. Comparison of the position distribution functions $P(x, t = 100)$ at the final time point ($t = 100$) between the randomized right-moving probability and the fixed right-moving probability ($p = 0.5$). (a) For the LWR model with parameters set as $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.8$, $v = 1$, the blue curve represents the fixed probability, and the red curve represents the randomized probability. (b) For the LWR-CTRW model with parameters set as $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 1.4$, $v = 1$, $\sigma = 10$, the red curve represents the fixed probability, and the green curve represents the randomized probability.

图 1. 考虑最后一个时间点 $t = 100$ 向右概率随机化与固定向右概率 $= 0.5$ 的位置分布函数 $P(x, t = 100)$ 对比。(a) LWR 模型应用的参数为 $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.8$, $v = 1$, 其中蓝色代表固定概率, 红色代表概率随机化。(b) LWR-CTRW 模型应用的参数为 $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 1.4$, $v = 1$, $\sigma = 10$, 其中红色代表固定概率, 绿色代表概率随机化。

3. 研究内容

3.1. LWR 模型的反常扩散行为

作为经典莱维游走变体的 LWR 模型, 他不再是始终以连续速度更新运动, 该过程会在更新点被捕获, 也就是处于休息状态, 之后才会进行连续运动如此循环。此时休息时间从相应的休息时间 PDF $\omega_r(t)$ 得到, 莱维游走的部分由式子(10)决定。由于 LWR 作为一个双态模型, 因此在时间 t 位于位置 x 的概率

密度函数 $P(x,t) = P_r(x,t) + P_j(x,t)$, 其中 $P_r(x,t)$ 代表例子处于休息状态的 PDF, $P_j(x,t)$ 则代表粒子处于 LW 状态的 PDF。LWR 模型的运动轨迹图见图 2(a)。

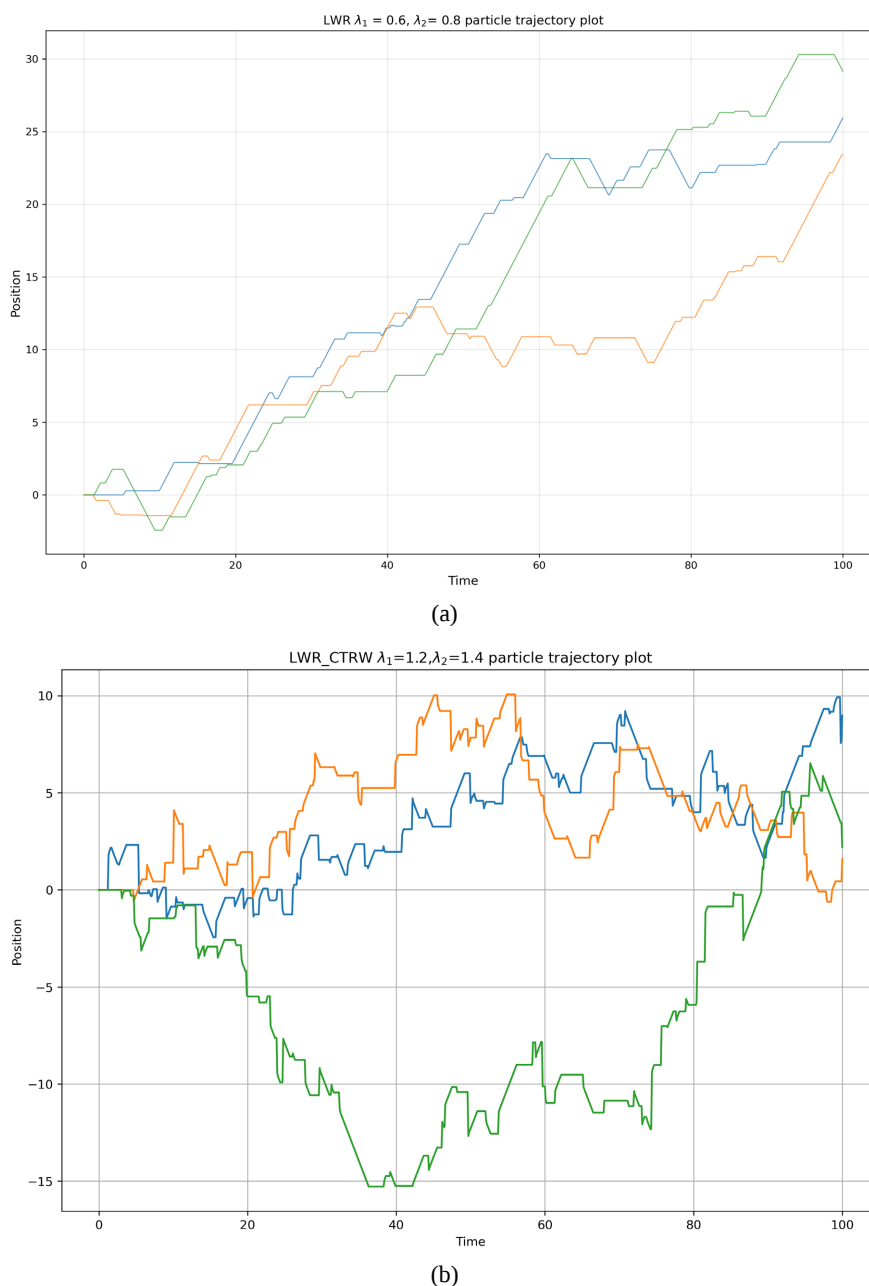


Figure 2. Numerical realizations of trajectories for the two-state random walk models. (a) The LWR model with parameters set as $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.8$. (b) The LWR-CTRW model with parameters set as $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 1.4$, $\sigma = 10$

图 2. 两种双状态随机行走模型的轨迹数值实现。(a) LWR 模型应用的参数为 $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.8$ 。(b) LWR-CTRW 模型应用的参数为 $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 1.4$, $\sigma = 10$

下面定义 $\eta(x,t)$ 为刚刚完成休息状态并开始离开位置 x 进入 LW 状态的粒子通量, 它满足:

$$\eta(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-\tau_j} \eta(x-x', t-t') \phi_{LW}(x', \tau_j) \omega_r(\tau_r) dx' d\tau_j d\tau_r + \omega_r(t) P_0(x) \quad (12)$$

其中 $P_0(x) = \delta(x)$, $t' = \tau_r + \tau_j$ 。等式右边第一项的 $\eta(x-x', t-t')$ 代表在时间 $t-t'$ 的粒子通量, 将继续完成 LW 状态和休息状态才能在时间 t 到达位置 x , 第二项代表初始项。

对(12)式进行 Fourier-Laplace 变换后得到:

$$\eta(k, s) = \frac{\omega_r(s) P_0(k)}{1 - \phi_{LW}(k, s) \omega_r(s)} \quad (13)$$

则粒子处于休息状态和 LW 状态的 PDF 分别为:

$$\begin{aligned} P_r(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-\tau_j} \eta(x-x', t-t') \phi_{LW}(x', \tau_j) \Phi_r(\tau_r) dx' d\tau_j d\tau_r + \Phi_r(t) P_0(x) \\ P_j(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \eta(x-x', t-t') \Phi_j(x', t') dx' dt' \end{aligned} \quad (14)$$

同样经过傅里叶 - 拉普拉斯变换有:

$$\begin{aligned} P_r(k, s) &= \frac{\Phi_r(s)}{1 - \phi_{LW}(k, s) \omega_r(s)} \\ P_j(k, s) &= \frac{\omega_r(s) \Phi_j(k, s)}{1 - \phi_{LW}(k, s) \omega_r(s)} \end{aligned} \quad (15)$$

因此, 传播子 $P(k, s)$ 为

$$P(k, s) = P_r(k, s) + P_j(k, s) = \frac{\Phi_r(s) + \omega_r(s) \Phi_j(k, s)}{1 - \phi_{LW}(k, s) \omega_r(s)} \quad (16)$$

在本节中考虑休息时间的 PDF 和飞行时间 PDF 均服从指数分布, 跳跃长度服从高斯分布:

$$\begin{aligned} \omega_r(t) &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \\ \omega_j(t) &= \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (17)$$

和

$$\lambda(x) = \sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (18)$$

为了更好地研究反常扩散性质, 可以通过粒子位移的统计特性得到, 也就是:

$$\langle x^n(t) \rangle = i^n \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial^n P(k, s)}{\partial k^n} \right\} \Big|_{k=0} \quad (19)$$

则我们计算相关矩为

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= 0 \\ \langle x^2(t) \rangle &= \langle \Delta x^2(t) \rangle = K_1 e^{-\lambda_2 t} + K_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} + K_{31} t + K_{32} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{其中 } K_1 = \frac{2v^2}{\lambda_2^2}, K_2 = -\frac{2v^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, K_{31} = \frac{2\lambda_1 v^2}{\lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}, K_{32} = \frac{2v^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} - \frac{2v^2}{\lambda_2^2}。$$

我们可以看出反常扩散是由休息阶段和莱维游走阶段共同控制的, 并且由于随机化后呈对称性我们的一阶矩为 0。在短时间尺度上, 由于初始阶段一恒定速度运动几乎无休息, 会表现出超扩散行为, 反映了指数分布的瞬态特性。对于长时间来说, 此时只有线性项的作用, 此时是正常扩散的。

由图 3 可知, 体系的扩散动力学由局部探索脱离速率 λ_1 与弹道运动中断速率 λ_2 协同调控。 λ_1 是在局部探索态(CTRW 模式)停留时间的指数分布速率参数, 表征粒子切换到弹道飞行态(LW 模式)的速率; λ_2

是粒子在弹道飞行阶段(LW 模式)飞行时间的指数分布速率参数,表征粒子终止飞行、切换回局部探索态的速率。当 λ_1 增大时,粒子在局部探索态的平均停留时间 $\frac{1}{\lambda_1}$ 缩短,更快地进入长程飞行状态,导致体系处于弹道飞行模式的时间占比增加。不仅使长期扩散系数 $D \propto \lambda_1$ 增大,同时强化了瞬态超扩散行为——表现为粒子在运动初期维持长程连续飞行的能力增强。相反的是当 λ_2 增大时,粒子在弹道飞行态的平均飞行时间 $\frac{1}{\lambda_2}$ 缩短,弹道飞行相变得破碎化导致扩散系数 $D \propto \frac{1}{\lambda_2}$ 衰减,并弱化瞬态超扩散强度。此时体系趋近渐近扩散态的特征时间尺度 $\frac{1}{\lambda_2}$ 缩短,这一现象在药物胞内输运路径分析或地下水修复过程模拟的单粒子追踪实验中表现为加速过渡至线性扩散区,凸显了参数对跨尺度输运效率的调控机制。

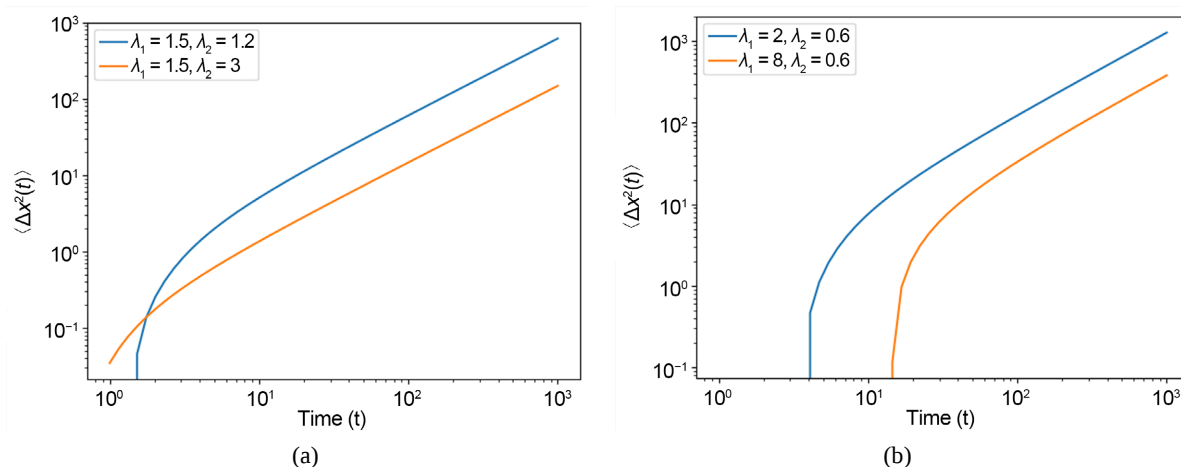


Figure 3. Mean squared displacement (MSD) as a function of time t for different values of λ_1, λ_2 . (a) With λ_1 fixed at 1.5, results for $\lambda_2 = 1.2$ and $\lambda_2 = 3$ are shown. (b) With λ_2 fixed at 0.6, results for $\lambda_1 = 2$ and $\lambda_1 = 8$ are presented

图 3. 具有不同 λ_1, λ_2 的均方位移 MSD 关于时间 t 的函数。(a) 固定 $\lambda_1 = 1.5$, 取 $\lambda_2 = 1.2$ 和 $\lambda_2 = 3$ 。(b) 固定 $\lambda_2 = 0.6$, 取 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_1 = 8$

3.2. LWR 和 CTRW 结合的反常扩散行为研究

虽然传统的 LWR 模型可以用来模拟许多运动,例如粒子在哈密顿系统中的运动。但是有些粒子可能会有局部随机运动的出现,比如 mRNP 随机蛋白可以在局部细胞内进行随机转运,在被信使核糖核酸激活后,进行双向游走,直到被捕获[21]。此时 mRNP 在局部细胞内的布朗运动可以由 CTRW 很好描述,因此下面介绍 LWR 与 CTRW 结合模型的相关理论。LWR 和 CTRW 结合模型的运动轨迹图见图 2(b)。

此模型中我们考虑的 CTRW 模型和一维对称莱维游走如前文定义。此时定义 $Z(x, t)$ 表示刚刚完成 CTRW 状态并开始离开位置 x 进入 LW 状态的粒子通量,它满足:

$$Z(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-\tau_2} Z(x-x', t-t') \phi_{LW}(x_2, \tau_2) \omega_{CTRW}(\tau_1) \lambda(x_1) dx' d\tau_2 d\tau_1 + \omega_{CTRW}(t) P_0(x) \quad (21)$$

其中 $x_1 + x_2 = x'$, $\tau_1 + \tau_2 = t'$ 。等式右边第一项的 $Z(x-x', t-t')$ 代表在时间 $t-t'$ 的粒子通量,将继续完成 LW 状态和 CTRW 状态才能在时间 t 到达位置 x , 第二项代表初始项。

对(21)式进行 Fourier-Laplace 变换后得到:

$$Z(k, s) = \frac{\omega_{CTRW}(s) P_0(k)}{1 - \phi_{LW}(k, s) \omega_{CTRW}(s) \lambda(k)} \quad (22)$$

则粒子处于 CTRW 状态和 LW 状态的概率密度函数分别为:

$$\begin{aligned} P_{CTRW}(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-\tau_2} Z(x-x', t-t') \phi_{LW}(x_2, \tau_2) \Phi_{CTRW}(\tau_1) \lambda(x_1) dx' d\tau_2 d\tau_1 + \Phi_{CTRW}(t) P_0(x) \\ P_{LW}(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t Z(x-x', t-t') \Phi_j(x', t') dx' dt' \end{aligned} \quad (23)$$

同样经过傅里叶 - 拉普拉斯变换有:

$$\begin{aligned} P_{CTRW}(k, s) &= \frac{\Phi_{CTRW}(s) P_0(k)}{1 - \phi_{LW}(k, s) \omega_{CTRW}(s) \lambda(k)} \\ P_{LW}(k, s) &= \frac{\omega_{CTRW}(s) P_0(k) \Phi_j(k, s)}{1 - \phi_{LW}(k, s) \omega_{CTRW}(s) \lambda(k)} \end{aligned} \quad (24)$$

由于双状态模型的缘故, 粒子在 t 时刻处于位置 x 的概率密度函数包括两个部分, 即:

$$P(k, s) = P_{CTRW}(k, s) + P_{LW}(k, s) = \frac{\Phi_{CTRW}(s) P_0(k) + \omega_{CTRW}(s) \Phi_j(k, s) P_0(k)}{1 - \phi_{LW}(k, s) \omega_{CTRW}(s) \lambda(k)} \quad (25)$$

在本节中考虑等待时间的概率密度函数和飞行时间的概率密度函数均服从指数分布,

$$\begin{aligned} \omega_{CTRW}(t) &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \\ \omega_j(t) &= \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (26)$$

通过计算 $\langle x^n(t) \rangle = i^n \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial^n P(k, s)}{\partial k^n} \right\} \Big|_{k=0}$ 来得到相关统计特征, 则有

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= 0 \\ \langle x^2(t) \rangle &= \langle \Delta x^2(t) \rangle = B_1 e^{-\lambda_2 t} + B_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} + B_{31} t + B_{32} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{其中 } B_1 = \frac{2v^2}{\lambda_2^2}, B_2 = \frac{2[\lambda_1 \lambda_2 \sigma^2 - v^2]}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, B_{31} = \frac{2\lambda_1[v^2 + \lambda_2^2 \sigma^2]}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}, B_{32} = \frac{2[v^2 - \lambda_1 \lambda_2 \sigma^2]}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} - \frac{2v^2}{\lambda_2^2}.$$

由于反常扩散行为由连续时间随机游走(CTRW)的局域化机制与莱维游走(Lévy walk)的长程跳跃特性共同调控, 表现出显著的时间尺度依赖性, 经过观察相关矩得到: 短时间尺度下, 粒子由于经受 CTRW 跳跃和莱维飞行, 运动方向相对一致, 呈现位移二次增长, 类似弹道运动, 表现出超扩散特征。对于长时间尺度, 由于指数分布无重尾和无记忆效应, 只有线性项主导扩散, 表现出正常扩散的特征。特别的是在中间尺度, 由于指数衰减项和线性项的并存, 导致 MSD 表现出非幂律标度, 引发事件相关的记忆效应。

观察图 4 发现局部探索脱离速率 λ_1 与弹道运动中中断速率 λ_2 协同调控扩散动力学: λ_1 表征粒子切换至弹道飞行态(LW 模式)的速率, 其增大显著提升粒子有效运动时间占比, 不仅使长期扩散系数 $D \propto \lambda_1$ 线性增长, 更通过维持自由运动相连续性强化瞬态超扩散行为; λ_2 则表征粒子终止飞行、切换回局部探索态的速率, 其增大会导致运动相破碎化, 使长期扩散系数 $D \propto \frac{1}{\lambda_2}$ 衰减, 并弱化瞬态超扩散强度, 同时加速体系向渐近扩散态过渡。由于二者的竞争关系决定主导机制: 当 $\lambda_1 \gg \lambda_2$ 时莱维游走主导, 呈现持续超扩散; 当 $\lambda_1 \ll \lambda_2$ 时随机游走主导, 快速过渡至正常扩散; 而在临界点 $\lambda_1 \lambda_2 \sigma^2 = v^2$ 时, 超扩散与正常扩散实现平滑衔接。这种双参数协同作用在药物胞内输运等过程中表现为: 高 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 比延长反常扩散窗口促进长程迁移, 低 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 比则加速局域随机化, 共同构成跨尺度输运效率的调控核心。

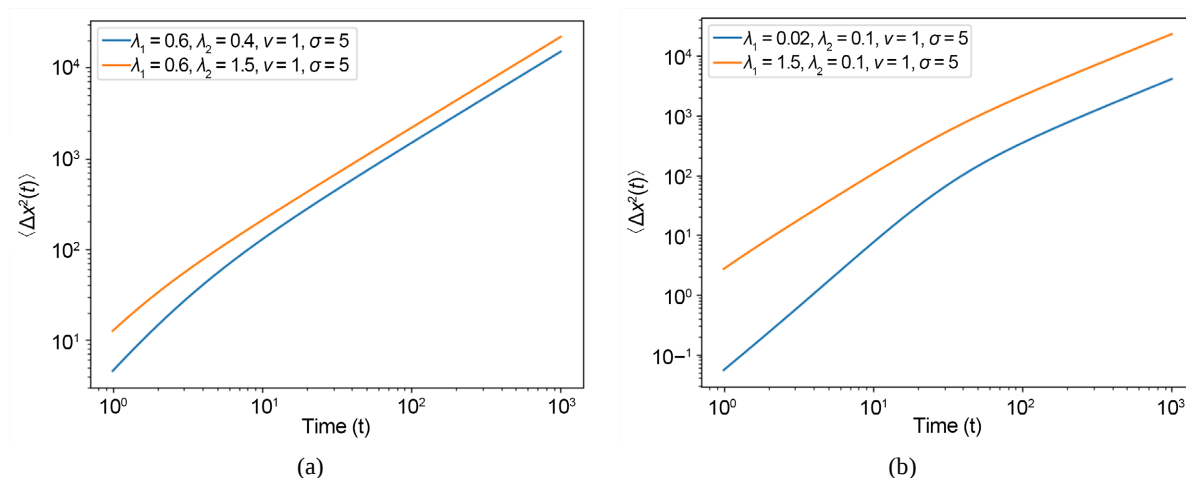


Figure 4. Mean squared displacement (MSD) as a function of time t for different values of λ_1, λ_2 . (a) With λ_1 fixed at 0.6 and σ fixed at 5, results for $\lambda_2 = 1.5$ and $\lambda_2 = 0.4$ are shown. (b) With λ_2 fixed at 0.1 and σ fixed at 5, results for $\lambda_1 = 0.02$ and $\lambda_1 = 1.5$ are presented

图 4. 具有不同 λ_1, λ_2 的均方位移 MSD 关于时间 t 的函数。(a) 固定 $\lambda_1 = 0.6, \sigma = 5$, 取 $\lambda_2 = 1.5$ 和 $\lambda_2 = 0.4$ 。(b) 固定 $\lambda_2 = 0.1, \sigma = 5$, 取 $\lambda_1 = 0.02$ 和 $\lambda_1 = 1.5$

3.3. 模型对比

前文已经给出了两个模型各自的反常扩散行为, 先将分析加入 CTRW 后对于模型具体的影响, 来更好地论证有瞬时跳跃的 LWR 模型对于模拟真实系统有着更重要意义。

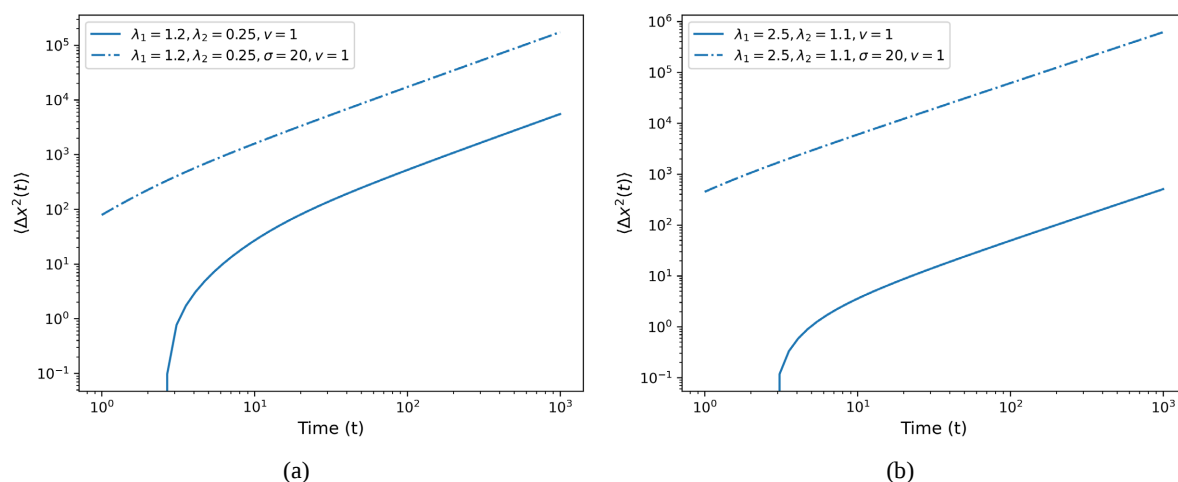


Figure 5. Mean squared displacement (MSD) as a function of time t for the LWR and LWR-CTRW models, where the solid and dashed lines represent the LWR and LWR-CTRW models, respectively. (a) Parameters for LWR are $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 0.25$, and for LWR-CTRW are $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 0.25$, $\sigma = 20$. (b) Parameters for LWR are $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 1.1$, and for LWR-CTRW are $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 1.1$, $\sigma = 20$

图 5. LWR 和 LWR-CTRW 对比的均方位移 MSD 关于时间 t 的函数, 其中实线代表 LWR 模型, 虚线代表 LWR-CTRW 模型。(a) LWR 的参数为 $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 0.25$, LWR-CTRW 的参数为 $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 0.25$, $\sigma = 20$ 。(b) LWR 的参数为 $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 1.1$, LWR-CTRW 的参数为 $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 1.1$, $\sigma = 20$

通过观察图 5 以及对比式子(20)和(27)我们发现相较于传统 LWR 模型中方差仅依赖速度参数 v 和时

间参数 λ_1, λ_2 , CTRW 与 LWR 相结合的模型关键参数均引入了与跳跃过程方差 σ^2 相关的项。特别值得注意的是主导长期扩散行为的线性项系数 B_{31} : 分子增加了 $2\lambda_1\lambda_2\sigma^2$ 。这一变化表明, 跳跃过程直接增强了扩散的线性增长速率, 放大了系统的反常扩散效应。同时, 系数 B_2 和 B_{32} 中 $\lambda_1\lambda_2\sigma^2$ 与 v^2 的组合项, 进一步凸显了跳跃与飞行两种输运模式间的非线性耦合, 使得整体扩散动力学对微观参数(如跳跃强度 σ) 的变化更为敏感。

综上, 我们得到引入跳跃机制的核心优势在于其更真实地刻画了复杂系统中多阶段、多模式的输运过程。传统莱维游走描述的“等待-飞行”模式被扩展为“等待-跳跃-飞行”的混合机制。这种扩展显著提升了模型在两类重要领域的适用性: 一是生物物理领域, 如细胞内囊泡或分子马达的转运过程, 其中粒子在细胞质中经历局部布朗运动(跳跃)后被马达蛋白长程运输(飞行); 二是环境与金融领域, 如污染物在异质多孔介质中的迁移(局部扩散与快速通道流动的结合), 或金融资产价格在常态波动(跳跃)与极端事件冲击(长程相关)下的演化。模型通过 σ^2 量化了局部跳跃强度, 为理解和预测此类具有层级输运机制的系统提供了更精准的理论工具[22]。

4. 结论

间歇性搜索策略在现实系统中具有广泛的应用背景, 其核心机制通常被建模为布朗运动与莱维游走两态交替的复合随机过程。本文在指数分布框架下, 提出并分析了描述该策略的两种模型。通过对莱维游走固有的方向不对称性进行随机化处理, 并深入考察跳跃行为对模型动力学的影响, 进而系统研究了两种模型所展现的反常扩散特性。研究表明, 两类模型均表现出显著的跨时间尺度扩散行为: 在短时间尺度上呈现超扩散特征, 而在长时间尺度上则收敛于正常扩散。值得注意的是, 跳跃机制的引入显著加速了系统的整体扩散速率, 这不仅使模型对实际观测现象的刻画更为准确, 也为其拓展应用于描述更广泛的复合随机过程展现了广阔的前景。

参考文献

- [1] Vitali, S., Sposini, V., Sliusarenko, O., Paradisi, P., Castellani, G. and Pagnini, G. (2018) Langevin Equation in Complex Media and Anomalous Diffusion. *Journal of the Royal Society Interface*, **15**, Article ID: 20180282. <https://doi.org/10.1098/rsif.2018.0282>
- [2] He, Y., Burov, S., Metzler, R. and Barkai, E. (2008) Random Time-Scale Invariant Diffusion and Transport Coefficients. *Physical Review Letters*, **101**, Article ID: 058101. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.101.058101>
- [3] Yuval, G., Gefen, A., Amnon, A. and Aharony, A. (1983) Anomalous Diffusion on Percolating Clusters. *Physical Review Letters*, **50**, 77-80. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.77>
- [4] Havlin, S. and Ben-Avraham, D. (1987) Diffusion in Disordered Media. *Advances in Physics*, **36**, 695-798. <https://doi.org/10.1080/00018738700101072>
- [5] Bouchaud, J. and Georges, A. (1990) Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications. *Physics Reports*, **195**, 127-293. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90099-n](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90099-n)
- [6] Montroll, E.W. and Weiss, G.H. (1965) Random Walks on Lattices. II. *Journal of Mathematical Physics*, **6**, 167-181. <https://doi.org/10.1063/1.1704269>
- [7] Zaburdaev, V., Denisov, S. and Klafter, J. (2015) Lévy Walks. *Reviews of Modern Physics*, **87**, 483-530.
- [8] Palyulin, V.V., Blackburn, G., Lomholt, M.A., Watkins, N.W., Metzler, R., Klages, R., et al. (2019) First Passage and First Hitting Times of Lévy Flights and Lévy Walks. *New Journal of Physics*, **21**, Article ID: 103028. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab41bb>
- [9] Cipriani, P., Denisov, S. and Politi, A. (2005) From Anomalous Energy Diffusion to Levy Walks and Heat Conductivity in One-Dimensional Systems. *Physical Review Letters*, **94**, Article ID: 244301. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.94.244301>
- [10] Sokolov, I.M., Chechkin, A.V. and Klafter, J. (2004) Fractional Diffusion Equation for a Power-Law-Truncated Lévy Process. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **336**, 245-251. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.044>

-
- [11] Bothe, M., Sagues, F. and Sokolov, I.M. (2019) Mean Squared Displacement in a Generalized Lévy Walk Model. *Physical Review E*, **100**, Article ID: 012117. <https://doi.org/10.1103/physreve.100.012117>
 - [12] Albers, T. and Radons, G. (2018) Exact Results for the Nonergodicity of d -Dimensional Generalized Lévy Walks. *Physical Review Letters*, **120**, Article ID: 104501. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.120.104501>
 - [13] Albers, T. and Radons, G. (2022) Nonergodicity of D-Dimensional Generalized Lévy Walks and Their Relation to Other Space-Time Coupled Models. *Physical Review E*, **105**, Article ID: 014113. <https://doi.org/10.1103/physreve.105.014113>
 - [14] Sagi, Y., Brook, M., Almog, I. and Davidson, N. (2012) Observation of Anomalous Diffusion and Fractional Self-Similarity in One Dimension. *Physical Review Letters*, **108**, Article ID: 093002. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.108.093002>
 - [15] Lomholt, M.A., Tal, K., Metzler, R. and Joseph, K. (2008) Lévy Strategies in Intermittent Search Processes Are Advantageous. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **105**, 11055-11059. <https://doi.org/10.1073/pnas.0803117105>
 - [16] Bénichou, O., Loverdo, C., Moreau, M. and Voituriez, R. (2011) Intermittent Search Strategies. *Reviews of Modern Physics*, **83**, 81-129. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.83.81>
 - [17] Klafter, J., Blumen, A. and Shlesinger, M.F. (1987) Stochastic Pathway to Anomalous Diffusion. *Physical Review A*, **35**, 3081-3085. <https://doi.org/10.1103/physreva.35.3081>
 - [18] Klafter, J. and Silbey, R. (1980) Derivation of the Continuous-Time Random-Walk Equation. *Physical Review Letters*, **44**, 55-58. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.44.55>
 - [19] Kenkre, V.M., Montroll, E.W. and Shlesinger, M.F. (1973) Generalized Master Equations for Continuous-Time Random Walks. *Journal of Statistical Physics*, **9**, 45-50. <https://doi.org/10.1007/bf01016796>
 - [20] 周甜. 时间连续随机游走以及莱维游走的随机重置[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2019.
 - [21] Song, M.S., Moon, H.C., Jeon, J. and Park, H.Y. (2018) Neuronal Messenger Ribonucleoprotein Transport Follows an Aging Lévy Walk. *Nature Communications*, **9**, Article No. 344. <https://doi.org/10.1038/s41467-017-02700-z>
 - [22] Berkowitz, B., Cortis, A., Dentz, M. and Scher, H. (2006) Modeling Non-Fickian Transport in Geological Formations as a Continuous Time Random Walk. *Reviews of Geophysics*, **44**, RG2003. <https://doi.org/10.1029/2005rg000178>