

# 一类具有早期筛查和疫苗接种等多种控制措施的百日咳传播模型的动力学分析

刘 莹, 王晓静\*

北京建筑大学理学院, 北京

收稿日期: 2025年8月4日; 录用日期: 2025年8月28日; 发布日期: 2025年9月8日

## 摘 要

基于百日咳的传播动力学特性, 本文建立了一类包含早期筛查和疫苗接种等多种控制措施的SEVIQR百日咳传播模型。通过理论分析, 我们证明了当控制再生数小于1时, 系统的无病平衡点具有全局渐近稳定性; 当控制再生数大于1时, 系统存在唯一的地方病平衡点。进而, 通过敏感性分析揭示了各控制参数对疾病传播的影响程度。数值模拟结果表明: 提高疫苗接种覆盖率、加强早期筛查频率以及强化隔离措施等综合干预策略能显著遏制百日咳的传播。

## 关键词

百日咳, 稳定性, 疫苗接种, 早期筛查, 隔离

## Dynamical Analysis of a Pertussis Transmission Model with Multiple Control Measures Incorporating Early Screening and Vaccination

Kun Liu, Xiaojing Wang\*

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Aug. 4<sup>th</sup>, 2025; accepted: Aug. 28<sup>th</sup>, 2025; published: Sep. 8<sup>th</sup>, 2025

## Abstract

Based on the transmission dynamics of pertussis, a SEVIQR pertussis transmission model with

\*通讯作者。

文章引用: 刘莹, 王晓静. 一类具有早期筛查和疫苗接种等多种控制措施的百日咳传播模型的动力学分析[J]. 应用数学进展, 2025, 14(9): 88-99. DOI: 10.12677/aam.2025.149402

multiple control measures incorporating early screening and vaccination is constructed. Through theoretical analysis, we rigorously prove that when the control reproduction number is less than one, the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable, whereas when the control reproduction number is more than one, the system admits a unique endemic equilibrium. Furthermore, sensitivity analysis is conducted to evaluate the impact of control parameters on disease transmission. Numerical simulations demonstrate that comprehensive intervention strategies including increasing vaccination coverage, enhancing early screening frequency and strengthening isolation measures can significantly suppress the transmission of pertussis.

## Keywords

Pertussis, Stability, Vaccination, Early Screening, Isolation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

百日咳(*Bordetella pertussis*)是由百日咳鲍特菌引起的急性呼吸道传染病,通过呼吸道飞沫传播,人群普遍对百日咳易感。我国自1978年将百日咳白喉破伤风联合疫苗纳入儿童免疫规划后,百日咳的发病率大幅降低。但是自20世纪80年代以来,部分疫苗高覆盖率的发达国家报道出现“百日咳再现”现象,我国2011年后也出现这一公共卫生问题[1][2]。近年来,百日咳病例数更是显著攀升,2022年报告病例达38,295例,是2009年的约20倍[1]。据国家疾控局发布的2024年1月至2月的传染病疫情数据,全国报告百日咳病例数为32,380例,比2023年同期增长了近23倍[3]。

关于百日咳的检测与防控措施,不少学者对此进行了大量的研究。1998年, Hethcote等人对百日咳季节性发病的机制做了分析[4],并建立了一类具有年龄结构的百日咳传染病模型来刻画获得性免疫的减弱和疫苗引起的免疫系统的衰弱[5],但没有考虑疫苗效力的非永久性。2000年, Boven等人发现了感染百日咳获得的免疫力并不是终身的,并基于此建立了一个具有年龄结构且可以多次感染的流行病模型[6]。2016年, Feng等人考虑了被动获得的母源抗体和主动免疫力均会减弱,从而可能多次感染,依此建立了一类具有年龄结构的百日咳传播模型并对其进行动力学分析[7]。2019年, 文等人研究了隔离措施对控制百日咳传播的影响[8]。2020年, Tian等人根据百日咳的传播机制,建立了一个具有家庭因素影响的百日咳模型[9]。之后Tian等人又考虑了隐性感染的影响,建立了一类具有隐性感染和年龄结构的百日咳模型[10]。

大量研究表明婴幼儿接种、隔离、孕期接种等控制措施均对控制百日咳的传播起着重要的作用。2024年我国发布了中国百日咳诊疗与预防指南,其中指出百日咳疑似病例或者临床诊断病例应尽可能进行实验室病原学检测,对于百日咳病例的精准诊治和防控以及监测具有重要意义;同时,早期诊断和治疗可以提高百日咳的防治效果[11]。因此,本文综合考虑了疫苗接种、隔离和早期筛查与治疗等控制措施,建立了一个SEVIQR模型,并研究了其动力学性质,深入探究了疫苗接种、隔离、早期筛查等控制措施对百日咳传播的影响,并结合研究为百日咳防控提出建议。

## 2. 模型建立

根据百日咳的传播机理,我们建立了具有早期筛查、疫苗接种和隔离等多种控制措施的传染病模型。将总人口分为六个仓室:易感者( $S(t)$ ),疫苗接种者( $V(t)$ ),潜伏期感染者( $E(t)$ ),感染者( $I(t)$ ),隔离

者( $Q(t)$ ), 恢复者( $R(t)$ )。其中, 我们用  $c_f$  表示筛查频率,  $c_p$  表示通过早期诊断筛查出百日咳病例的概率, 用  $c_f c_p$  来刻画早期筛查对传染病传播的影响。模型的传播流程图如图 1:

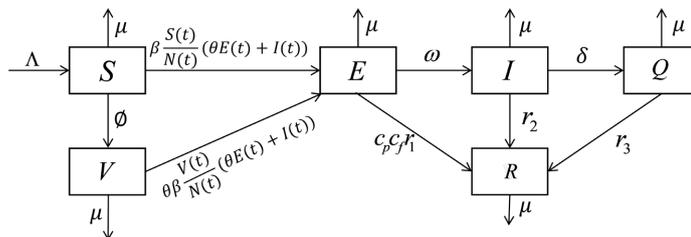


Figure 1. The flowchart of the spread of pertussis  
图 1. 百日咳的传播流程图

流程图对应的模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S(t)}{N(t)} (mE(t) + I(t)) - \phi S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dV(t)}{dt} = \phi S(t) - \frac{\theta \beta V(t)}{N(t)} (mE(t) + I(t)) - \mu V(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)}{N(t)} (mE(t) + I(t)) + \frac{\theta \beta V(t)}{N(t)} (mE(t) + I(t)) - c_p c_f r_1 E(t) - \omega E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \omega E(t) - \delta I(t) - r_2 I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \delta I(t) - r_3 Q(t) - \mu Q(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = c_p c_f r_1 E(t) + r_2 I(t) + r_3 Q(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (1)$$

模型(1)中相关参数见表 1。记  $t$  时刻的总人口为

$$N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)。$$

将模型(1)所有的方程相加得

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N,$$

因此可得  $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ 。根据常微分方程的基本定理[12], 可得

$$\Omega = \left\{ (S, V, E, I, Q, R) \in R_6^+ \mid N = S + V + E + I + Q + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

为模型(1)的一个正向不变集。

Table 1. Biological significance and value of parameters

表 1. 参数生物意义及取值

变量参数	生物意义	取值	来源
$\Lambda$	出生率	9180	[13]
$\phi$	疫苗接种率	0.9	[14]
$\beta$	感染率	0.23	[15]

续表

$\mu$	人口自然死亡率	0.0082	[13]
$\theta$	疫苗弱化过程中被感染的比率	0.000137	[16]
$m$	潜伏期感染者感染率的调节因子	0.3	假设
$\omega$	百日咳病毒潜伏期到感染期的进展率	0.0189	[17]
$c_p$	早期诊断筛查出百日咳病例的概率	0.8	假设
$c_f$	筛查频率	0.5	假设
$\delta$	隔离率	0.5	假设
$r_1$	潜伏期感染者的恢复率	0.243	假设
$r_2$	感染者的恢复率	0.143	[18]
$r_3$	隔离者的恢复率	0.2	假设

### 3. 模型的稳定性分析

令模型(1)的右端为0, 即:

$$\begin{cases} \Lambda - \frac{\beta S(t)}{N(t)}(mE(t) + I(t)) - \phi S(t) - \mu S(t) = 0 \\ \phi S(t) - \frac{\theta \beta V(t)}{N(t)}(mE(t) + I(t)) - \mu V(t) = 0 \\ \frac{\beta S(t)}{N(t)}(mE(t) + I(t)) + \frac{\theta \beta V(t)}{N(t)}(mE(t) + I(t)) - c_p c_f r_1 E(t) - \omega E(t) - \mu E(t) = 0 \\ \omega E(t) - \delta I(t) - r_2 I(t) - \mu I(t) = 0 \\ \delta I(t) - r_3 Q(t) - \mu Q(t) = 0 \\ c_p c_f r_1 E(t) + r_2 I(t) + r_3 Q(t) - \mu R(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

当  $E=0$  时, 可得  $E_0 = (S_0, V_0, 0, 0, 0, 0, 0)$  为模型(1)的无病平衡点, 其中

$$S_0 = \frac{\Lambda}{\phi + \mu}, \quad V_0 = \frac{\phi \Lambda}{(\phi + \mu)\mu}.$$

#### 3.1. 控制再生数

下面我们通过下一代矩阵法[19]计算模型的控制再生数。矩阵  $\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{V}$  分别为

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S(t)}{N(t)}(mE(t) + I(t)) + \frac{\theta \beta V(t)}{N(t)}(mE(t) + I(t)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} c_p c_f r_1 E(t) + \omega E(t) + \mu E(t) \\ -\omega E(t) + \delta I(t) + r_2 I(t) + \mu I(t) \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{V}$  在  $E_0$  处的 Jacobian 矩阵分别为

$$F(E_0) = \begin{pmatrix} \frac{m\beta(\mu + \phi\theta)}{\mu + \phi} & \frac{\beta(\mu + \phi\theta)}{\mu + \phi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(E_0) = \begin{pmatrix} c_p c_f r_1 + \omega + \mu & 0 \\ -\omega & r_2 + \delta + \mu \end{pmatrix},$$

计算模型(1)的下一代矩阵为

$$FV^{-1}|_{E^0} = \begin{pmatrix} \frac{m\beta(\mu+\phi\theta)}{\mu+\phi}(r_2+\delta+\mu) + \frac{\beta(\mu+\phi\theta)\omega}{\mu+\phi} & \frac{\beta(\mu+\phi\theta)}{\mu+\phi}(c_p c_f r_1 + \omega + \mu) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由控制再生数  $R_c$  为  $FV^{-1}|_{E^0}$  的谱半径, 计算可得:

$$R_c = \frac{\beta(\mu+\phi\theta)}{(\mu+\phi)(c_p c_f r_1 + \omega + \mu)} \left( m + \frac{\omega}{\delta+r_2+\mu} \right).$$

### 3.2. 地方病平衡点的存在唯一性

**定理 1** 当  $R_c > 1$  时, 模型(1)存在唯一的地方病平衡点  $E^* = (S^*, V^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ 。

证明: 当  $E \neq 0$  时, 令模型(1)右端为 0, 此时有  $N = \frac{\Lambda}{\mu}$ , 得到如下方程:

$$\begin{cases} I = \frac{\omega E}{r_2 + \delta + \mu} \\ Q = \frac{\delta \omega E}{(r_2 + \delta + \mu)(r_3 + \mu)} \\ R = \frac{[c_p c_f r_1 (r_3 + \mu)(r_2 + \delta + \mu) + (r_3 + \mu)r_2 \omega + r_3 \delta \omega] E}{(r_3 + \mu)(r_2 + \delta + \mu) \mu} \end{cases} \quad (3)$$

因此有

$$mE + I = \left( m + \frac{\omega}{r_2 + \delta + \mu} \right) E,$$

设  $m + \frac{\omega}{r_2 + \delta + \mu} = k$ , 即有

$$mE + I = kE, \quad (4)$$

由式(4)和(2)的第 1、2 个方程可得:

$$\begin{cases} S = \frac{\Lambda}{\frac{\mu\beta k E}{\Lambda} + \phi + \mu} \\ V = \frac{\phi\Lambda}{\left( \frac{\mu\theta\beta k E}{\Lambda} + \mu \right) \left( \frac{\mu\beta k E}{\Lambda} + \phi + \mu \right)} \end{cases} \quad (5)$$

将式(4)和式(5)代入(2)的第三个方程中:

$$\left[ \frac{\beta\mu}{\frac{\mu\beta k E}{\Lambda} + \phi + \mu} + \frac{\theta\beta\phi\mu}{\left( \frac{\mu\theta\beta k E}{\Lambda} + \mu \right) \left( \frac{\mu\beta k E}{\Lambda} + \phi + \mu \right)} \right] kE - c_p c_f r_1 E - \omega E - \mu E = 0,$$

化简上式可以得到:

$$aE^2 + bE + c = 0, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= -(c_p c_f r_1 + \omega + \mu) \frac{(\mu \beta k)^2 \theta}{\Lambda^2}, \\ b &= \frac{(\mu \beta k)^2 \theta}{\Lambda} - (2\mu + \phi)(c_p c_f r_1 + \omega + \mu), \\ c &= \mu(c_p c_f r_1 + \omega + \mu)(\phi + \mu)(R_c - 1). \end{aligned}$$

当  $R_c > 1$  时, 显然  $a < 0, c > 0$ 。因此, 式(6)有且只有一个正根, 所以模型(1)存在唯一的地方病平衡点, 定理得证。

### 3.3. 无病平衡点的稳定性

**定理 2** 当  $R_c < 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的; 当  $R_c > 1$  时,  $E_0$  不稳定。

证明: 模型(1)在  $E_0$  处对应的线性化系统的特征方程为

$$(\lambda + \mu)^2 (\lambda + \phi + \mu) (\lambda + r_3 + \mu) H(\lambda) = 0,$$

$$\text{其中, } H(\lambda) = \left( \lambda - \frac{m\beta(\mu + \theta)}{\phi + \mu} + c_p c_f r_1 + \omega + \mu \right) (\lambda + r_2 + \delta + \mu) - \frac{\omega\beta(\mu + \theta\phi)}{\phi + \mu}.$$

显然,  $\lambda = -\mu$  (二重),  $\lambda = -\phi - \mu$ ,  $\lambda = -r_3 - \mu$  为特征方程的三个负实根, 方程的其余特征值满足  $H(\lambda) = 0$ 。接下来, 我们将证明  $H(\lambda) = 0$  的根均具有负实部。

化简  $H(\lambda)$  可得

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \lambda^2 + \left[ c_p c_f r_1 + \omega + \mu + r_2 + \delta + \mu - \frac{m\beta(\mu + \theta)}{\phi + \mu} \right] \lambda \\ &\quad + (r_2 + \delta + \mu) \left( c_p c_f r_1 + \omega + \mu - \frac{m\beta(\mu + \theta)}{\phi + \mu} \right) - \frac{\omega\beta(\mu + \theta\phi)}{\phi + \mu}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} b_1 &= c_p c_f r_1 + \omega + \mu + r_2 + \delta + \mu - \frac{m\beta(\mu + \theta)}{\phi + \mu}, \\ b_2 &= (r_2 + \delta + \mu) \left( c_p c_f r_1 + \omega + \mu - \frac{m\beta(\mu + \theta)}{\phi + \mu} \right) - \frac{\omega\beta(\mu + \theta\phi)}{\phi + \mu}, \\ &= (c_p c_f r_1 + \omega + \mu)(r_2 + \delta + \mu)(1 - R_c) \end{aligned}$$

因此, 当  $R_c < 1$  时,  $b_2 > 0$ 。且由控制再生数  $R_c$  的表达式可得,  $\frac{m\beta(\mu + \theta)}{\phi + \mu} < c_p c_f r_1 + \omega + \mu$ , 即证得  $b_1 > 0$ 。根据韦达定理可知方程  $H(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$  的根均具有负实部。因此当  $R_c < 1$  时,  $E_0$  是局部渐近稳定的。

接下来, 我们将利用零点定理证明当  $R_c > 1$  时,  $E_0$  是不稳定的。显然, 当  $R_c > 1$  时, 有

$$H(0) = (c_p c_f r_1 + \omega + \mu)(r_2 + \delta + \mu)(1 - R_c) < 0,$$

$$b_2 = (r_2 + \delta + \mu) \left( c_p c_f r_1 + \omega + \mu - \frac{m\beta(\mu + \theta)}{\phi + \mu} \right) - \frac{\omega\beta(\mu + \theta\phi)}{\phi + \mu} \\ = (c_p c_f r_1 + \omega + \mu)(r_2 + \delta + \mu)(1 - R_c)$$

根据零点定理, 方程  $H(\lambda) = 0$  必存在正实根。因此, 当  $R_c > 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  是不稳定的。综上所述, 定理得证。

**定理 3** 当  $R_c < 1$  时, 系统(1)的无病平衡点  $E_0$  是全局渐近稳定的。

证明: 根据模型(1)可以得到

$$\dot{N}(t) = \Lambda - \mu N(t),$$

因此, 我们有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$ 。则模型(1)有以下极限系统:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\mu\beta S(t)}{\Lambda}(mE(t) + I(t)) - \phi S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dV(t)}{dt} = \phi S(t) - \frac{\mu\theta\beta S(t)}{\Lambda}(mE(t) + I(t)) - \mu V(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\mu\beta S(t)}{\Lambda}(mE(t) + I(t)) + \frac{\mu\theta\beta S(t)}{\Lambda}(mE(t) + I(t)) - c_p c_f r_1 E(t) - \omega E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \omega E(t) - \delta I(t) - r_2 I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \delta I(t) - r_3 Q(t) - \mu Q(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = c_p c_f r_1 E(t) + r_2 I(t) + r_3 Q(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (7)$$

不难得到模型(7)过任一初值  $\phi \in \Omega$  的解存在, 且  $U(t)$  在  $[0, \infty)$  上是唯一且非负的, 其中  $U(t) = (S(t), V(t), E(t), I(t), Q(t), R(t))^T$ 。此外, 我们可以得到模型(7)在  $\Omega$  中是耗散的, 且当  $t > 0$  时有  $S(t) > 0, V(t) > 0$ 。显然  $E_0$  也是模型(7)的平衡点。

根据定理 2 可知, 当  $R_c < 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的。因此, 只需要证明当  $R_c < 1$  时,  $E_0$  是全局吸引的即可。设  $U(t) = (S(t), V(t), I(t), Q(t), R(t))^T$  是系统(7)过任意初值  $\phi \in \Omega$  的解。设  $\omega(\phi)$  是系统(7)关于  $\phi$  的  $\omega$ -极限集, 为了证明  $E_0$  的全局吸引性, 我们只需要证明  $\omega(\phi) = \{E_0\}$ 。根据上述证明, 我们知道  $U(t)$  在  $\Omega$  上是有界的。因此,  $\omega(\phi)$  是一个紧集, 也是  $\Omega$  的一个子集。定义

$$H(y) = y - 1 - \ln y, y > 0,$$

设

$$L_1 = \{\varphi \in \Omega : \varphi_1(0) > 0, \varphi_2(0) > 0\} \subseteq \Omega.$$

我们在  $L_1$  上定义一个  $V$  泛函:

$$V(\varphi) = S_0 H\left(\frac{\varphi_1(0)}{S_0}\right) + V_1^0 H\left(\frac{\varphi_2(0)}{V_1^0}\right) + \varphi_3(0) + \frac{(\mu + \theta\phi)\mu\beta}{(r_2 + \delta + \mu)(\phi + \mu)} \varphi_4(0),$$

显然, 集合  $L_1$  是关于系统(7)的正向不变集, 且函数  $V$  在集合  $L_1$  上是连续的。当  $t > \alpha (\alpha > 0)$  时, 函数  $V$  沿着  $U(t) \in L_1$  的导数如下:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(U(t)) &= \left(1 - \frac{S_0}{S}\right) \left[ \Lambda - \frac{\mu\beta S(t)}{\Lambda} (mE(t) + I(t)) - \phi S(t) - \mu S(t) \right] \\
&\quad + \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \left[ \phi S(t) - \frac{\mu\theta\beta S(t)}{\Lambda} (mE(t) + I(t)) - \mu V(t) \right] \\
&\quad + \frac{\mu\beta S(t)}{\Lambda} (mE(t) + I(t)) + \frac{\mu\theta\beta S(t)}{\Lambda} (mE(t) + I(t)) - c_p c_f r_1 E(t) - \omega E(t) - \mu E(t) \quad (8) \\
&\quad + \frac{(\mu + \theta\phi)\mu\beta}{(r_2 + \delta + \mu)(\phi + \mu)} [\omega E(t) - \delta I(t) - r_2 I(t) - \mu I(t)] \\
&= \mu S_0 \left(2 - \frac{S_0}{S} - \frac{S}{S_0}\right) + \mu V_0 \left(3 - \frac{S_0}{S} - \frac{V_0 S}{V S_0} - \frac{V}{V_0}\right) + (c_p c_f r_1 + \omega + \mu)(R_c - 1)
\end{aligned}$$

显然, 当  $R_c < 1$  时,  $\dot{V}(U(t)) \leq 0$ , 且函数  $V$  是  $\Omega$  上的一个 Lyapunov 函数。由文献[20]中的推论 2.1 可知, 对于任意  $\psi \in \omega(\varphi)$ , 有  $\dot{V}(\psi) = 0$ 。

对于任意的  $\psi \in \omega(\phi)$ , 设  $U(t)$  是模型(8)过  $\psi$  的解。根据  $\omega(\phi)$  的不变性, 对于所有  $t \in \mathbb{R}$  有  $U(t) \in \omega(\phi)$ 。由(8)式知, 对于所有  $t \in \mathbb{R}$  有  $S(t) = S_0, V(t) = V_0$ 。通过模型(7)的第一个方程, 可以得到对于所有的  $t \in \mathbb{R}$  有  $E(t) = I(t) = 0$ 。由模型(7)的第 5 和第 6 个方程并结合  $\omega(\phi)$  的不变性知, 对于所有  $t \in \mathbb{R}$  有  $Q(t) = R(t) = 0$ 。因此当  $R_c < 1$  时, 有  $\omega(\phi) = \{E_0\}$ , 故  $W^s(E_0) = \Omega$ , 其中  $W^s(E_0)$  是模型(7)的无病平衡点  $E_0$  的稳定集。显然有  $\omega(\phi) \cap W^s(E_0) \neq \emptyset$ 。由文献[21]中的定理 1.2 知  $\omega(\phi) = \{E_0\}$ 。

#### 4. 敏感性分析

为了评估模型(1)中各参数对百日咳传播的影响, 我们通过 PRCC 方法对其进行了敏感性分析, 其结果如图 2 所示:

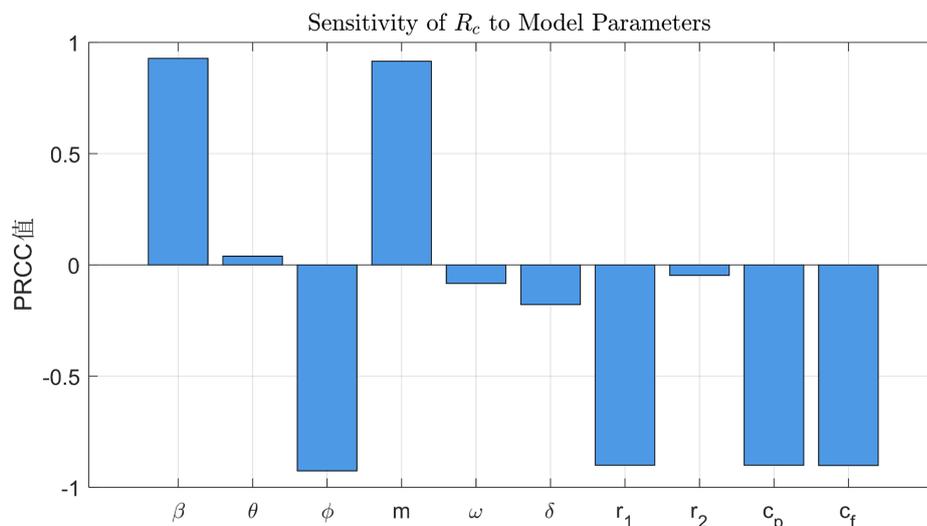


Figure 2. Sensitivity analysis of each parameter to the control reproduction number

图 2. 各参数对控制再生数的敏感性分析

从图 2 中可以看出  $\beta$ 、 $\theta$ 、 $m$  与  $R_c$  是呈正相关的,  $\delta$ 、 $\phi$ 、 $r_1$ 、 $r_2$ 、 $\omega$ 、 $c_f$ 、 $c_p$  与  $R_c$  是呈负相关的, 且  $R_c$  对接触率  $\beta$ 、疫苗失效率  $\phi$ 、潜伏者的恢复率  $r_1$ 、早期诊断筛查出百日咳病例的概率  $c_p$  和筛查

频率  $c_f$  的变化比较敏感, 对感染者的恢复率  $r_2$  的变化最不敏感。表明提高百日咳疫苗的接种率、百日咳感染者的隔离率, 以及加强百日咳疑似病例的早期诊断, 并对诊断出的百日咳潜伏期感染者及时治疗均可以有效地提高百日咳的防治效果。同时, 揭示了早期疫苗接种以及筛查潜伏期感染者并及时治疗比后期通过隔离来控制百日咳的传播更能降低传播风险。这一发现支持将防控重点前移, 例如加强高危人群的免疫接种和症状前筛查, 而非仅依赖病例出现后的被动管理。

### 5. 数值模拟

在本节, 我们选取参考文献[15]中根据临床数据拟合出的感染率进行数值模拟, 其它参数取值及来源如表 1 所示。绘制了感染人数在不同疫苗接种率  $\phi$ , 不同筛查频率  $c_f$ , 不同隔离率  $\delta$  以及不同潜伏期恢复率  $r_1$  下随着时间的变化图像, 见图 3。数值仿真结果显示: 当疫苗接种率提升、筛查频率增加、隔离措施强化以及潜伏期恢复率提高时, 百日咳感染人数的峰值呈现显著下降趋势, 且疫情持续时间明显缩短。这一量化分析表明, 上述防控参数的变化对百日咳传播动力学具有显著的调控作用。基于数值模拟结果, 可以得出以下结论: 通过协同优化疫苗接种覆盖率、病例筛查效率、隔离率以及潜伏期病例的早期干预效果, 能够有效减弱百日咳的传播强度, 缩短流行周期。

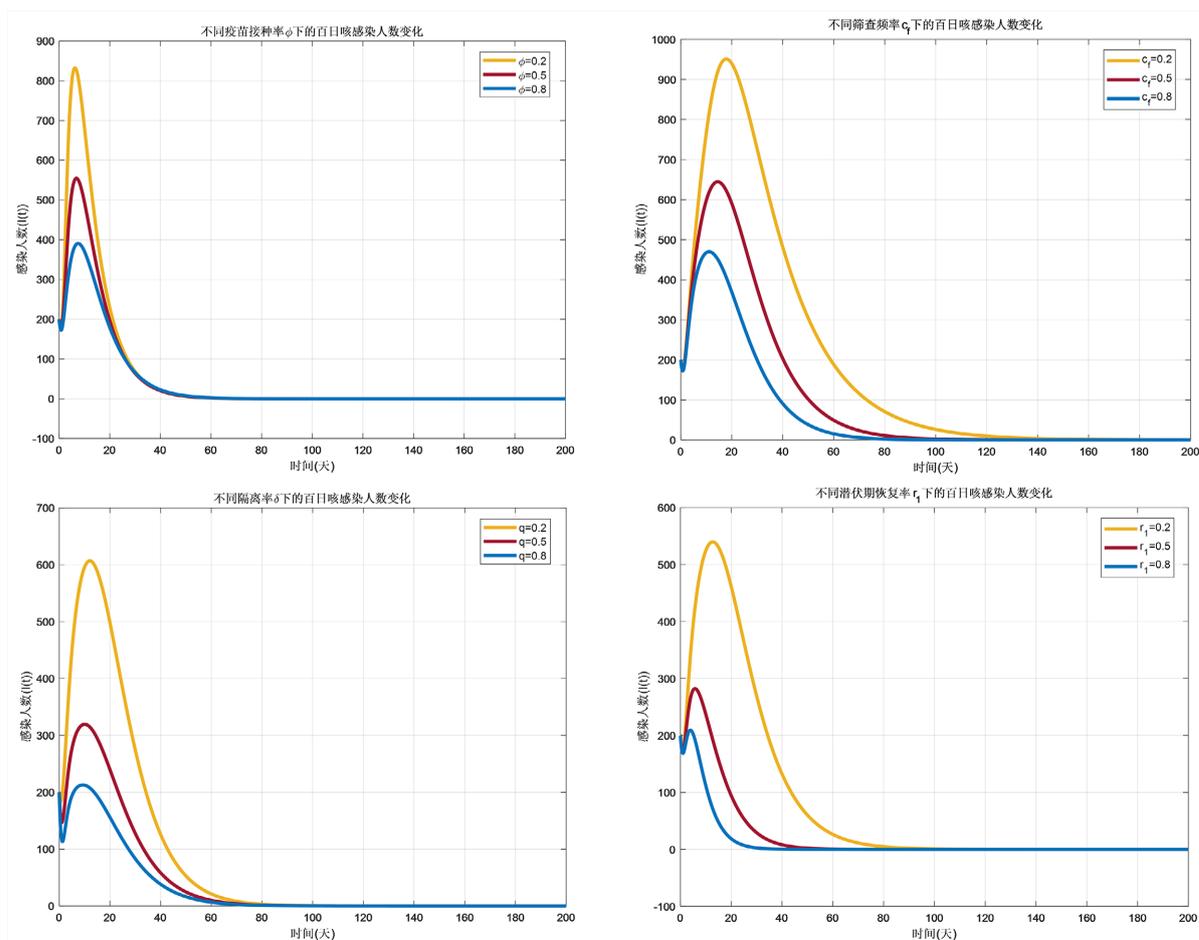
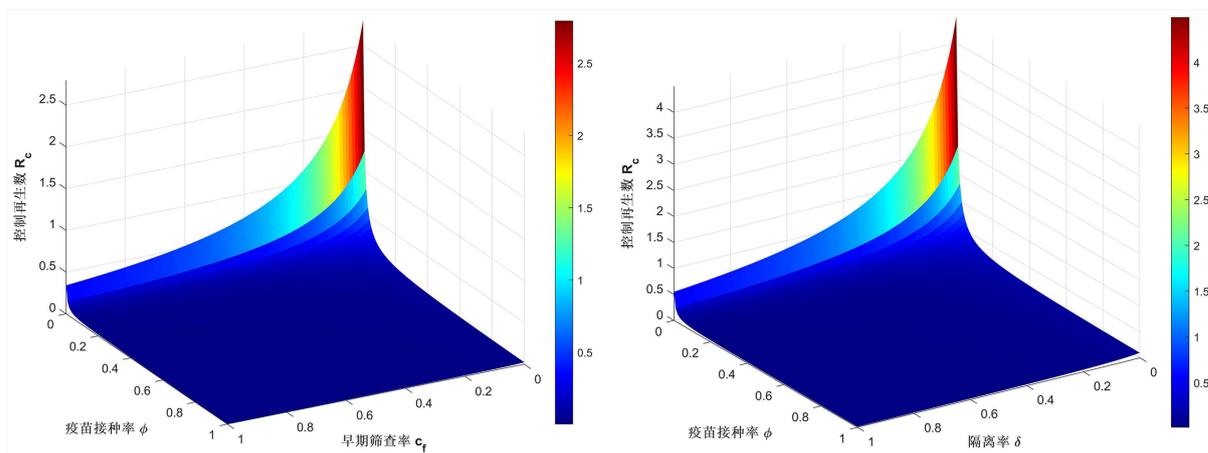


Figure 3. The changing image of the number of pertussis infections  $I(t)$  with given different values of  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $r_1$ ,  $c_f$

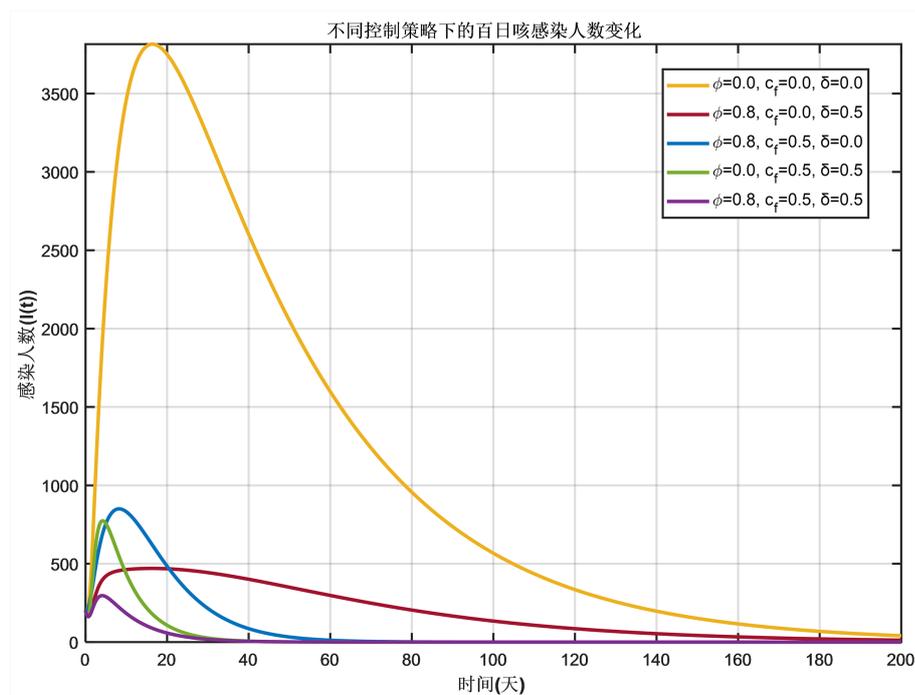
图 3. 不同  $\delta$ 、 $\phi$ 、 $r_1$ 、 $c_f$  取值下的百日咳感染者人数  $I(t)$  的变化图像



**Figure 4.** The changing image of the control reproduction number  $R_c$  with vaccination rate  $\phi$ , early screening frequency  $c_f$ , and isolation rate  $\delta$

**图 4.** 控制再生数  $R_c$  随着疫苗接种率  $\phi$ 、早期筛查频率  $c_f$  和隔离率  $\delta$  的变化图像

图 4 分别显示了控制再生数  $R_c$  随着疫苗接种率  $\phi$  和早期筛查频率  $c_f$  协同变化以及控制再生数  $R_c$  随着疫苗接种率  $\phi$  和隔离率  $\delta$  协同变化的图像。结果表明, 在低筛查频率和低隔离率条件下, 提高疫苗接种率对降低  $R_c$  的效果更为显著; 而在高疫苗接种率下, 增强筛查频率和隔离率能更快地将  $R_c$  降至临界值以下。协同效应分析表明, 两种措施同时实施时产生的降  $R_c$  效果远超过各自单独实施的效果之和。



**Figure 5.** The changing image of the number of pertussis infections under different control strategies

**图 5.** 不同控制策略下百日咳感染人数的变化图像

图 5 绘制了百日咳感染人数在疫苗接种率、早期筛查频率和隔离率不同组合策略下的变化图像。结果表明, 当三种防控措施协同实施时, 感染人数峰值显著降低, 所以有必要构建“接种 - 筛查 - 隔离”

三位一体的综合防控体系。在两两组合的策略中, 同时实施疫苗接种和隔离措施能够最有效地降低感染人数峰值。因此, 在资源配置过程中, 可依据各地区的疫情态势和资源条件, 优先加强薄弱环节的防控能力建设, 从而最大化整体防控效果。

## 6. 结论

本文构建了一类包含疫苗接种和早期筛查等多种控制措施的百日咳传播动力学模型。首先证明了系统(1)的无病平衡点当  $R_c < 1$  时, 是全局渐近稳定的; 当  $R_c > 1$  时, 系统存在唯一的地方病平衡点。随后依据 PRCC 进行的敏感性分析的结果表明, 提高百日咳疫苗的接种率、百日咳感染者的隔离率, 以及加强百日咳疑似病例的早期诊断, 并对诊断出的百日咳潜伏期感染者及时治疗对百日咳疫情的防控具有显著影响。数值模拟结果进一步验证了理论分析, 直观展示了提高疫苗接种率、加强病例筛查频率、提升潜伏期患者早期治疗率以及强化隔离措施等干预策略对控制百日咳传播的有效性。基于综合实施三种防控措施具有明显的协同增效作用, 我们提出以下防控建议: 医疗机构需建立“筛查-诊断-隔离”联动机制, 特别是对学校等聚集性场所开展主动监测; 建议公共卫生部门将潜伏期抗微生物预防治疗纳入防控指南; 在资源配置过程中, 可依据各地区的疫情态势和资源条件, 优先加强薄弱环节的防控能力建设, 从而最大化整体防控效果。此外, 本文未考虑人群年龄结构的异质性, 而百日咳在不同年龄组的传播风险和免疫特征存在显著差异, 后续研究可通过构建多年龄层结构化模型, 并结合流行病学的实际数据进一步验证干预策略的群体效果。

## 基金项目

北京建筑大学研究生教育教学质量提升项目资助(J2023021)。

## 参考文献

- [1] 宁桂军, 高源, 吴丹, 等. 中国 2011-2017 年百日咳流行病学特征分析[J]. 中国疫苗和免疫, 2018, 24(3): 264-267.
- [2] Choi, Y.H., Campbell, H., Amirthalingam, G., van Hoek, A.J. and Miller, E. (2016) Investigating the Pertussis Resurgence in England and Wales, and Options for Future Control. *BMC Medicine*, **14**, Article No. 121. <https://doi.org/10.1186/s12916-016-0665-8>
- [3] 黄卓英, 任佳, 沈思, 等. 全球百日咳防控现状和中国百日咳防控策略展望[J]. 中国疫苗和免疫, 2023, 29(5): 606-612.
- [4] Hethcote, H.W. (1998) Oscillations in An Endemic Model for Pertussis. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, **6**, 61-88.
- [5] Hethcote, H.W., Yi, L. and Zhujun, J. (1999) Hopf Bifurcation in Models for Pertussis Epidemiology. *Mathematical and Computer Modelling*, **30**, 29-45. [https://doi.org/10.1016/s0895-7177\(99\)00196-x](https://doi.org/10.1016/s0895-7177(99)00196-x)
- [6] van Boven, M., de Melker, H.E., Schellekens, J.F.P. and Kretzschmar, M. (2000) Waning Immunity and Sub-Clinical Infection in an Epidemic Model: Implications for Pertussis in the Netherlands. *Mathematical Biosciences*, **164**, 161-182. [https://doi.org/10.1016/s0025-5564\(00\)00009-2](https://doi.org/10.1016/s0025-5564(00)00009-2)
- [7] Feng, Z., Han, Q., Qiu, Z., Hill, A.N. and Glasser, J.W. (2015) Computation of  $\mathcal{R}$  in Age-Structured Epidemiological Models with Maternal and Temporary Immunity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B*, **21**, 399-415. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.399>
- [8] 南希, 刘俊利. 一类带有隔离的百日咳传染病模型[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2019, 35(3): 367-372.
- [9] Tian, X. and Wang, W. (2019) Dynamical Analysis of Age-Structured Pertussis Model with Covert Infection. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 1631-1645. <https://doi.org/10.1002/mma.5989>
- [10] 田轩, 王稳地, 李博. 具有家庭因素的百日咳模型的稳定性分析[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(3): 94-99.
- [11] 中华医学会感染病学分会儿科感染学组, 国家卫生健康委能力建设和继续教育儿科专委会感染组, 中国临床实践指南联盟方法学专委会, 等. 中国百日咳诊疗与预防指南(2024 版) [J]. 中华医学杂志, 2024, 104(15): 1258-1279.

- 
- [12] Hale, J.K. (1980) Ordinary Differential Equations. 2nd Edition, Krieger Publishing Company.
- [13] Han, Q. (2022) An Age-Structured Model for Pertussis Transmission with Multiple Infections Studying the Effects of Childhood DTAP and Adolescent Tdapvaccines. *Journal of Biological Systems*, **30**, 761-797. <https://doi.org/10.1142/s0218339022500280>
- [14] National Center for Health Statistics (2025) Whooping Cough or Pertussis. <https://www.cdc.gov/nchs/fastats/whooping-cough.htm>
- [15] Feng, Z., Glasser, J.W., Hill, A.N., Franko, M.A., Carlsson, R., Hallander, H., *et al.* (2014) Modeling Rates of Infection with Transient Maternal Antibodies and Waning Active Immunity: Application to Bordetella Pertussis in Sweden. *Journal of Theoretical Biology*, **356**, 123-132. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2014.04.020>
- [16] Wendelboe, A.M., Van Rie, A., Salmaso, S. and Englund, J.A. (2005) Duration of Immunity against Pertussis after Natural Infection or Vaccination. *Pediatric Infectious Disease Journal*, **24**, S58-S61. <https://doi.org/10.1097/01.inf.0000160914.59160.41>
- [17] Healy, C.M., Munoz, F.M., Rench, M.A., Halasa, N.B., Edwards, K.M. and Baker, C.J. (2004) Prevalence of Pertussis Antibodies in Maternal Delivery, Cord, and Infant Serum. *The Journal of Infectious Diseases*, **190**, 335-340. <https://doi.org/10.1086/421033>
- [18] Anderson, R.M. and May, R.M. (1991) Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198545996.001.0001>
- [19] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. [https://doi.org/10.1016/s0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/s0025-5564(02)00108-6)
- [20] Guo, S. and Ma, W. (2019) Remarks on a Variant of Lyapunov-Lasalle Theorem. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **16**, 1056-1066. <https://doi.org/10.3934/mbe.2019050>
- [21] Thieme, H. (1992) Convergence Results and a Poincaré-Bendixson Trichotomy for Asymptotically Autonomous Differential Equations. *Journal of Mathematical Biology*, **30**, 755-763. <https://doi.org/10.1007/bf00173267>