

计算机辅助教学下分配问题的概率计算

梁晋雯

北京工业大学数学统计学与力学学院, 北京

收稿日期: 2025年8月15日; 录用日期: 2025年9月8日; 发布日期: 2025年9月16日

摘要

《概率论与数理统计》中古典概型的计算是重难点, 其中对物品进行分组的问题称为分配问题, 本文给出了计算分配问题基本事件总数以及感兴趣事件含基本事件数量的公式。为进一步强化教学的可视化和验证环节, 凸显计算机辅助教学的价值, 文章引入蒙特卡罗模拟方法。这种“理论公式 + 计算机验证”的融合教学模式, 在提升学生对分配问题精确建模的同时, 培养了学生运用计算工具解决复杂概率问题的思维。教学实践表明, 该方法能有效突破传统课堂中抽象公式推导的瓶颈, 显著提升学生的学习兴趣和解决实际问题的信心。

关键词

排列组合, 分配问题, 古典概型, 计算机辅助教学

Probability Calculation for Assignment Problems under Computer-Assisted Instruction

Jinwen Liang

School of Mathematics, Statistics and Mechanics, Beijing University of Technology, Beijing

Received: Aug. 15th, 2025; accepted: Sep. 8th, 2025; published: Sep. 16th, 2025

Abstract

In Probability and Mathematical Statistics, the calculation of classical probability models is a key and challenging component. Among these, the problem of grouping objects is defined as the assignment problem. This paper provides formulas for calculating the total number of elementary events in assignment problems and the count of elementary events corresponding to the target event. To enhance visualization and validation in teaching and underscore the value of computer-assisted instruction, we integrate Monte Carlo simulation. The integrated teaching model of “theoretical

formulation + computational verification” not only enhances students’ ability to precisely model allocation problems but also cultivates their computational thinking for solving complex probability-related challenges. Teaching practices demonstrate that this approach effectively overcomes the bottleneck of abstract formula derivation in traditional classrooms, significantly boosting students’ learning motivation and confidence in addressing real-world problems.

Keywords

Permutations and Combinations, Assignment Problems, Classical Probability Model, Computer-Assisted Instruction

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在《概率论与数理统计》的教学实践中，古典概型作为整个课程体系的重要组成部分，其相关概念的理解、样本空间的构建以及概率计算方法的掌握，是整个教学过程中公认的核心难点之一[1][2]。该问题的关键挑战在于：首先需要精确构建样本空间，这要求教师引导学生正确理解试验的可能性特征，帮助学生区分不同结果的对称性，避免在样本空间构建中出现重复或遗漏的问题；其次，在求解基本事件总数与目标事件包含的基本事件数时，必须严格遵循排列组合数的基本原理，需要教师强化乘法原理、加法原理和特定公式的应用训练，以提升学生的数学严谨性。值得注意的是，学生在计算过程中常因未能准确区分有序排列与无序组合的适用条件，导致出现概率值计算偏差。因此，强化排列组合知识的迁移训练，建立其与概率计算问题的映射关系，是突破该教学瓶颈的有效策略。

将固定数量的物品分成若干组的问题称为分配问题。在教学实践中，学生普遍反映分配问题公式抽象、分类判断困难，尤其在面对多分组情境时容易混淆不同情形的计算规则。传统教学依赖静态板书推导，难以直观展示分组过程及不同计算方法的缘由，导致学生理解深度有限，公式记忆和应用流于表面。为了克服这一教学困境，除了系统梳理理论公式外，对于分配问题的概率计算，学生可以在理解的基础上准确记忆并熟练运用关键的数学公式。深刻理解这些公式的推导逻辑和使用条件，是学生进行精确手动计算、建立概率直觉的基石。

在人工智能技术广泛应用的时代背景下，为了提高教学的质量和效率[3]-[5]，引入蒙特卡罗模拟的思想具有突出优势，它能将抽象理论与动态实践相结合，为课堂注入活力。该方法的核心在于将复杂的、可能难以用经典公式求解的分配问题概率计算，转化为一个统计估计问题。具体而言，教师可以指导学生通过计算机程序，即简单的随机数抽样实验，反复生成符合问题约束条件的大量随机样本。然后，统计其中满足目标事件条件的样本出现的频率。最后，根据大数定律，利用此观测频率作为真实概率的近似估计值。这种基于随机模拟的解决方案，不仅提供了一种强大的验证工具，能有效化解学生对于公式计算结果的疑虑，更能将枯燥的概率计算转化为生动的探索过程。学生通过亲自调整参数、观察频率的波动与收敛，直观感知概率的频率解释和大数定律的威力。因此，在教学实践中，鼓励学生在掌握核心公式的同时，学习运用蒙特卡罗模拟这一有力工具，能更系统地为学生构建解决实际问题的能力框架。

2. 分配问题

设基本事件总数为 n ，感兴趣事件 A 包含基本事件数量为 k ，则 $P(A) = \frac{k}{n}$ 。数量 n 和 k 的确定常常

会涉及到排列组合数的计算。将 n 个物品分成 k 组，每组含 n_i 个物品，其中 $n_1 + \dots + n_k = n$ ，有多少种分法？对于这样一个分配问题，如果 $n_1, \dots, n_k$ 互不相同，分组方法数可以概括为**定理 1**。

定理 1 把 n 个物品分成 k 组，令第 i 组有 n_i 个物品， $i=1, \dots, k$ ，其中 $n_1 + \dots + n_k = n$ 。若 $n_1, \dots, n_k$ 互不相同，则不同的分组方法有 $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ 种。

证明 由于第 1 组含 n_1 个物品，有 $C_n^{n_1}$ 种可能；同理第 2 组含 n_2 个物品，有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种可能；以此类推，第 $k-1$ 组含 n_{k-1} 个物品，有 $C_{n-n_1-\dots-n_{k-2}}^{n_{k-1}}$ 种可能；第 k 组含 n_k 个物品，有 $C_{n-n_1-\dots-n_{k-2}-n_{k-1}}^{n_k}$ 种可能。故不同的分组方法有

$$\begin{aligned} & C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-2}}^{n_{k-1}} C_{n-n_1-\dots-n_{k-2}-n_{k-1}}^{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \dots \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-2})!}{n_{k-1}!(n-n_1-\dots-n_{k-2}-n_{k-1})!} \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\dots-n_{k-1}-n_k)!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}. \end{aligned}$$

定理 1 给出了将 n 个物品分成无编号的 k 组的计算公式。如表 1 所示，如果这 k 组有编号，不同的分组方法有 $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} A_k^k$ 种。如果分成的 k 组中有 m 组 ($m \leq k$) 物品数是相等的，为方便，不妨设

$n_1 = \dots = n_m$ ，此种情况即为均匀分组。进一步地，如果这 k 组没有编号，不同的分组方法有 $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k! A_m^m}$

种；如果这 k 组有编号，不同的分组方法有 $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k! A_m^m} A_k^k$ 种。如果 $m=k$ 恰成立，即将 n 个物品均匀

分成 k 组且 k 个组有编号的分法为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ 种。

Table 1. Summary of partition counting methods

表 1. 分组计数方法汇总表

是否有组编号	是否均匀分组	分组方式数量公式
×	×	$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$
√	×	$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} A_k^k$
×	√	$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k! A_m^m}$
√	√	$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k! A_m^m} A_k^k$

下面将给出一个例子详细说明定理 1 及其推论的应用。

例题 1 15 件新产品中有 3 件特级品，将这 15 件产品平均分配给三个售货点。设 $A = \{\text{每个售货点各分配到 1 件特级品}\}$ ， $B = \{\text{3 件特级品被分配到同一个售货点}\}$ 。求 $p(A)$ 和 $p(B)$ 。

解 由于三个售货点各不相同，将 15 件产品分配给三个点，每个点恰有 5 件，属于均匀分组且有编号的情况，故基本事件总数为 $\frac{15!}{5!5!5!}$ 。

(1) 每个售货点各分配到 1 件特级品, 意味着三个售货点各有 4 件普通新产品和 1 件特级品。将 3 件特级品分到三个点, 使每个点恰有 1 件的分法有 $3!$ 种, 剩余的 12 件非特级品分到三个点属于均匀分组且有编号的情况, 故每个点恰有 4 件的分法有 $\frac{12!}{4!4!4!}$ 种。所以, 事件 A 含样本点数为 $\frac{3!12!}{4!4!4!}$ 。所以

$$p(A) = \frac{\frac{3!12!}{4!4!4!}}{\frac{15!}{5!5!5!}} = \frac{25}{91}。$$

(2) 3 件特级品被分配到同一个售货点, 表明其中一个售货点有 3 件特级品和 2 件普通产品, 另外两个售货点各有 5 件普通产品。等价于将 12 件普通产品分为 2 件、5 件、5 件的分组, 属于部分均匀分组且有编号的情况。故事件 B 含样本点数为 $\frac{12!}{2!5!5!} A_3^3$ 。所以

$$p(B) = \frac{\frac{12!}{2!5!5!} A_3^3}{\frac{15!}{5!5!5!}} = \frac{6}{91}。$$

3. 蒙特卡罗模拟

《概率论与数理统计》课程教学中, 编程工具的引入能够有效辅助学生理解抽象概念。对于古典概型问题, 通过编写仿真代码, 可直观再现随机试验过程, 既能动态展示试验样本的生成机制, 又能通过调整样本量大小, 观察事件频率逐渐逼近真实概率的收敛现象。这种“理论推导 + 编程验证”的双轨教学模式, 既强化了学生对随机试验本质的认知, 又通过可视化手段加深了学生对后续所学大数定律的理解。例题 1 的 R 代码如下:

```
# 设置参数
n_products <- 15
n_special <- 3
n_stores <- 3
n_simulations <- 100000 # 可以根据需要调整模拟次数以改善精度
# 初始化计数器
count_A <- 0
count_B <- 0
# 蒙特卡罗模拟
set.seed(123) # 设置随机种子以便结果可重现
for (i in 1:n_simulations) {
  # 生成产品分配, 假设 1-3 为特级品, 4-15 为非特级品
  # 随机分配产品到三个售货点
  sam <- c(1,1,1,rep(0,12))
  allocation <- sample(sam)
  # 检查事件 A
  if (sum(allocation[1:5]) >= 1 && sum(allocation[6:10]) >= 1 && sum(allocation[11:15]) >= 1)
```

```

{ # 确保每个售货点至少有一个且总数正确
  count_A <- count_A + 1
}
# 检查事件 B
if (sum(allocation[1:5]) == 3 | sum(allocation[6:10]) == 3 | sum(allocation[11:15]) == 3)
{
  count_B <- count_B + 1
}
}
# 计算概率
P_A <- count_A / n_simulations
P_B <- count_B / n_simulations
# 输出结果
print(paste("Estimated P(A) =", P_A))
print(paste("Estimated P(B) =", P_B))

```

随着模拟试验次数的增加，事件 A 和 B 的频率逐渐趋于稳定，分别接近 0.2747 和 0.0659，如图 1 所示。该结果与理论计算结果是完全吻合的。在实际应用中，可以使用蒙特卡罗模拟，用频率来近似概率的计算。随着人工智能的普及，计算机可以辅助学生进行一些复杂的计算，进而培养学生解决实际问题的能力。这可以使不同专业的学生都能将概率论与数理统计的理论转化为解决专业问题的实践能力，这种“理论 - 模拟 - 应用”的学习闭环，使统计思维能有效渗透至各学科领域。

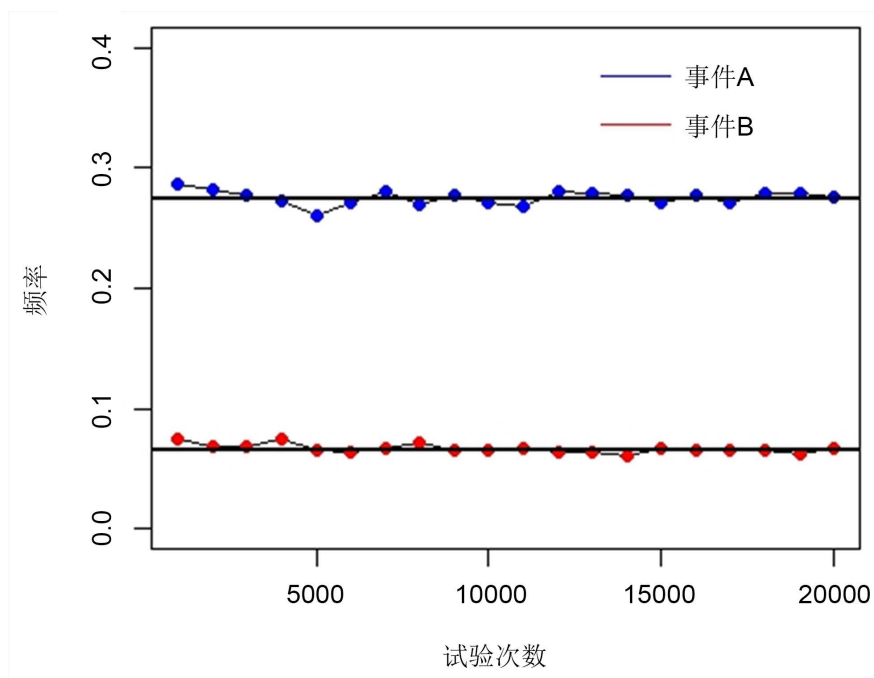


Figure 1. Frequencies of events A and B vs.replicated experimental units

图 1. 事件 A 和事件 B 频率与试验次数关系图

4. 结论

本文详细给出了分配问题中关于基本事件总数以及目标事件包含基本事件数的精确计算公式。为进一步验证公式的正确性并增强学生理解, 该文引入蒙特卡罗模拟实验。通过设定相应分配场景并生成数次重复随机试验, 可高效统计目标事件发生的频率, 进而获得其概率的近似值。该模拟值可用于对照理论公式的计算结果。此方法在教学上具有显著优势, 它不仅直观展示了概率的频率解释, 更能帮助学生深刻辨别和把握古典概型中分配问题均匀分组、非均匀分组、编号分组和非编号分组的情况。掌握蒙特卡罗模拟方法本身, 有效地锻炼了学生将理论转化为计算机程序的能力, 并培养了其利用统计模拟技术解决实际应用问题的素养。

更重要的是, 这一融合模式为概率统计教学提供了重要参考。通过“理论引导 - 公式推导 - 模拟验证 - 对比反思”的教学闭环, 实现了从抽象思维到具象认识的有效过渡。课堂观察和学生反馈表明, 学生不仅对分配问题的分类逻辑和计算技巧掌握得更加清晰牢固, 其利用计算思维解决复杂问题的意识和能力也得到显著提升。未来, 可在更多章节推广此类融合教学法, 深化学生对概率统计思想的理解并增强其在信息化时代的数据分析能力。

参考文献

- [1] 王松桂, 张忠占, 程维虎, 高旅端. 概率论与数理统计[M]. 第4版. 北京: 科学出版社, 2023.
- [2] 茆诗松. 概率论与数理统计教程[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [3] 朱德刚, 赵开斌, 陈佩树. 基于 R 的概率统计辅助教学[J]. 巢湖学院学报, 2016, 18(3): 139-142.
- [4] 李秀昌, 孙健. 浅谈计算机辅助数理统计方法教学[J]. 教育教学论坛, 2019(27): 187-188.
- [5] 金秀玲. 初探 R 软件在概率统计教学中的辅助作用[J]. 牡丹江教育学院学报, 2018(8): 63-66.