

具奇异敏感及Logistic源的趋化系统解的整体存在性

潘 涛

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年8月4日; 录用日期: 2025年8月28日; 发布日期: 2025年9月8日

摘 要

本文研究具有奇异敏感性和logistic源的趋化系统: $u_t = \Delta u + \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) + ru - \mu u^k$, $v_t = \Delta v - v + uv$, 其中 $\Omega \in R^n$ ($n \geq 2$) 是一个光滑有界的凸区域, $\chi, r, \mu > 0$ 且 $k \geq 2$ 。在 $\chi < 2$ 的条件下, 当 $k = 2$, $\mu > \frac{n\chi^2}{8-4\chi}$ 或者 $k > 2$ 时, 系统存在整体古典解。

关键词

趋化, 奇异敏感, Logistic源, 整体存在

Global Existence of Solutions for a Chemotaxis System with Logistic Source and Singular Sensitivity

Tao Pan

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 4th, 2025; accepted: Aug. 28th, 2025; published: Sep. 8th, 2025

Abstract

This paper deal with the chemotaxis systems with singular sensitivity and logistic source: $u_t = \Delta u + \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) + ru - \mu u^k$, $v_t = \Delta v - v + uv$, where $\Omega \in R^n$ ($n \geq 2$) is a smooth bounded convex

domain, $\chi, r, \mu > 0$ and $k \geq 2$. If $\chi < 2$ and $k = 2$, $\mu > \frac{n\chi^2}{8-4\chi}$ or $k > 2$, then the system admits global classical solutions.

Keywords

Chemotaxis, Singular Sensitivity, Logistic Source, Global Existence

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 趋化模型在生物数学领域占据了重要地位, 成为研究者关注的核心课题。这类模型主要用于刻画细胞在化学信号物质引导下发生的定向迁移现象, 该生物学过程在胚胎形态发生、组织修复及新生血管生成等多种生理活动中具有关键作用。通过研究趋化机制, 不仅能够深化对这些基础生命现象的认识, 更有助于揭示生命系统发育的内在规律。

让我们聚焦于下面的趋化系统:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) + ru - \mu u^k, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v + g(u, v), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 u 代表细胞种群密度, v 表示化学信号物质浓度, r 和 μ 为非负参数。这里 $\frac{\partial}{\partial \nu}$ 表示边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向导数。参数 χ 表示趋化效应的强度: 当 $\chi > 0$ 时, 细胞会向化学信号浓度较高的区域聚集; 而当 $\chi < 0$ 时, 细胞则会表现出远离化学信号源的迁移特性。

当 $g(u, v) = -v + u$ 时, 在 $\chi > 0$ 的情况下, Zhao 和 Zheng 在 $n = k = 2$ 时证明: 对于 $\chi, \mu > 0, r \in \mathbb{R}$, 当 $r > \frac{\chi^2}{4}$ ($0 < \chi \leq 2$) 或者 $r > \chi - 1$ ($\chi > 2$) 时, 系统具有唯一的全局有界古典解[1]。后续研究中, Zhao 在 $n \geq 2$ 时, 对于 $\chi, r, \mu > 0$ 且 $k > 1$, $\chi \in \left(0, \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \right\} \right)$, 建立了全局有界的经典解[2]。

当 $g(u, v) = -uv$ 时, 我们在论证系统(1.1)在此情形下的全局解存在性时, 要面临较经典趋化模型更为复杂的挑战。首要困难源于 v 方程中 uv 项的非线性动力学特性, 这与传统趋化模型存在本质差异, 使得后者的证明方法难以直接利用。我们观察到, 对于与(1.1)在此情形下相关的 logistic 趋化系统, 适当的 logistic 阻尼作用可以防止解的爆破。例如, 在 $\chi > 0$ 的情况下, Lankeit 和 Lankeit [3] 在 $k = 2$ 时证明了有界 n 维空间中, 对于任意 $\chi, r, \mu > 0$ 弱解的全局可解性。其进一步研究[4]表明: 当 $0 < \chi < \sqrt{\frac{2}{n}}$ 且

$\mu > \frac{n-2}{2n}$ ($n \geq 2$) 时, 系统从任意适当光滑初值出发都存在全局经典解, 并且在所有一维情形下的经典解都具有全局有界性。以及 Wang [5] 在 $n = k = 2$ 时证明: 对于 $r \in R, \chi, \mu > 0$, 当 $\chi \geq 1$ 时, 存在 $\mu_*(\chi) > 0$, 使得当 $\mu > \mu_*(\chi)$ 时系统存在全局经典解。

对于趋化系统

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + \chi \left[u(\ln v) \right]_x, & x \in (0,1), t > 0, \\ v_t = \varepsilon v_{xx} + uv - \mu v, & x \in (0,1), t > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

在 $\chi > 0$ 的情况下, Tao, Wang 和 Wang 在 $n = 1$ 时证明: 在 Neumann 边界条件下, $\chi > 0, D > 0, \varepsilon > 0$ 和 $\mu > 0$ 均为常数, 那么对于任何充分光滑的初始数据 (u_0, v_0) , 满足 $u_0 \geq 0$, u_0 不恒等于 0 和 $v_0 > 0$, 该系统存在唯一的全局有界解, 并且该解在 $L^\infty((0,1)) \times L^\infty((0,1))$ 中有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(u, \frac{v_x}{v} \right) (\cdot, t) = (\bar{u}_0, 0)$, 其中 $\bar{u}_0 := \int_0^1 u_0 dx$ [6]。

本文受以上结论启发, 研究一类具有奇异灵敏度和 Logistic 源的抛物 - 抛物趋化系统:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) + ru - \mu u^k, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $\Omega \in R^n$ ($n \geq 2$) 是一个光滑且有界的区域, ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\chi, r, \mu > 0$ 且 $k \geq 2$ 。本文的目标是证明解全局存在性结果。非负初始函数 u_0 和 v_0 满足对某个 $\alpha \in (0, 1)$, $(u_0, v_0) \in (C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}))^2$ 以及 $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0$, $x \in \partial\Omega$ 。

我们论文主要结果如下:

定理 1.1 设 Ω 是 R^n ($n \geq 2$) 中的一个光滑有界的凸区域。如果 $\chi < 2$, 当 $k = 2$, $\mu > \frac{n\chi^2}{8-4\chi}$ 或者 $k > 2$ 时, 系统(1.3)存在唯一的全局光滑非负解。

论文结构安排如下。第二节将重点建立抛物 - 抛物型趋化系统(1.3)的先验估计。基于这些估计结果, 第三节将完成本文主要定理的证明。

2. 预备知识

本节我们主要给出解的局部存在性以及一些先验估计。需要特别指出的是, 虽然系统(1.3)中的项 $\nabla \cdot \left(u \frac{\nabla v}{v} \right)$ 具有 $\frac{1}{v}$ 型奇异结构, 但在初始条件 v_0 严格正定的假设下, 该奇异性在有限时间内不会显现。

引理 2.1 设 Ω 是 R^n ($n \geq 2$) 中的一个光滑有界凸区域。则系统(1.3)存在唯一的非负解

$$u, v \in \left(C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega \times [0, T_{\max})) \right)^2, \text{ 其最大存在时间 } T_{\max} \in (0, +\infty], \text{ 并满足}$$

$$\text{或者 } T_{\max} = \infty, \text{ 或者 } \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \left(\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \right) = \infty. \quad (2.1)$$

引理 2.2 函数 v 满足

$$v(x, t) \geq L_1 e^{-t}, \quad t \in (0, T_{\max}). \quad (2.2)$$

其中 $L_1 := \min_{\Omega} v_0$ 。

证明：我们对(1.3)中的第二个方程应用常数变易法，并根据 $\int_0^t e^{(t-s)(\Delta-1)} (uv)(s) ds \geq 0$ ，可以得到

$$\begin{aligned} v(x, t) &= e^{t(\Delta-1)} v_0 + \int_0^t e^{(t-s)(\Delta-1)} (uv)(s) ds \\ &\geq e^{t(\Delta-1)} v_0 \\ &\geq e^{-t} \min_{\Omega} v_0 \\ &\geq C_1 e^{-t}, \quad t \in (0, T_{\max}). \end{aligned}$$

其中 $C_1 := \min_{\Omega} v_0$ 。

3. 定理 1.1 的证明

本节将给出定理 1.1 的完整证明。基于极值原理，我们首先建立关于 $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ 和 $\|\nabla \log v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ 的估计。

引理 3.1 在 $\chi < 2$ 时，若 $k = 2$ 及 $\mu > \frac{n\chi^2}{8-4\chi}$ 或者 $k > 2$ 及 $\mu > 0$ ，则存在不依赖于 t 的正常数 L_2 ， L_3 使得以下估计式成立：

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \log v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq L_3 + e^{L_2 t}, \quad t \in (0, T_{\max}). \quad (3.1)$$

证明：根据(1.3)的第一个方程，我们可以得到

$$\partial_t u - \Delta u = \chi \nabla \cdot (u \nabla \log v) + ru - \mu u^k = \chi \nabla u \nabla \log v + \chi u \Delta \log v + ru - \mu u^k. \quad (3.2)$$

根据(1.3)的第二个方程，我们可以得到

$$\partial_t |\log v|^2 - \Delta |\nabla \log v|^2 = -2 |D^2 \log v|^2 + 2 \nabla |\nabla \log v|^2 \nabla \log v + 2 \nabla u \nabla \log v. \quad (3.3)$$

令 $\theta = 1 - \frac{\chi}{2}$ ，记 $z := u + \theta |\nabla \log v|^2$ 。由于 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ ， $x \in \partial\Omega$ 以及 Ω 的凸性可知，在 $\partial\Omega$ 中，有 $\frac{\partial z}{\partial \nu} \leq 0$ 。

将(3.2)和(3.3) $\times \theta$ 相加，得到

$$\partial_t z - \Delta z - 2 \nabla z \nabla \log v + 2 \theta |D^2 \log v|^2 = \chi u \Delta \log v + ru - \mu u^k, \quad (3.4)$$

利用 Young 不等式和 $|\Delta f| \leq \sqrt{n} |D^2 f|$ ， $f \in C^2(\Omega)$ 可知，当 $\chi < 2$ ，我们有

$$\begin{aligned} \chi u \Delta \log v &\leq \chi u |\Delta \log v| \\ &\leq \chi u \sqrt{n} |D^2 \log v| \\ &\leq 2 \theta |D^2 \log v|^2 + \frac{n \chi^2 u^2}{8 \theta}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

我们将(3.5)代入(3.4)，可以得到

$$\partial_t z - \Delta z - 2 \nabla z \nabla \log v + 2 \theta |D^2 \log v|^2 \leq \frac{n \chi^2 u^2}{8 \theta} + ru - \mu u^k.$$

(i) $k = 2$.

利用 Young 不等式, 当 $\mu > \frac{n\chi^2}{8-4\chi}$ 时, 我们计算

$$\begin{aligned} \frac{n\chi^2 u^2}{8\theta} + ru - \mu u^k &\leq \frac{n\chi^2 u^2}{8\theta} + 2\left(\mu - \frac{n\chi^2}{8\theta}\right) \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2\left(\mu - \frac{n\chi^2}{8\theta}\right)} \cdot \frac{r^2}{2} - \mu u^2 \\ &= \frac{r^2}{4\left(\mu - \frac{n\chi^2}{8\theta}\right)} =: C_2 . \end{aligned}$$

(ii) $k > 2$.

利用 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} \frac{n\chi^2 u^2}{8\theta} + ru - \mu u^k &\leq \frac{k\mu}{4} \cdot \frac{u^k}{\frac{k}{2}} + \left(\frac{k\mu}{4}\right)^{-\frac{2}{k-2}} \cdot \frac{\left(\frac{n\chi^2}{8\theta}\right)^{\frac{k}{k-2}}}{\left(\frac{k}{k-2}\right)} + \frac{k\mu}{2} \cdot \frac{\mu^k}{k} + \left(\frac{k\mu}{2}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{r^{\frac{k}{k-1}}}{\frac{k}{k-1}} - \mu u^k \\ &= \frac{\mu}{2} u^k + \left(\frac{k\mu}{4}\right)^{-\frac{2}{k-2}} \cdot \left(\frac{k-2}{k}\right) \cdot \left(\frac{n\chi^2}{8\theta}\right)^{\frac{k}{k-2}} + \frac{\mu}{2} u^k + \left(\frac{k\mu}{2}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k-1}{k}\right) r^{\frac{k}{k-1}} - \mu u^k \\ &= \left(\frac{k\mu}{4}\right)^{-\frac{2}{k-2}} \left(\frac{k-2}{k}\right) \left(\frac{n\chi^2}{8\theta}\right)^{\frac{k}{k-2}} + \left(\frac{k\mu}{2}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k-1}{k}\right) r^{\frac{k}{k-1}} =: C_3 . \end{aligned}$$

令 $C_4 := \max\{C_2, C_3\}$, 当 $k = 2$, $\mu > \frac{n\chi^2}{8-4\chi}$ 或者 $k > 2$ 时, 我们有

$$\frac{n\chi^2 u^2}{8\theta} + ru - \mu u^k \leq C_4 .$$

从而

$$\partial_t z - \Delta z - 2\nabla z \nabla \log v + 2\theta |D^2 \log v|^2 \leq C_4 .$$

记 $Q := z - e^{C_4 t}$, 我们有

$$\begin{aligned} \partial_t Q &= \partial_t z - C_4 e^{C_4 t} \\ &\leq \Delta z + 2\nabla z \nabla \log v + C_4 - C_4 e^{C_4 t} \\ &\leq \Delta(z - e^{C_4 t}) + 2\nabla(z - e^{C_4 t}) \nabla \log v + C_4 - C_4 e^{C_4 t} \\ &= \Delta Q + 2\nabla Q \nabla \log v + C_4 - C_4 e^{C_4 t} , \end{aligned}$$

这意味着

$$\partial_t Q - \Delta Q - 2\nabla Q \nabla \log v \leq 0 .$$

由于在 $\partial\Omega$ 上, $\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} \leq 0$, 并根据极值原理可得:

$$\|Q(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|Q(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}, t \in (0, T_{\max}) .$$

令 $C_5 = \left| u_0 + \theta |\nabla \log v_0|^2 - 1 \right|$, 那么

$$\left\| u + \theta |\nabla \log v|^2 - e^{C_4 t} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_5, t \in (0, T_{\max}).$$

所以我们得到

$$\left\| u(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| \nabla \log v(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq C_5 + e^{C_4 t}, t \in (0, T_{\max}).$$

从而

$$\sup_{t < T_{\max}} \left\| u(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_5 + e^{C_4 t}, t \in (0, T_{\max}).$$

因此我们得到了(3.1)的估计, 引理 3.1 的证明完成。

引理 3.2 在引理 3.1 的条件成立的前提下, 存在不依赖于 t 的正常数 L_4, L_5, L_6, L_7 使得以下估计式成立:

$$\sup_{t < T_{\max}} \left\| v(\cdot, t) \right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq L_4 + L_5 e^{L_6 t + L_7 e^{L_2 t}}, t \in (0, T_{\max}). \quad (3.6)$$

证明: 根据常数变易公式我们可以得到:

$$v(x, t) = e^{t(\Delta-1)} v_0 + \int_0^t e^{(t-s)(\Delta-1)} (uv)(s) ds, t \in (0, T_{\max}),$$

根据(1.3)的第二个方程, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v &= - \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} uv \\ &\leq \int_{\Omega} uv \\ &= \|uv\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v(t)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq (L_3 + e^{L_2 t}) \int_{\Omega} v, \quad t \in (0, T_{\max}). \end{aligned}$$

从而

$$\int_{\Omega} v \leq C_6 e^{L_3 t + \frac{1}{L_2} e^{L_2 t}}, t \in (0, T_{\max}). \quad (3.7)$$

令 $q > 1$, 利用插值不等式、嵌入关系 $W^{1,\infty}(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ 以及(3.7), 我们有

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &\leq C_7 \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + C_8 \int_0^t e^{-(t-s)} \left(1 + (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}} \right) \|(uv)(s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\ &\leq C_9 + C_{10} \int_0^t e^{-(t-s)} \left(1 + (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}} \right) \|v(s)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{q}} \|v(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac{1}{q}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\ &\leq C_9 + C_{10} \int_0^t e^{-(t-s)} \left(1 + (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}} \right) ds \sup_{s \leq t} \|v(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac{1}{q}} \cdot e^{C_{11} t} \cdot e^{C_{12} e^{L_2 t}} \\ &\leq C_9 + C_{13} e^{C_{11} t} \sup_{s \leq t} \|v(s)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^{1-\frac{1}{q}} \cdot e^{C_{12} e^{L_2 t}}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T_{\max}. \end{aligned}$$

结合上述估计, 对 $0 \leq t < T_{\max}$ 取上确界并运用 Young 不等式, 得

$$\begin{aligned}
\sup_{t < T_{\max}} \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &\leq C_9 + C_{13} e^{C_{11}t} \cdot e^{C_{12}e^{L_2 t}} \sup_{t < T_{\max}} \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^{1-\frac{1}{q}} \\
&\leq C_9 + \frac{q}{2(q-1)} \left(\frac{q-1}{q} \right) \cdot \sup_{t < T_{\max}} \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\
&\quad + \left(\frac{q}{2(q-1)} \right)^{1-q} \cdot \frac{1}{q} \left(C_{13} e^{C_{11}t} \cdot e^{C_{12}e^{L_2 t}} \right)^q,
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
\sup_{t < T_{\max}} \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &\leq C_{14} + \left(\frac{q}{2(q-1)} \right)^{1-q} \cdot \frac{2}{q} \left(C_{13} e^{C_{11}t} \cdot e^{C_{12}e^{L_2 t}} \right)^q \\
&\leq C_{14} + C_{15} e^{C_{16}t + C_{17}e^{L_2 t}}.
\end{aligned}$$

我们完成了引理 3.2 的证明。接下来，我们来证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明：我们要证当 $\chi < 2$ 时，若 $k = 2$ 及 $\mu > \frac{n\chi^2}{8-4\chi}$ 或者 $k > 2$ 及 $\mu > 0$ 时， $T_{\max} = \infty$ 。假设不然，即 $T_{\max} < \infty$ 。由于引理 3.1 和引理 3.2 以及爆破准则可知，这与 $T_{\max} < \infty$ 的事实相矛盾。因此 $T_{\max} = \infty$ 。至此，我们的证明完毕。

4. 讨论

本文研究了凸域上带奇异敏感和 Logistic 源的趋化模型。我们证明了，当敏感性系数 $\chi < 2$ 时，若 $k = 2$ 及 $\mu > \frac{n\chi^2}{8-4\chi}$ 或者 $k > 2$ 及 $\mu > 0$ 时，系统存在唯一的全局古典解。本节旨在对这一结论进行讨论，并展望未来研究方向。

$\chi < 2$ 是为了保证系统可以转化成一个单个方程，进一步，当 $k = 2$ 及 μ 充分大或者 $k > 2$ 及 $\mu > 0$ 时，可以借助于极值原理得到解的整体存在性。这蕴含着敏感性系数恰当小并且 Logistic 源充分强时，有利于建立系统的整体存在性。

基于本文的工作，以下几个方向值得进一步探索：移除区域的凸性假设得到解的整体存在性是一个明显的下一步目标。当敏感性系数 χ 较大时，得到解的整体存在性以及敏感性系数 χ 更小时，得到解的整体有界性和长时间渐进行为，也有很大研究空间。

参考文献

- [1] Zhao, X.D. and Zheng, S. (2017) Global Boundedness to a Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Logistic Source. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik*, **68**, Article No. 2. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0749-5>
- [2] Zhao, X.D. (2022) Boundedness to a Parabolic-Parabolic Singular Chemotaxis System with Logistic Source. *Journal of Differential Equations*, **338**, 388-414. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.08.003>
- [3] Lankeit, E. and Lankeit, J. (2019) On the Global Generalized Solvability of a Chemotaxis Model with Signal Absorption and Logistic Growth Terms. *Nonlinearity*, **32**, 1569-1596. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aaf8c0>
- [4] Lankeit, E. and Lankeit, J. (2019) Classical Solutions to a Logistic Chemotaxis Model with Singular Sensitivity and Signal Absorption. *Nonlinear Analysis*, **46**, 421-445. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.09.012>
- [5] Wang, W. (2019) The Logistic Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Signal Absorption in Dimension Two. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **80**, 532-541. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.06.001>
- [6] Tao, Y., Wang, L. and Wang, Z.A. (2013) Large-Time Behavior of a Parabolic-Parabolic Chemotaxis Model with Logarithmic Sensitivity in One Dimension. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **18**, 521-544. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2013.18.821>