

不确定多目标优化问题的标量化与鲁棒化研究 ——基于极小极大鲁棒优化方法分析

刘 林, 王 杰*, 冯 敏

重庆交通大学数学与统计学院, 重庆

收稿日期: 2025年9月9日; 录用日期: 2025年10月2日; 发布日期: 2025年10月10日

摘 要

本文针对不确定多目标优化问题, 采用标量化与极小极大鲁棒优化结合的方法, 以应对不确定性与多目标之间的冲突性。通过标量函数的序保持性质与序表示性质, 建立鲁棒充分和必要最优性条件。在适当假设条件下证明标量化与鲁棒化的可交换性。并基于Gerstewitz函数构造的非线性标量化函数说明方法的有效性与适用性。

关键词

不确定多目标优化, 标量化, 极小极大鲁棒优化, 最优性条件

Scalarization and Robustification for Uncertain Multi-Objective Optimization Problems

—An Analysis Based on Minimax Robust Optimization

Lin Liu, Jie Wang*, Min Feng

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing

Received: September 9, 2025; accepted: October 2, 2025; published: October 10, 2025

Abstract

This paper proposes a method for uncertain multi-objective optimization problems that combines scalarization with minimax robust optimization to handle both uncertainty and conflicts among

*通讯作者。

文章引用: 刘林, 王杰, 冯敏. 不确定多目标优化问题的标量化与鲁棒化研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 115-125.
DOI: 10.12677/aam.2025.1410425

multiple objectives. Using scalarizing functions with order-preserving and order-representing properties, necessary and sufficient robust optimality conditions are established. Under appropriate assumptions, the commutativity between scalarization and robustification is proved. Furthermore, a nonlinear scalarization function constructed based on the Gerstewitz function is employed to illustrate the effectiveness and applicability of the method.

Keywords

Uncertain Multi-Objective Optimization, Scalarization, Minimax Robust Optimization, Optimality Conditions

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多目标优化目前已广泛应用于工程设计、财务规划和物流管理等多个领域[1], 但实际问题中往往伴随各种不确定性, 给决策带来较大挑战。如物流配送, 企业需要同时优化服务水平、成本和交付时间, 还需应对需求波动、交通状况和价格变化等不确定因素, 这使得传统的多目标优化方法难以在实际环境中得到适用。针对这类问题, 学者们提出了多种解决方案[2]-[5]。根据实际背景, 许多问题可以描述为如下不确定多目标优化问题(UMP):

$$\min_{x \in X} (f_1(x, u_1), \dots, f_l(x, u_l)),$$

其中 $f_i: X \times U_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I := \{1, \dots, l\}$, X 是 Banach 空间, U_i ($i \in I$) 是非空不确定性紧集。 $x \in X$ 称为决策变量, $u_i \in U_i$ ($i \in I$) 称为不确定性参数。对任意 $u_i \in U_i$, $f_i(x, \cdot)$ ($i \in I$) 在 U_i 上关于 u_i 上半连续(u.s.c.), 并记 $f(x, u) := (f_1(x, u_1), \dots, f_l(x, u_l))$ 。针对问题(UMP), 许多学者通过标量化与鲁棒化相结合的方法, 得到了鲁棒充分和必要最优性条件等相关结论[6]-[9]。例如, 文献[6]分别将加权和标量化、 ε -约束标量化与极小极大鲁棒优化结合, 建立了鲁棒充分最优性条件。文献[7]利用加权和标量化与鲁棒化结合, 建立了鲁棒充分条件。文献[8]利用递增标量化函数与极小极大鲁棒化方法结合, 建立了鲁棒充分和必要最优性条件。最近, Caprari 等人在文献[9]中针对不确定优化问题, 将具有序保持(order-preserving)性质与序表示(order-representing)性质的标量化方法与集值鲁棒化方法结合, 建立了不确定优化问题的鲁棒充分和必要最优性条件, 以及证明了鲁棒化与标量化的可交换性。这种标量化方法既规避了加权求和和标量化方法对权重选择的依赖, 也避免了递增标量函数对全局可比性的要求。极小极大鲁棒优化的主要局限在于其保守性, 它针对的是所有可能情景中最悲观、最坏的情况进行优化。然而, 正是这种局限性, 使其在安全至上的领域成为主要工具。相较于依赖概率信息的分布式鲁棒优化与结构复杂的遗憾最小化鲁棒优化, 极小极大鲁棒法仅需给定不确定性集合范围即可, 计算过程较为简洁。与集值鲁棒相比, 极小极大鲁棒优化无需依赖复杂的集合偏序, 具有计算简便和目标函数相互独立等优势。

受上述启发, 本文针对问题(UMP), 将标量化与极小极大鲁棒优化结合, 并给出鲁棒标量化问题(S_ϕ -RC-UMP)与极小极大鲁棒化问题(RC- S_ψ -UMP)。基于标量函数的序保持性质与序表示性质, 分别在鲁棒标量化问题(S_ϕ -RC-UMP)与极小极大鲁棒化问题(RC- S_ψ -UMP)下, 探究问题(UMP)的鲁棒充分和必要最优性条件, 并分析鲁棒化与标量化的交换性。最后, 通过具体例子验证所提方法的有效性与适用性。相较于 Ehrgott 等人[6]的工作, 本文突破线性标量化方法的局限, 采用非线性标量化方法建立鲁棒充

分和必要最优性条件，并在此基础上证明鲁棒化与标量化的可交换性这一关键结论。

2. 预备知识

本文设 Y 为拓扑线性空间， $K \subseteq Y$ 为闭凸锥，满足 $K \cap (-K) = \{0\}$ (即 K 为尖锥)，且 $\text{int}K \neq \emptyset$ (即 K 为实锥)。锥 K 在 Y 上诱导出一个偏序关系 $\leq_K$ ，其定义为：

$$y_1 \leq_K y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in K, \forall y_1, y_2 \in Y.$$

标量函数的序保持性质与序表示性质对于建立鲁棒充分和必要最优性条件具有重要作用。给出如下标量函数性质。

定义 2.1 [10] 给定集合 $A \subseteq Y$ 以及 $a \in A$ ，标量函数 $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 满足

(1) $b \in A, b \leq_K a \Rightarrow \varphi(b) \leq \varphi(a)$ ，则称 φ 在 $a \in A$ 处是序保持的。

(2) $b \in A, \varphi(b) \leq \varphi(a) \Rightarrow b \leq_K a$ ，则称 φ 在 $a \in A$ 处是序表示的。

鲁棒严格有效解是指：在所有可能的不确定参数取值下，不存在其他解能在所有目标函数上严格优于该解。下面给出问题(UMP)的鲁棒严格有效解概念。

定义 2.2 [6] [7] $x_0 \in X$ 称为问题(UMP)的鲁棒严格有效解，如果不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$\forall u \in U, \exists u' \in U: f(x, u) \leq_K f(x_0, u'),$$

其中 $U := U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_l$ 。

3. 基于标量化与鲁棒化的最优性条件分析

3.1. 先鲁棒化后标量化下的最优性条件分析

对问题(UMP)进行极小极大鲁棒优化，其鲁棒对应问题如下：

$$\min_{x \in X} \left(\sup_{u_1 \in U_1} f_1(x, u_1), \dots, \sup_{u_l \in U_l} f_l(x, u_l) \right) \quad (RC-UMP)$$

给定任意 $x \in X$ ，我们记 $H_i(x) := \sup_{u_i \in U_i} f_i(x, u_i) \in \mathbb{R}$ ($i \in I$) 和 $H(x) := (H_1(x), \dots, H_l(x)) \in \mathbb{R}^l$ 。

通过标量函数 $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 对鲁棒多目标优化问题(RC-UMP)进行标量化，得到如下鲁棒标量化问题：

$$\min_{x \in X} \varphi \circ H(x). \quad (S_\varphi\text{-RC-UMP})$$

在鲁棒多目标优化问题(RC-UMP)下，对应鲁棒严格有效解的定义为：不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得 $H(x) \leq_K H(x_0)$ ，这与定义 2.2 中鲁棒严格有效解的概念一致。我们通过下述引理展示两者的等价关系。

引理 3.1 假设 $f_i(x, \cdot)$ ($i=1, \dots, l$) 在 U_i 上关于 u_i 是上半连续的，各不确定性集 U_i ($i=1, \dots, l$) 均为紧集。则 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解当且仅当不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得 $H(x) \leq_K H(x_0)$ 。

证明 先证充分性。设 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解。则不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$\forall u_i \in U_i, \exists u'_i \in U_i: f_i(x, u_i) \leq f_i(x_0, u'_i), \forall i \in I.$$

从而，不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$\sup_{u_i \in U_i} f_i(x, u_i) \leq \sup_{u_i \in U_i} f_i(x_0, u_i), \forall i \in I.$$

因此，不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得 $H(x) \leq_K H(x_0)$ 。

再证必要性。设不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得 $H(x) \leq_K H(x_0)$ 。即不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$f_i(x, u_i) \leq \sup_{u_i \in U_i} f_i(x_0, u_i), \forall i \in I.$$

根据 $f_i(x, \cdot) (i=1, \dots, l)$ 在 U_i 上关于 u_i 是上半连续的, 各不确定性集 $U_i (i=1, \dots, l)$ 均为紧集, 由此可得, 存在 $u'_i \in U_i$ 使得

$$\sup_{u_i \in U_i} f_i(x_0, u_i) = f_i(x_0, u'_i), \forall i \in I.$$

因此, 不存在 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 使得 $\forall u \in U, \exists u' \in U: f(x, u) \leq_K f(x_0, u')$ 。证毕。

通过以下例子说明引理 3.1 结论的有效性。

例 3.1 设 $Y = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}_+^2$, $X = \{0, 1, 2\}$, 且 $U_1 = U_2 = \{0, 1\}$ 。考虑如下不确定多目标优化问题:

$$\min_{x \in X} (f_1(x, u_1), f_2(x, u_2)),$$

其中 $(f_1(x, u_1), f_2(x, u_2)) = (-u_1 + x^2, \sqrt{1-u_2^2} + x)$, $u_i (i=1, 2) \in \{0, 1\}$ 。根据定义 2.2 可得, 不存在 $x \in \{1, 2\}$ 使得

$$\forall u \in U = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \exists u' = (0, 0): f(x, u) \leq_K f(0, u'),$$

因此可得, $x_0 = 0$ 为鲁棒严格有效解。如图 1 所示, $f(1, u)$ 与 $f(2, u)$ 均不在 $f(0, u') - K$ 区域内, 即不存在 $x \in \{1, 2\}$ 使得

$$\forall u \in U = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \exists u' = (0, 0): f(x, u) \in f(0, u') - K.$$

给定函数 $H: X \rightarrow \mathbb{R}^2$, 则上述不确定多目标优化问题对应的极小极大鲁棒优问题为:

$$\min_{x \in X} H(x),$$

其中 $H(x) = (x^2, 1+x)$ 。根据鲁棒严格有效解定义可得, 不存在 $x \in \{1, 2\}$ 使得 $H(x) \leq_K H(0)$, 因此可得, $x_0 = 0$ 为鲁棒严格有效解。如图 2 所示, $H(1)$ 与 $H(2)$ 均不在 $H(0) - K$ 区域内, 即不存在 $x \in \{1, 2\}$ 使得

$$H(x) \in H(0) - K.$$

因此, 上述两种方法均能得到 $x_0 = 0$ 为鲁棒严格有效解。

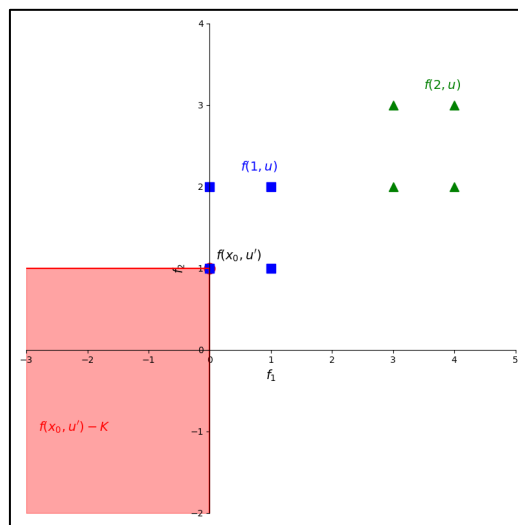


Figure 1. Robust strictly efficient solutions to problem (UMP)

图 1. 问题(UMP)下的鲁棒严格有效解

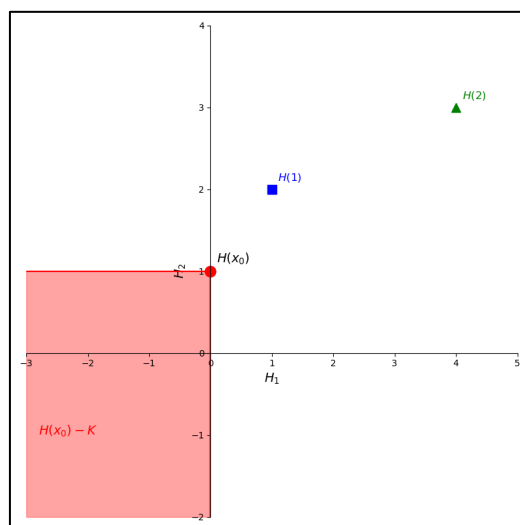


Figure 2. Robust strictly efficient solutions to problem (RC-UMP)

图 2. 问题(RC-UMP)下的鲁棒严格有效解

下面探究 φ 的序保持性质与问题(UMP)的鲁棒充分最优性条件之间的关系。

命题 3.1 设 φ 在 $H(x_0)$ 处是序保持的。若 $x_0 \in X$ 是问题(S_φ -RC-UMP)的唯一解, 则 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解。

证明 反证法。假设 $x_0 \in X$ 不是鲁棒严格有效解, 则存在 $\bar{x} \in X \setminus \{x_0\}$ 使得 $H(\bar{x}) \leq_K H(x_0)$ 。

因为 φ 在 $H(x_0)$ 处是序保持的, 所以有

$$H(\bar{x}) \leq_K H(x_0) \Rightarrow \varphi \circ H(\bar{x}) \leq \varphi \circ H(x_0),$$

这与 $x_0 \in X$ 是问题(S_φ -RC-UMP)的唯一解矛盾。故假设不成立, 命题得证。

接下来, 给出 φ 的序表示性质与问题(UMP)鲁棒必要最优性条件之间的关系。

命题 3.2 设 φ 在 $H(x_0)$ 处是序表示的。若 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解, 则 $x_0 \in X$ 是问题(S_φ -RC-UMP)的唯一解。

证明 反证法。假设 $x_0 \in X$ 不是问题(S_φ -RC-UMP)的唯一解, 则存在 $\bar{x} \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$\varphi \circ H(\bar{x}) \leq \varphi \circ H(x_0)。$$

因为 φ 在 $H(x_0)$ 处是序表示的, 所以有

$$\varphi \circ H(\bar{x}) \leq \varphi \circ H(x_0) \Rightarrow H(\bar{x}) \leq_K H(x_0),$$

这与 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解矛盾。故假设不成立, 命题得证。

3.2. 极小极大鲁棒法与集值鲁棒法的比较

在不确定优化问题中, 极小极大鲁棒优化方法和集值鲁棒优化方法是两种主要的研究方法。集值鲁棒优化方法往往需要处理复杂的集值映射, 计算量较复杂。相比之下, 极小极大鲁棒优化方法能够对每个不确定参数独立分析最坏情况, 目标函数之间相互独立, 且计算简便。通过以下例子展示极小极大鲁棒优化方法参数能独立分析与计算简便的特点。

例 3.2 设 $Y = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}_+^4$, $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 且 $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = [-1, 1]$ 。考虑如下不确定多目标优化问题:

$$\min_{x \in X} (f_1(x, u_1), f_2(x, u_2), f_3(x, u_3), f_4(x, u_4)),$$

$$\text{其中 } (f_1(x, u_1), f_2(x, u_2), f_3(x, u_3), f_4(x, u_4)) = \begin{cases} (u_1 + x^2, \sqrt{1-u_2^2} + x, -\sqrt{1-u_3^2} + x^2, u_4 x + x), & x \neq 3, u_i (i=1, 2, 3, 4) \in [-1, 1], \\ (u_1 - 3, u_2 - 3, u_3 - 2, u_4 - 2), & x = 3, u_i (i=1, 2, 3, 4) \in [-1, 1]. \end{cases}$$

步骤 1 集值鲁棒优化方法。

给定集值映射 $F: X \rightarrow 2^Y$, 则上述不确定多目标优化问题的集值鲁棒对应问题为

$$\min_{x \in X} F(x),$$

其中

$$F(x) = \begin{cases} \{(u_1 + x^2, \sqrt{1-u_2^2} + x, -\sqrt{1-u_3^2} + x^2, u_4 x + x) : u_1 \in [-1, 1], u_2 \in [-1, 1], u_3 \in [-1, 1], u_4 \in [-1, 1]\}, & x \neq 3, \\ \{(u_1 - 3, u_2 - 3, u_3 - 2, u_4 - 2) : u_1 \in [-1, 1], u_2 \in [-1, 1], u_3 \in [-1, 1], u_4 \in [-1, 1]\}, & x = 3. \end{cases}$$

由文献[9]中的集值鲁棒严格有效解定义可知: $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解, 总有 $x \in X$ 使得 $F(x) \not\subseteq F(x_0) - \mathbb{R}_+^4$. 由于集值鲁棒优化方法需要在整个决策空间 X 上, 考虑包含不确定参数的所有的映射集 $F(x)$, 因此计算过程较为复杂. 集合之间的偏序关系或包含关系也难以通过图形来直观判断.

步骤 2 极小极大鲁棒优化方法。

对上述不确定多目标优化问题极小极大鲁棒优化得

$$\min_{x \in X} H(x),$$

$$\text{其中函数 } H: X \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad H(x) = \begin{cases} (1 + x^2, 1 + x, x^2, 2x), & x \neq 3, \\ (-2, -2, -1, -1), & x = 3. \end{cases}$$

根据引理 3.1 可得, 不存在 $x \in \{0, 1, 2, 4\}$ 使得 $H(x) \leq_K H(3)$, 因此 $x_0 = 3$ 是鲁棒严格有效解. 极小极大鲁棒优化方法通过独立考虑各目标函数的最坏情况, 计算过程相对简单.

3.3. 先标量化后鲁棒化下的最优性条件分析

通过标量化函数 $\psi: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 将问题(UMP)转化为标量优化问题:

$$\min_{x \in X} \psi \circ f(x, u). \quad (S_\psi\text{-UMP})$$

对标量优化问题($S_\psi\text{-UMP}$)进行极小极大鲁棒优化, 得到如下极小极大鲁棒化问题:

$$\min_{x \in X} \sup_{u \in U} \psi \circ f(x, u). \quad (RC\text{-}S_\psi\text{-UMP})$$

下面探究 ψ 的序保持性质与问题(UMP)鲁棒充分最优性条件之间的关系.

命题 3.3 设 ψ 在 $f(x_0, u')$ 处是序保持的. 若 $x_0 \in X$ 是问题($RC\text{-}S_\psi\text{-UMP}$)的唯一解, 则 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解.

证明 反证法. 假设 $x_0 \in X$ 不是鲁棒严格有效解, 则存在 $\bar{x} \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$\forall u \in U, \exists u' \in U : f(\bar{x}, u) \leq_K f(x_0, u'). \quad (1)$$

因为 ψ 在 $f(x_0, u')$ 处是序保持的, 所以有

$$f(\bar{x}, u) \leq_K f(x_0, u'), \forall u \in U \Rightarrow \psi \circ f(\bar{x}, u) \leq \psi \circ f(x_0, u'), \forall u \in U. \quad (2)$$

根据式(1)和式(2)式得

$$\forall u \in U, \exists u' \in U : \psi \circ f(\bar{x}, u) \leq \psi \circ f(x_0, u').$$

进一步有

$$\sup_{u \in U} \psi \circ f(\bar{x}, u) \leq \psi \circ f(x_0, u') \leq \sup_{u \in U} \psi \circ f(x_0, u).$$

从而存在 $\bar{x} \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$\sup_{u \in U} \psi \circ f(\bar{x}, u) \leq \sup_{u \in U} \psi \circ f(x_0, u),$$

这与 $x_0 \in X$ 是问题 $(RC-S_\psi-UMP)$ 的唯一解矛盾。故假设不成立，命题得证。

接下来，研究 ψ 的序表示性质与问题 (UMP) 鲁棒必要最优性条件之间的关系。

命题 3.4 令 ψ 在 $f(x_0, u')$ 处是序表示的。假设存在 $u' \in U$ 使得

$$\sup_{u \in U} \psi \circ f(x_0, u) = \psi \circ f(x_0, u'). \quad (3)$$

若 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解，则 $x_0 \in X$ 是问题 $(RC-S_\psi-UMP)$ 的唯一解。

证明 反证法。假设 $x_0 \in X$ 不是问题 $(RC-S_\psi-UMP)$ 的唯一解，则存在 $\bar{x} \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$\sup_{u \in U} \psi \circ f(\bar{x}, u) \leq \sup_{u \in U} \psi \circ f(x_0, u). \quad (4)$$

对于任意 $u \in U$ ，我们有

$$\psi \circ f(\bar{x}, u) \leq \sup_{u \in U} \psi \circ f(\bar{x}, u). \quad (5)$$

再根据式(3)、(4)和(5)得

$$\forall u \in U, \exists u' \in U : \psi \circ f(\bar{x}, u) \leq \psi \circ f(x_0, u'). \quad (6)$$

因为 ψ 在 $f(x_0, u')$ 处是序表示的，所以有

$$\psi \circ f(\bar{x}, u) \leq \psi \circ f(x_0, u'), \forall u \in U \Rightarrow f(\bar{x}, u) \leq_K f(x_0, u'), \forall u \in U.$$

上式结合式(6)可得，存在 $\bar{x} \in X \setminus \{x_0\}$ 使得

$$\forall u \in U, \exists u' \in U : f(\bar{x}, u) \leq_K f(x_0, u'),$$

这与 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解矛盾。故假设不成立，命题得证。

3.4. Gerstewitz 函数非线性标量化分析

Gerstewitz 函数的相关定义及基本性质如下所述。

定义 3.1 [11] 设序锥 $K \subseteq Y$ 满足内部非空 $\text{int}K \neq \emptyset$ 。对于给定的 $q \in \text{int}K$ ，Gerstewitz 函数 $\phi_{-K,q} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $\phi_{-K,q}(y) := \min\{t \in \mathbb{R} : y \in tq - K\}$ 。

命题 3.5 [11] 设 $K \subseteq Y$ 为正常闭凸锥且 $q \in \text{int}K$ ，则有

- (1) $\phi_{-K,q}(y) \leq t \Leftrightarrow y \in tq - K, \forall t \in \mathbb{R}$;
- (2) $\phi_{-K,q}(y) < t \Leftrightarrow y \in tq - \text{int}K, \forall t \in \mathbb{R}$;
- (3) $\phi_{-K,q}(y) = t \Leftrightarrow y \in tq - \partial K, \forall t \in \mathbb{R}$;
- (4) 函数 $\phi_{-K,q}$ 是有限值的、连续的且凸的。

基于 Gerstewitz 函数 $\phi_{-K,q} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ，给定 $\bar{a} \in A \subseteq Y$ ，重新定义函数 $\phi_{\bar{a}-K,q} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ 为：

$$\phi_{\bar{a}-K,q}(y) := \min \{t \in \mathbb{R} : y \in tq + \bar{a} - K\}.$$

由定义可得

$$\phi_{\bar{a}-K,q}(y) = \phi_{-K,q}(y - \bar{a}). \quad (7)$$

根据上述定义与性质可得, 函数 $\phi_{\bar{a}-K,q}$ 具有序保持性质与序表示性质, 具体如下.

命题 3.6 设 $\bar{a} \in A$ 且 $q \in \text{int}K$, 则下列断言成立:

(1) 函数 $\phi_{\bar{a}-K,q}$ 在 $\bar{a} \in A$ 处是序保持的.

(2) 函数 $\phi_{\bar{a}-K,q}$ 在 $\bar{a} \in A$ 处是序表示的.

证明 (1) 设 $a \in A$ 满足 $a \leq_K \bar{a}$, 即 $a - \bar{a} \in -K$, 则

$$a - \bar{a} \in -K = 0 \cdot q - K, q \in \text{int}K.$$

根据命题 3.5(1), 并结合式(7), 可以得到

$$\phi_{\bar{a}-K,q}(a) = \phi_{-K,q}(a - \bar{a}) \leq 0. \quad (8)$$

因为 $0 \in -\partial K$, 所以根据命题 3.5 (3)与式(7)可得

$$\phi_{\bar{a}-K,q}(\bar{a}) = \phi_{-K,q}(0) = 0. \quad (9)$$

从而根据式(8)和(9)有

$$\phi_{\bar{a}-K,q}(a) \leq \phi_{\bar{a}-K,q}(\bar{a}) = 0.$$

所以 $\phi_{\bar{a}-K,q}$ 在 $\bar{a}$ 处是序保持的.

(2) 设 $a \in A$ 满足 $\phi_{\bar{a}-K,q}(a) \leq \phi_{\bar{a}-K,q}(\bar{a}) = 0$, 则

$$\phi_{-K,q}(a - \bar{a}) = \phi_{\bar{a}-K,q}(a) \leq 0.$$

根据命题 3.5(1)可得

$$a - \bar{a} \in -K \Leftrightarrow a \leq_K \bar{a}.$$

所以 $\phi_{\bar{a}-K,q}$ 在 $\bar{a}$ 处是序表示的. 命题得证.

给定 $\bar{a} \in A = \{H(x) : x \in X\}$, 基于函数 $\phi_{\bar{a}-K,q} : Y \rightarrow \mathbb{R}$, 问题 $(S_\phi\text{-RC-UMP})$ 可转化为如下问题:

$$\min_{x \in X} \phi_{\bar{a}-K,q} \circ H(x). (S_\phi\text{-RC-UMP})$$

基于上述鲁棒标量化问题 $(S_\phi\text{-RC-UMP})$, 命题 3.1 与 3.2 可以重新表述, 从而可得如下鲁棒最优性条件.

推论 3.1 设 $\bar{a} \in A$ 且满足 $\bar{a} = H(x_0)$. $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解, 当且仅当 $x_0 \in X$ 是鲁棒标量化问题 $(S_\phi\text{-RC-UMP})$ 的唯一解.

证明 根据命题 3.1 可得, $x_0 \in X$ 是问题 $(S_\phi\text{-RC-UMP})$ 的唯一解, 则 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解. 再根据命题 3.2 可得, $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解, 则 $x_0 \in X$ 是问题 $(S_\phi\text{-RC-UMP})$ 的唯一解. 证毕.

给定 $\bar{a} \in A = \{f(x, u) : x \in X, u \in U\}$, 基于函数 $\phi_{\bar{a}-K,q} : Y \rightarrow \mathbb{R}$, 问题 $(RC\text{-}S_\phi\text{-UMP})$ 转化为如下问题:

$$\min_{x \in X} \sup_{u \in U} \phi_{\bar{a}-K,q} \circ f(x, u). (RC\text{-}S_\phi\text{-UMP})$$

基于上述极小极大鲁棒化问题 $(RC\text{-}S_\phi\text{-UMP})$, 命题 3.3 与 3.4 可以重新表述, 从而可得如下鲁棒最优性条件.

推论 3.2 令 $\bar{a} \in A$ 且满足 $\bar{a} = f(x_0, u')$. 假设存在 $u' \in U$ 使得

$\sup_{u \in U} \phi_{\bar{a}-K,q} \circ f(x_0, u) = \phi_{\bar{a}-K,q} \circ f(x_0, u')$. 则 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解, 当且仅当 $x_0 \in X$ 是极小极大鲁棒

化问题($RC-S_\phi$ -UMP)的唯一解。

证明 根据命题 3.3 可得, $x_0 \in X$ 是问题($RC-S_\phi$ -UMP)的唯一解, 则 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解。再根据命题 3.4 可得, $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解, 则 $x_0 \in X$ 是问题($RC-S_\phi$ -UMP)的唯一解。证毕。

4. 标量化与鲁棒化的可交换性

在适当的条件下, 鲁棒标量化问题(S_ϕ -RC-UMP)与极小极大鲁棒化问题($RC-S_\psi$ -UMP)是等价的, 即 $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解, 当且仅当 $x_0 \in X$ 同时是问题(S_ϕ -RC-UMP)与问题($RC-S_\psi$ -UMP)的唯一解时。具体内容如下所示。

命题 4.1 设 ϕ 在 $H(x_0)$ 处是序保持与序表示的, 且 ψ 在 $f(x_0, u')$ 处是序保持与序表示的。假设存在 $u' \in U$ 使得 $\sup_{u \in U} \psi \circ f(x_0, u) = \psi \circ f(x_0, u')$ 。则下列断言是等价的:

- (1) $x_0 \in X$ 是鲁棒严格有效解;
- (2) $x_0 \in X$ 是鲁棒标量化问题(S_ϕ -RC-UMP)的唯一解;
- (3) $x_0 \in X$ 是极小极大鲁棒化问题($RC-S_\psi$ -UMP)的唯一解。

证明 根据命题 3.1 和 3.2 可得, (1)和(2)是等价的。再根据命题 3.3 和 3.4 可得, (1)和(3)是等价的。因此, (1)、(2)与(3)是等价的。命题得证。

给出如下例子验证鲁棒化与标量化的交换性。

例 4.1 考虑不确定多目标优化问题(UMP)满足: $Y = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}_+^3$, $X = [0, 2]$, $U_1 = U_2 = U_3 = [-1, 1]$, 以及 $f_1(x, u_1) = -u_1 - x$, $f_2(x, u_2) = \sqrt{1-u^2} - x^2$, $f_3(x, u_3) = -\sqrt{1-u^2} - x$ 。

步骤 1 根据定义 2.2 可得, $x_0 = 2$ 是鲁棒严格有效解。

步骤 2 计算鲁棒标量化问题(S_ϕ -RC-UMP)的解。

问题(UMP)的极小极大鲁棒对应问题为:

$$\min_{x \in [0, 2]} H(x), (RC-UMP)$$

其中 $H(x) = (1-x, 1-x^2, -x)$, $x \in [0, 2]$ 。通过引理 3.1 可得, $x_0 = 2$ 是该问题下的鲁棒严格有效解。

给定 $\bar{a} = H(x_0) = (-1, -3, -2)$ 以及 $q = (1, 1, 1)$, 通过标量函数 $\phi_{\bar{a}-K, q}: Y \rightarrow \mathbb{R}$ 对鲁棒多目标优化问题($RC-UMP$)进行标量化处理得如下鲁棒标量化问题:

$$\min_{x \in [0, 2]} \phi_{H(x_0)-K} \circ H(x), (S_\phi-RC-UMP)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{H(x_0)-K} \circ H(x) &:= \min \{t \in \mathbb{R} : (1-x, 1-x^2, -x) \in (t, t, t) + (-1, -3, -2) - K\} \\ &= \max \{2-x, 4-x^2, 2-x\} \geq 0, x \in [0, 2]. \end{aligned}$$

对于任意 $x \in [0, 2]$ 且 $x \neq x_0 = 2$ 可得

$$0 = \phi_{H(x_0)-K} \circ H(x_0) < \phi_{H(x_0)-K} \circ H(x).$$

因此, $x_0 = 2$ 是鲁棒标量化问题(S_ϕ -RC-UMP)的唯一解。

步骤 3 计算极小极大鲁棒化问题($RC-S_\psi$ -UMP)的解。

给定 $\bar{a} = f(x_0, u') = (-1, -3, -2)$ 以及 $q = (1, 1, 1)$, 标量函数 $\phi_{\bar{a}-K, q}: Y \rightarrow \mathbb{R}$ 对问题(UMP)标量化得到

$$\min_{x \in [0, 2]} \phi_{f(x_0, u')-K} \circ f(x, u), (S_\phi-UMP)$$

其中

$$\begin{aligned}\phi_{f(x_0, u')-K} \circ f(x, u) &:= \min \left\{ t \in \mathbb{R} : \left(-u_1 - x, \sqrt{1-u_2^2} - x^2, -\sqrt{1-u_3^2} - x \right) \in (t, t, t) + (-1, -3, -2) - K \right\} \\ &= \max \left\{ 1 - u_1 - x, 3 + \sqrt{1-u_2^2} - x^2, 2 - \sqrt{1-u_3^2} - x \right\}, x \in [0, 2].\end{aligned}$$

上述标量化问题的极小极大鲁棒对应问题为:

$$\min_{x \in [0, 2]} \sup_{u \in U} \phi_{f(x_0, u')-K} \circ f(x, u), \quad (RC-S_\phi-UMP)$$

其中

$$\begin{aligned}\sup_{u \in U} \phi_{f(x_0, u')-K} \circ f(x, u) &= \sup_{u \in U} \max \left\{ 1 - u_1 - x, 3 + \sqrt{1-u_2^2} - x^2, 2 - \sqrt{1-u_3^2} - x \right\} \\ &= \max \left\{ 2 - x, 4 - x^2, 2 - x \right\} \geq 0, x \in [0, 2].\end{aligned}$$

对于任意 $x \in [0, 2]$ 且 $x \neq x_0 = 2$ 可得

$$\sup_{u \in U} \phi_{f(x_0, u')-K} \circ f(x, u) > \sup_{u \in U} \phi_{f(x_0, u')-K} \circ f(x_0, u) = 0.$$

因此, $x_0 = 2$ 是极小极大鲁棒化问题 $(RC-S_\phi-UMP)$ 的唯一解。

根据命题 3.6 可得, 标量函数 $\phi_{H(x_0)-K}$ 在 $H(x_0)$ 处具有序保持性质与序表示性质, 标量函数 $\phi_{f(x_0, u')-K}$ 在 $f(x_0, u')$ 处具有序保持性质与序表示性质。注意到存在 $u' = (-1, 0, 1)$ 使得

$$\sup_{u \in U} \phi_{f(x_0, u')-K} \circ f(x_0, u) = \phi_{f(x_0, u')-K} \circ f(x_0, u') = \max \left\{ -1 - u_1, \sqrt{1-u_2^2} - 1, -\sqrt{1-u_3^2} \right\} = 0,$$

因此, 命题 4.1 的假设成立。这表明 $x_0 = 2$ 是鲁棒严格有效解, 且同时是鲁棒标量化问题 $(S_\phi-RC-UMP)$ 与极小极大鲁棒化问题 $(RC-S_\phi-UMP)$ 的唯一解, 从而命题 4.1 成立, 说明标量化与鲁棒化是可交换的。

5. 总结

本文将极小极大鲁棒优化与标量化相结合, 在此方法下提出鲁棒标量化问题 $(S_\phi-RC-UMP)$ 与极小极大鲁棒化问题 $(RC-S_\psi-UMP)$ (如图 3), 并通过序保持性质与序表示性质建立了问题 (UMP) 的鲁棒充分和必要最优性条件。此外, 用具有序保持性质与序表示性质的 Gerstewitz 函数具体说明该结合方法。最后, 在鲁棒充分和必要最优性条件及适当假设条件下, 证明鲁棒化与标量化在不确定多目标优化问题中是可交换的。

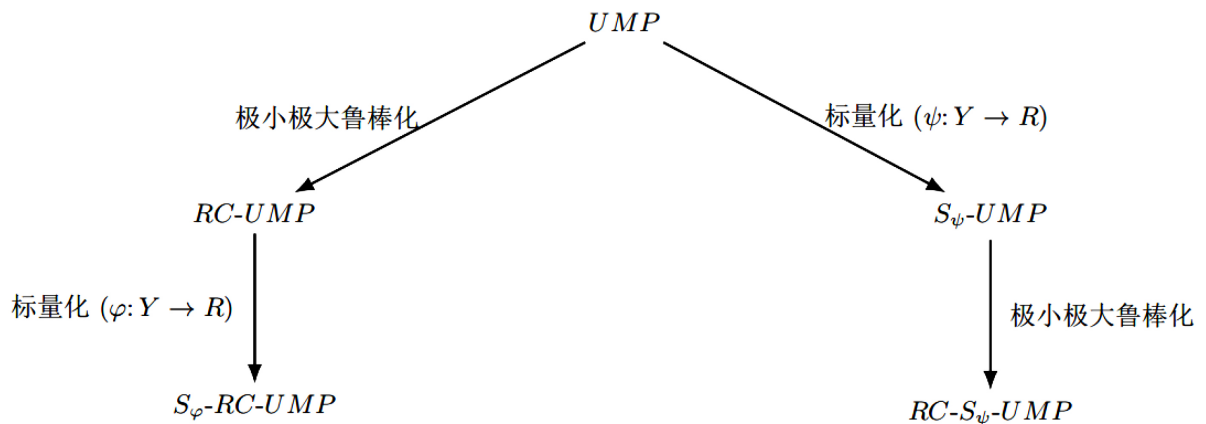


Figure 3. Scalarization and robustification

图 3. 标量化与鲁棒化

基金项目

本文受到国家自然科学基金(12201085)、重庆市自然科学基金(CSTB2023NSCQ-MSX0332)与重庆市教委科学技术研究项目(KJQN202300711)的资助。

参考文献

- [1] Masri, H. and Talbi, E. (2022) Recent Advances in Multiobjective Optimization. *Annals of Operations Research*, **311**, 547-550. <https://doi.org/10.1007/s10479-022-04589-4>
- [2] 魏宏智. 鲁棒优化问题最优性的若干研究[D]: [博士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2019.
- [3] 王杰. 不确定优化的鲁棒最优性条件与对偶研究[D]: [博士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2022.
- [4] 杨蕊溪. 不确定非凸多目标优化问题的鲁棒最优性与对偶性研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2023.
- [5] Wu, P., Jiao, L. and Zhou, Y. (2022) On Approximate Optimality Conditions for Robust Multi-Objective Convex Optimization Problems. *Optimization*, **72**, 1995-2018. <https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2045986>
- [6] Ehrgott, M., Ide, J. and Schöbel, A. (2014) Minmax Robustness for Multi-Objective Optimization Problems. *European Journal of Operational Research*, **239**, 17-31. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.03.013>
- [7] Ide, J., Köbis, E., Kuroiwa, D., Schöbel, A. and Tammer, C. (2014) The Relationship between Multi-Objective Robustness Concepts and Set-Valued Optimization. *Fixed Point Theory and Applications*, **2014**, Article No. 83. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-83>
- [8] Bokrantz, R. and Fredriksson, A. (2017) Necessary and Sufficient Conditions for Pareto Efficiency in Robust Multi-objective Optimization. *European Journal of Operational Research*, **262**, 682-692. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.04.012>
- [9] Caprari, E., Cerboni Baiardi, L. and Molho, E. (2022) Scalarization and Robustness in Uncertain Vector Optimization Problems: A Non-Componentwise Approach. *Journal of Global Optimization*, **84**, 295-320. <https://doi.org/10.1007/s10898-022-01142-2>
- [10] Gutiérrez, C., Jiménez, B., Miglierina, E. and Molho, E. (2014) Scalarization in Set Optimization with Solid and Nonsolid Ordering Cones. *Journal of Global Optimization*, **61**, 525-552. <https://doi.org/10.1007/s10898-014-0179-x>
- [11] Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C. and Zalinescu, C. (2003) Variational Methods in Partially Ordered Spaces. Springer.