Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(10), 16-30
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1410416

Hans汉斯

格上三物种捕食–食饵系统的行波解

肖明珠[1,2]

[1]长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙
[2]长沙理工大学工程数学建模与分析湖南省重点实验室，湖南 长沙

收稿日期：2025年8月25日；录用日期：2025年9月19日；发布日期：2025年9月26日

摘 要

本文研究了具有两个捕食者和一个食饵的离散扩散的捕食者–食饵模型的行波解，其中两个捕食者的净增长率均为负。当外来捕食者的传播速度大于等于最小波速时，系统存在连接无捕食者状态和共存状态的行波解，即捕食者入侵成功。在**Schauder**不动点定理的帮助下构造了合适的上下解，证明了行波解的存在性。另外，利用压缩矩形的方法得到了行波解在无穷远处的渐近行为。通过对最小波速的估计，得到了当外来捕食者的传播速度小于最小波速时，系统不存在行波解。

关键词

行波解，离散扩散，**Schauder**不动点定理，压缩矩形

Traveling Wave Solutions for a Predator-Prey System of Three Species on Lattice

Mingzhu Xiao[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
[2]Hunan Provincial Key Laboratory of Mathematical Modeling and Analysis in Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: August 25, 2025; accepted: September 19, 2025; published: September 26, 2025

Abstract

In this paper, we study the traveling wave solution of a discrete diffusive predator-prey model with two predators and one prey, in which the net growth rate of both predators is negative. When the propagation speed of the invasive predator is greater than or equal to the minimum wave speed

文章引用: 肖明珠. 格上三物种捕食-食饵系统的行波解[J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 16-30.
DOI: 10.12677/aam.2025.1410416

there exists a traveling wave solution connecting the predator-free state and the coexistence state of the system, meaning the predator invasion is successful. With the help of Schauder's fixed point theorem, suitable upper and lower solutions are constructed to prove the existence of traveling wave solutions. In addition, the asymptotic behavior of the traveling wave solution at infinity is obtained by using the method of shrinking rectangle. By estimating the minimum wave speed, it is obtained that there is no traveling wave solution for the system when the spread speed of the invasive predator is less than the minimal wave speed.

Keywords

Traveling Wave Solution, Discrete Diffusive, Schauder's Fixed Point Theorem, Shrinking Rectangle

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

在自然界中，生物种群之间的相互作用是复杂且多样的。捕食者－食饵关系是生态学中最基本的相互作用之一，它不仅影响着物种的存活和繁衍，还决定了生态系统的结构和功能。行波解作为一种特殊的解，它描述了种群如何在空间中随时间以特定的速度和形状传播，这对于理解物种扩散、入侵生态学以及疾病传播等现象至关重要。在两个弱竞争捕食者与一个食饵的模型中。行波解能够帮助我们预测和理解捕食者和食饵种群如何在空间中分布，以及它们如何响应环境变化和干扰。

格动力系统即空间离散反应扩散系统，为生态学提供了一种定量化的方法来展示生态系统中环境因子和生物因子的变化过程。在实际生活中，生物体生存的空间并不都是连续的，如：传染病的传播、物种的繁殖、迁移、入侵[1] [2]以及大气的扩散等现象，用经典的反应扩散系统描述就不是很严谨。

目前，已有大量的文献研究了连续捕食－食饵模型行波解的存在性。然而，对于具有离散空间结构的捕食者－食饵模型的研究相对较少。事实上，晶格动力学系统在聚集扩散[3]和斑块环境[4] [5]中描述侵入现象方面比连续系统更现实。

近年来，行波解的研究引起了人们的广泛关注。两物种的捕食－食饵系统反应扩散方程已经有了相对成熟的结果。对于具有连续的局部和非局部扩散的方程，我们参考文献[6]-[9]。其中采用了交叉迭代、上下解和最大值原理的方法，证明了行波解的存在性。Chen 等人[10]研究了连续和离散扩散捕食者－食饵模型的行波解，研究了在一定的参数限制下外来入侵的捕食者被引入现有食饵的栖息地，这两个物种能生存下来。利用 Schauder 不动点理论，在合适的上下解的帮助下，证明了该模型行波解的存在性。Zhang 等人[11]研究了连续和离散扩散修正 Leslie-Gower 捕食模型的行波解的存在性。

自然界中，我们所看到的捕食－食饵关系更多的是多个物种之间的相互作用，然而，涉及的物种越多，预期的动力学行为就越复杂。最近，大量工作集中在三物种捕食－食饵系统的研究。Huang 等人[12]研究了具有两个食饵和一个捕食者的扩散系统的行波解，其中两个食饵具有竞争关系，捕食者除了食饵以外靠其他资源也能存活。Chen 等人[13]研究了局部的一个外来捕食者入侵具有弱竞争的一对本土食饵行波解。通过构造上解和下解，证明了非平凡行波解的存在性。通过将渐近扩展与压缩矩形相结合，证实了行波解的渐近性。利用渐近扩散理论，证明了行波解的不存在性。Guo [14]等人研究了局部的一个有两个之间具有弱竞争的外来捕食者和一个土著食饵的捕食者－食饵模型

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + r_1 u\left[-1-u-kv+aw\right], \\ v_t = d_2 v_{xx} + r_2 v\left[-1-hu-v+aw\right], \\ w_t = d_3 w_{xx} + r_3 u\left[1-bu-bv-w\right], \end{cases} \tag{1}$$

通过连接无捕食者状态和共存状态的行波解的最小波速来表征这两种捕食者的入侵速度，利用 Schauder 不动点定理构造上下解，建立了证明行波存在性的标准方法；还引入了一种新的压缩矩形形式来推导波廓线的右尾极限。与连续系统(1)相比，本文研究的离散系统(2)在数学处理和生态解释上存在显著差异。首先，离散扩散项的引入使得系统不再具有连续系统中拉普拉斯算子所带来的正则性，因此需要发展适用于格点系统的上下解构造技巧和不动点框架。其次，在波速的最小值估计和行波解不存在性的证明中，离散系统特有的特征方程和谱性质也带来了新的挑战。此外，从生态建模的角度看，离散系统更适用于描述生境斑块化、迁移路径不连续的实际场景，因此本研究为理解捕食者在破碎化景观中的入侵过程提供了更贴近现实的理论工具。故在本文中，我们在[14]的基础上考虑离散版本的捕食－食饵系统

$$\begin{cases} u_j'(t) = d_1 D_1\left[u_j\right](t) + r_1 u_j(t)\left[-1-u_j(t)-kv_j(t)+aw_j(t)\right], \\ v_j'(t) = d_2 D_1\left[v_j\right](t) + r_2 v_j(t)\left[-1-hu_j(t)-v_j(t)+aw_j(t)\right], \\ w_j'(t) = d_3 D_1\left[w_j\right](t) + r_3 u_j(t)\left[1-bu_j(t)-bv_j(t)-w_j(t)\right], \end{cases} \tag{2}$$

其中 $D_1\left[z_j\right](t) = z_{j+1}(t) + z_{j-1}(t) - 2z_j(t)$；$u_j(t), v_j(t)$ 和 $w_j(t)$ 分别表示两个捕食者和一个食饵在生态位 j 和时 t 的种群密度；$d_i\,(i=1,2,3)$ 分别表示各物种的扩散率；r_1 和 r_2 分别表示两个捕食者的死亡率，r_3 表示食饵的内禀增长率；假设食饵 w 的承载能力为 1；$r_3 b$ 表示捕食者对食饵的捕食率，$r_1 a$ 和 $r_2 a$ 分别为捕食者对食饵的转化率；h 和 k 为两个捕食者的内部竞争系数；此外，所有的参数都是正常数且满足以下条件：

$$a > 1,\ 0 < h, k < 1,\ 0 < b < \frac{1}{2(a-1)}. \tag{3}$$

上述参数的条件可知两个捕食者之间是弱竞争关系，捕食者除了该食饵外在其他资源下也能存活。在(3)的条件下存在唯一的共存状态 $\left(u^*, v^*, w^*\right)$，其中

$$w^* = \frac{(1-hk) + b(2-h-k)}{(1-hk) + ab(2-h-k)},\ v^* = \frac{1-k}{1-hk}\left(aw^*-1\right),\ u^* = \frac{1-k}{1-hk}\left(aw^*-1\right).$$

且存在无捕食者状态为 $(0,0,1)$，本文考虑两个具有弱竞争捕食者入侵本土食饵的入侵现象。系统(2)的解是速度为 c 的行波，若存在定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 U, V, W 且令 $\xi = j + ct$，满足 $\left(u_j, v_j, w_j\right)(t) = (U, V, W)(\xi)$。则系统(2)对应的行波系统如下：

$$\begin{cases} cU'(\xi) = d_1 D_1[U](\xi) + r_1 U(\xi)\left[-1-U(\xi)-kV(\xi)+aW(\xi)\right], \\ cV'(\xi) = d_2 D_1[V](\xi) + r_2 V(\xi)\left[-1-hU(\xi)-V(\xi)+aW(\xi)\right], \\ cW'(\xi) = d_3 D_1[W](\xi) + r_3 W(\xi)\left[1-bU(\xi)-bV(\xi)-W(\xi)\right], \end{cases} \tag{4}$$

其中 $D_1[\varphi](\xi) = \varphi(\xi+1) + \varphi(\xi-1) - 2\varphi(\xi)$；由于我们感兴趣的是连接无捕食者状态 $(0,0,1)$ 和共存状态 $\left(u^*, v^*, w^*\right)$ 的行波解,故对行波解规定如下渐近边界条件：

$$\lim_{\xi \to -\infty} (U, V, W) = (0,0,1),\ \lim_{\xi \to +\infty} (U, V, W) = \left(u^*, v^*, w^*\right), \tag{5}$$

上述式子说明捕食者可以成功入侵食饵的栖息地。

最后，我们定义最小波速：

$$c_i^* = \inf_{\lambda>0} \frac{d_i\left(e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2\right)+r_i\left(a-1\right)}{\lambda}, i=1,2.\ c^* = \max\left\{c_1^*, c_2^*\right\}$$

由于捕食－食饵系统不具有比较原理，经典的单调迭代法不再适用于推导行波解的存在性，本文将通过构造上下解，应用 Schauder 不动点定理的方法证明行波解的存在性。本文构造的行波是两个捕食者同时传播的，从生态学意义上来说，这意味着这两个捕食者以相同的速度入侵本土食饵的栖息地。

与已有的三物种系统研究相比，本文工作具有以下创新点：一是将[14]的连续模型推广至离散空间，克服了离散扩散项带来的非局部耦合和谱分析困难；二是与[12]的双食饵单捕食者模型不同，本文聚焦于双捕食者单食饵系统，更适用于分析外来捕食者入侵现存生态位的场景；三是与[13]的本土食饵系统相比，本文通过净增长率为负的假设，更准确地描述了专性捕食者的生存依赖关系。这些改进使得模型既能反映真实生态系统的空间离散特性，又能捕捉多物种相互作用中的关键生态过程。

本文剩余部分组织如下：在第 2 节中，我们首先给出了系统(4)的上下解的定义，然后给出了(4)解存在性的一个定理。在第 3 节中，我们构造了速度 $c \ge c^*$ 的上下解，证明了行波解的存在性。在第 4 节中，利用压缩矩形的方法，我们得到了波廓线的右尾极限。最后在第 5 节中，我们证明了行波解的不存在性，由此确定了最小波速。

2. 基本理论

为推导系统(4)行波解的存在性，需先构造上下解。上下解的构造核心思想是基于系统平衡态特性与参数约束，设计具有明确衰减性和边界适配性的连续函数：一方面，需确保上下解在无穷远处满足行波解的渐近边界条件；另一方面，需通过参数选取使上下解分别满足系统(4)的不等式约束，为后续应用 Schauder 不动点定理奠定基础。我们首先给出上下解的定义。

定义 2.1： 定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $\varphi=\left(\bar{U},\bar{V},\bar{W}\right)$ 和 $\phi=\left(\underline{U},\underline{V},\underline{W}\right)$ 被称为系统(4)的一对上下解，即满足存在一个有限集合 $T=\left\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m\right\}$ 使得当 $\xi\in\mathbb{R}\setminus T$ 时，φ' 和 ϕ' 存在且有界并满足以下不等式：

$$F_1(\xi)=d_1\left[\bar{U}(\xi+1)+\bar{U}(\xi-1)-2\bar{U}(\xi)\right]-c\bar{U}'(\xi)+r_1\bar{U}(\xi)\left[-1-\bar{U}(\xi)-k\underline{V}(\xi)+a\bar{W}(\xi)\right]\le 0,$$
$$L_1(\xi)=d_1\left[\underline{U}(\xi+1)+\underline{U}(\xi-1)-2\underline{U}(\xi)\right]-c\underline{U}'(\xi)+r_1\underline{U}(\xi)\left[-1-\underline{U}(\xi)-k\bar{V}(\xi)+a\underline{W}(\xi)\right]\ge 0,$$
$$F_2(\xi)=d_2\left[\bar{V}(\xi+1)+\bar{V}(\xi-1)-2\bar{V}(\xi)\right]-c\bar{V}'(\xi)+r_2\bar{V}(\xi)\left[-1-h\underline{U}(\xi)-\bar{V}(\xi)+a\bar{W}(\xi)\right]\le 0,$$
$$L_2(\xi)=d_2\left[\underline{V}(\xi+1)+\underline{V}(\xi-1)-2\underline{V}(\xi)\right]-c\underline{V}'(\xi)+r_2\underline{V}(\xi)\left[-1-h\bar{U}(\xi)-\underline{V}(\xi)+a\underline{W}(\xi)\right]\ge 0,$$
$$F_3(\xi)=d_3\left[\bar{W}(\xi+1)+\bar{W}(\xi-1)-2\bar{W}(\xi)\right]-c\bar{W}'(\xi)+r_3\bar{W}(\xi)\left[1+b\underline{U}(\xi)+b\underline{V}(\xi)-\bar{W}(\xi)\right]\le 0,$$
$$L_3(\xi)=d_3\left[\underline{W}(\xi+1)+\underline{W}(\xi-1)-2\underline{W}(\xi)\right]-c\underline{W}'(\xi)+r_3\underline{W}(\xi)\left[1+b\bar{U}(\xi)+b\bar{V}(\xi)-\underline{W}(\xi)\right]\ge 0.$$

现在，我们将构造 $c\ge c^*$ 时系统(4)合适的上下解。

2.1. $c>c^*$ 的情形

当 $c>c^*$ 时，$y_i(\lambda)=0$ 有两个正实根，其中 $y_i(\lambda)=d_i\left(e^{\lambda_i}+e^{-\lambda_i}-2\right)-c\lambda_i+r_i(a-1), i=1,2$。我们定义 $\lambda_i(i=1,2)$ 是 $y_i(\lambda)=0$ 的小的正根，$\hat{\lambda}_i(i=1,2)$ 是更大的根。进一步容易知道 λ_3 为 $d_3\left(e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2\right)-c\lambda-r_3=0$ 唯一的正根。

接下来，我们将定义以下连续函数：

$$\bar{U}(\xi)=\begin{cases}\sigma_1, & \xi\ge 0,\\ \sigma_1 e^{\lambda_1\xi}, & \xi\le 0,\end{cases}\qquad \underline{U}(\xi)=\begin{cases}0, & \xi\ge\xi_1,\\ \sigma_1\left(e^{\lambda_1\xi}-q_1 e^{\eta\lambda_1\xi}\right), & \xi\le\xi_1,\end{cases}$$

$$\bar{V}(\xi)=\begin{cases}\sigma_2, & \xi\ge 0,\\ \sigma_2 e^{\lambda_2\xi}, & \xi\le 0,\end{cases}\qquad \underline{V}(\xi)=\begin{cases}0, & \xi\ge\xi_2,\\ \sigma_2\left(e^{\lambda_2\xi}-q_2e^{\eta_2\lambda_2\xi}\right), & \xi\le\xi_2,\end{cases}$$

$$\bar{W}(\xi)\equiv 1,\qquad \underline{W}(\xi)=\begin{cases}1-a\sigma, & \xi\ge\xi_3,\\ 1-\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right), & \xi\le\xi_3,\end{cases}$$

其中参数决定上下解在无穷远处的衰减速率以适配无捕食者或共存状态的渐近边界，共同保障上下解满足定义 2.1 的不等式约束与边界条件，故满足以下条件：

$$\sigma_1=\sigma_2=a-1,\ \ \sigma\in\left[\frac{2b(a-1)}{a},\frac{1}{a}\right),\quad \eta_i>1,\ \ q_i>1, i=1,2.\ p>0,\ \ \mu\in(0,1).$$

下面我们将验证以上函数为一对上下解。

首先，我们证明 $F_1(\xi)\le 0$，当 $\xi>0$ 时，有 $\bar{U}(\xi)=\sigma_1$，$\bar{U}(\xi+1)=\sigma_1$，$\bar{U}(\xi-1)\le\sigma_1$，$\bar{W}=1$。则

$$F_1(\xi)\le r_1\sigma_1\left[-1-\sigma_1-k\underline{V}+a\right]=-r_1\sigma_1k\underline{V}\le 0.$$

当 $\xi<0$ 时，$\bar{U}(\xi)=\sigma_1e^{\lambda_1\xi}$，$\bar{U}(\xi+1)\le\sigma_1e^{\lambda_1(\xi+1)}$，$\bar{U}(\xi-1)=\sigma_1e^{\lambda_1(\xi-1)}$，$\bar{W}=1$。

$$\begin{aligned}F_1(\xi)&\le d_1\left[\sigma_1e^{\lambda_1(\xi+1)}+\sigma_1e^{\lambda_1(\xi-1)}-2\sigma_1e^{\lambda_1\xi}\right]-c\sigma_1\lambda_1e^{\lambda_1\xi}+r_1\sigma_1e^{\lambda_1\xi}\left[-1-\sigma_1e^{\lambda_1\xi}-k\underline{V}(\xi)+a\right]\\&=\sigma_1e^{\lambda_1\xi}\left[d_1\left(e^{\lambda_1}+e^{-\lambda_1}-2\right)-c\lambda_1\right]+r_1\sigma_1e^{\lambda_1\xi}\left[-1-\sigma_1e^{\lambda_1\xi}-k\underline{V}(\xi)+a\right]\\&=\sigma_1e^{\lambda_1\xi}\left[-r_1(a-1)\right]+r_1\sigma_1e^{\lambda_1\xi}\left[-1-\sigma_1e^{\lambda_1\xi}-k\underline{V}(\xi)+a\right]\\&=-r_1\sigma_1e^{\lambda_1\xi}\left[\sigma_1e^{\lambda_1\xi}+k\underline{V}(\xi)\right]\\&\le 0.\end{aligned}$$

同样的对所有的 $\xi\ne 0$ 也能得到 $F_2(\xi)\le 0$。

因为 $\bar{W}=1$，易得 $F_3(\xi)\le 0$。接下来，我们证明 $L_3(\xi)\ge 0$。

由于 $a\sigma<1$，则 $\xi_3<0$。

当 $\xi>\xi_3$ 时，有 $\underline{W}(\xi)=1-a\sigma$，$\underline{W}(\xi+1)=1-a\sigma$，$\underline{W}(\xi-1)\ge 1-a\sigma$，$\bar{U}\le\sigma_1$，$\bar{V}\le\sigma_2$，则我们能得到：

$$\begin{aligned}L_3(\xi)&\ge r_3(1-a\sigma)\left[1-b\sigma_1-b\sigma_2-1+a\sigma\right]\\&=r_3(1-a\sigma)\left[a\sigma-b(\sigma_1+\sigma_2)\right]\\&\ge 0.\end{aligned}$$

当 $\xi<\xi_3<0$ 时，$e^{\lambda_3\xi_3}+pe^{\mu\lambda_3\xi_3}\le a\sigma$，$\bar{U}=\sigma_1e^{\lambda_1\xi}$，$\bar{V}=\sigma_2e^{\lambda_2\xi}$，$\underline{W}(\xi)=1-\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)$，$\underline{W}(\xi+1)\ge 1-\left(e^{\lambda_3(\xi+1)}+pe^{\mu\lambda_3(\xi+1)}\right)$，$\underline{W}(\xi-1)=1-\left(e^{\lambda_3(\xi-1)}+pe^{\mu\lambda_3(\xi-1)}\right)$，则通过计算可得到：

$$\begin{aligned}L_3(\xi)&\ge d_3\left[-e^{\lambda_3(\xi+1)}-pe^{\mu\lambda_3(\xi+1)}-e^{\lambda_3(\xi-1)}-pe^{\mu\lambda_3(\xi-1)}+2e^{\lambda_3\xi}+2pe^{\mu\lambda_3\xi}\right]+c\left(\lambda_3e^{\lambda_3\xi}+\lambda_3pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)\\&\quad+r_3\left\{1-\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)\right\}\left\{\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)-b\sigma_1e^{\lambda_1\xi}-b\sigma_2e^{\lambda_2\xi}\right\}\\&\ge -e^{\lambda_3\xi}\left\{d_3\left(e^{\lambda_3}+e^{-\lambda_3}-2\right)-c\lambda_3-r_3\right\}-pe^{\mu\lambda_3\xi}\left\{d_3\left(e^{\mu\lambda_3}+e^{-\mu\lambda_3}-2\right)-c\mu\lambda_3-r_3\right\}\\&\quad-r_3\left\{\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)^2+b\sigma_1e^{\lambda_1\xi}+b\sigma_2e^{\lambda_2\xi}\right\}\\&\ge e^{\mu\lambda_3\xi}\left(p\left\{-d_3\left(e^{\mu\lambda_3}+e^{-\mu\lambda_3}-2\right)-c\mu\lambda_3-r_3\right\}\right)\end{aligned}$$

$$-r_3\left\{a\sigma e^{(1-\mu)\lambda_3\xi}+a\sigma p+b\sigma_1 e^{(\lambda_1-\mu\lambda_3)\xi}+b\sigma_2 e^{(\lambda_2-\mu\lambda_3)\xi}\right\}$$
$$:=e^{\mu\lambda_3\xi}f_3(\xi).$$

现选择 μ 使得 $0<\mu<\min\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_3},\frac{\lambda_2}{\lambda_3},\alpha\right\}$，其中 α 为正常数使得 $d_3\left(e^{\alpha\lambda_3}+e^{-\alpha\lambda_3}-2\right)-c\alpha\lambda_3-r_3=0$，由 λ_3 的定义，则 $\alpha<1$，则 $d_3\left(e^{\mu\lambda_3}+e^{-\mu\lambda_3}-2\right)-c\mu\lambda_3-r_3<0$。

另一方面，由 $\xi<\xi_3<0$ 和 $0<\mu<\min\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_3},\frac{\lambda_2}{\lambda_3},\alpha\right\}$，若 $p>\frac{r_3\left(a\sigma+b\sigma_1+b\sigma_2\right)}{-\left[d_3\left(e^{\mu\lambda_3}+e^{-\mu\lambda_3}-2\right)-c\mu\lambda_3-r_3\right]}$，则有

$$f_3(\xi)\ge p\left\{-\left[d_3\left(e^{\mu\lambda_3}+e^{-\mu\lambda_3}-2\right)-c\mu\lambda_3-r_3\right]\right\}-r_3\left(a\sigma+b\sigma_1+b\sigma_2\right)\ge 0.$$

最后，令 $\xi_i,i=1,2$ 是 $g_i(\xi_i)=0$ 唯一的解，其中 $g_i(\xi)=e^{\lambda_i\xi}-q_i e^{\eta_i\lambda_i\xi}$。由于 $\eta_i>1,q_i>1,i=1,2$，则有 $\xi_i<0$ 和 $g_i(\xi)>0$。

接下来我们证明 $L_1(\xi)\ge 0$。

当 $\xi>\xi_1$ 时，$\underline{U}(\xi)=0$，$\underline{U}(\xi+1)=0$，$\underline{U}(\xi-1)\ge 0$。则 $L_1(\xi)=0$。

当 $\xi<\xi_1$ 时，$\bar{V}=\sigma_2 e^{\lambda_2\xi}$，$\underline{W}(\xi)\ge 1-\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)$，$\underline{U}(\xi)=\sigma_1\left(e^{\lambda_1\xi}-q_1e^{\eta_1\lambda_1\xi}\right)$，$\underline{U}(\xi+1)\ge\sigma_1\left(e^{\lambda_1(\xi+1)}-q_1e^{\eta_1\lambda_1(\xi+1)}\right)$，$\underline{U}(\xi-1)=\sigma_1\left(e^{\lambda_1(\xi-1)}-q_1e^{\eta_1\lambda_1(\xi-1)}\right)$。

通过简单计算易得：

$$\begin{aligned}L_1(\xi)&\ge\sigma_1e^{\lambda_1\xi}\left[d_1\left(e^{\lambda_1}+e^{-\lambda_1}-2\right)-c\lambda_1+r_1(a-1)\right]-q_1\sigma_1e^{\eta_1\lambda_1\xi}\left[d_1\left(e^{\eta_1\lambda_1}+e^{-\eta_1\lambda_1}-2\right)-c\eta_1\lambda_1+r_1(a-1)\right]\\&\quad-r_1\sigma_1\left(e^{\lambda_1\xi}-q_1e^{\eta_1\lambda_1\xi}\right)\left\{\sigma_1\left(e^{\lambda_1\xi}-q_1e^{\eta_1\lambda_1\xi}\right)+k\sigma_2e^{\lambda_2\xi}+a\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)\right\}\\&\ge-q_1\sigma_1e^{\eta_1\lambda_1\xi}\left[d_1\left(e^{\eta_1\lambda_1}+e^{-\eta_1\lambda_1}-2\right)-c\eta_1\lambda_1+r_1(a-1)\right]\\&\quad-r_1\sigma_1\left\{\sigma_1e^{2\lambda_1\xi}+k\sigma_2e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi}+a\left(e^{(\lambda_1+\lambda_3)\xi}+pe^{(\lambda_1+\mu\lambda_3)\xi}\right)\right\}\\&=\sigma_1e^{\eta_1\lambda_1\xi}\left\{q_1\left\{-\left[d_1\left(e^{\eta_1\lambda_1}+e^{-\eta_1\lambda_1}-2\right)-c\eta_1\lambda_1+r_1(a-1)\right]\right\}\right.\\&\quad\left.-r_1\left\{\sigma_1e^{(2\lambda_1-\eta_1\lambda_1)\xi}+k\sigma_2e^{(\lambda_1+\lambda_2-\eta_1\lambda_1)\xi}+a\left(e^{(\lambda_1+\lambda_3-\eta_1\lambda_1)\xi}+pe^{(\lambda_1+\mu\lambda_3-\eta_1\lambda_1)\xi}\right)\right\}\right\}\\&:=\sigma_1e^{\eta_1\lambda_1\xi}f_1(\xi).\end{aligned}$$

我们现在选择 $1<\eta_1<\min\left\{\frac{\hat{\lambda}_1}{\lambda_1},2,1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1},1+\frac{\alpha\lambda_3}{\lambda_1}\right\}$，对于所有的 $\xi<\xi_1<0$，若 $q_1>\max\left\{1,\frac{r_1\left(\sigma_1+k\sigma_2+a+ap\right)}{-\left[d_1\left(e^{\eta_1\lambda_1}+e^{-\eta_1\lambda_1}-2\right)-c\eta_1\lambda_1-r_1(a-1)\right]}\right\}$，则能得到：

$$f_1(\xi)\ge q_1\left\{-\left[d_1\left(e^{\eta_1\lambda_1}+e^{-\eta_1\lambda_1}-2\right)-c\eta_1\lambda_1+r_1(a-1)\right]\right\}-r_1\left(\sigma_1+k\sigma_2+a(1+p)\right)\ge 0.$$

同理，对所有的 $\xi\ne\xi_2$，若

$$1<\eta_2<\min\left\{\frac{\hat{\lambda}_2}{\lambda_2},2,1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2},1+\frac{\alpha\lambda_3}{\lambda_2}\right\},q_2>\max\left\{1,\frac{r_2\left(h\sigma_1+\sigma_2+a+ap\right)}{-\left[d_2\left(e^{\eta_2\lambda_2}+e^{-\eta_2\lambda_2}-2\right)-c\eta_2\lambda_2-r_2(a-1)\right]}\right\},$$

也能得到 $L_2(\xi)\ge 0$。

引理 2.1：当 $c > c^*$ 时，若满足上述 $\mu, p, \eta_1, \eta_2, q_1, q_2$ 的选择，则连续函数 $\varphi = \left(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}\right)$ 和 $\phi = \left(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}\right)$ 被称为系统(4)的一对上下解。

2.2. $c = c^*$ 的情形

接下来，我们将讨论临界速度 $c = c^*$ 的情形。不失一般性，我们可以假设 $r_1 d_1 \ge r_2 d_2$，我们分为以下两种情形进行讨论：

2.2.1. $r_1 d_1 > r_2 d_2$

当 $r_1 d_1 > r_2 d_2$ 时，$c_* \lambda = d_1\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2\right) + r_1(a-1)$ 有唯一的正根 λ_1，则有 $c_* = d_1\left(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}\right)$。且 λ_3 为 $d_3\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2\right) - c\lambda - r_3 = 0$ 唯一的正根。

接下来我们考虑

$$l_1(\xi) := \xi^2 + \xi\sqrt{\xi^2 + \xi} + \frac{1}{2}\xi,\ \ l_2(\xi) := \xi^2 + \xi\sqrt{\xi^2 - \xi} + \frac{1}{2}\xi,\ \ \xi \le -1.$$

则 $l_1(\xi)$ 和 $l_2(\xi)$ 在 $(-\infty, -1]$ 是正的。我们用洛必达法则进行计算得到：

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi\to-\infty} l_1(\xi) &= \lim_{\xi\to-\infty} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{1/2} + \frac{1}{2\xi}}{\frac{1}{\xi^2}} = \lim_{\xi\to-\infty} \frac{\frac{1}{2\xi^2}\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{-1/2} - \frac{1}{2\xi^2}}{\frac{-2}{\xi^3}} \\
&= \lim_{\xi\to-\infty} \frac{-\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{-1/2} + 1}{\frac{4}{\xi}} = \lim_{\xi\to-\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{-3/2} \frac{-1}{2\xi^2}}{\frac{-4}{\xi^2}} \\
&= \lim_{\xi\to-\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{-3/2}}{8} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

同理，我们能得到 $\lim\limits_{\xi\to-\infty} l_2(\xi) = \frac{1}{8}$。因此常数 $x_1 := \inf\limits_{\xi<-1} l_1(\xi) > 0,\ x_2 := \inf\limits_{\xi<-1} l_2(\xi) > 0$ 是具有良好定义的。

接下来，我们将定义以下连续函数：

$$\bar{U}(\xi) = \begin{cases} \sigma_1, & \xi \ge -\frac{1}{\lambda_1}, \\ h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}, & \xi \le -\frac{1}{\lambda_1}, \end{cases} \qquad \underline{U}(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \ge \xi_1', \\ \left[h_1(-\xi) - q_1(-\xi)^{1/2}\right]e^{\lambda_1\xi}, & \xi \le \xi_1', \end{cases}$$

其中 $h_1 = \sigma_1\lambda_1 e$，$\xi_1' = -\left(\frac{q_1}{h_1}\right)^2$，$q_1 > 1$。为了后续计算的方便，我们使用了这样的一个结论：

对任意的正常数 ν 和 ρ，则有 $\sup\limits_{\xi\le 0}(-\xi)^{\nu} e^{\rho\xi} = \left(\frac{\nu}{\rho e}\right)^{\nu}$。

引理 2.2：当 $c = c^*$ 时，若满足 $\mu, p, \eta_1, \eta_2, q_1, q_2$ 的选择，连续函数 $\varphi = \left(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}\right)$ 和 $\phi = \left(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}\right)$ 被称为系统(4)的一对上下解。

证明：下面我们将验证以上函数为一对上下解：首先我们证明对所有的 $\xi \ne -\frac{1}{\lambda_1}$ 有 $F_1(\xi) \le 0$。

当 $\xi > -\frac{1}{\lambda_1}$ 时，$\bar{U}(\xi)=\sigma_1$，$\bar{U}(\xi+1)=\sigma_1$，$\bar{U}(\xi-1)\le\sigma_1$，$\bar{W}=1$。

则

$$F_1(\xi)\le r_1\sigma_1\left[-1-\sigma_1-k\underline{V}+a\right]=-r_1\sigma_1 k\underline{V}\le 0.$$

当 $\xi < -\frac{1}{\lambda_1}$ 时，我们能得到

$$\bar{U}(\xi)=h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi},\ \bar{U}(\xi+1)\le h_1(-\xi-1)e^{\lambda_1(\xi+1)},\ \bar{U}(\xi-1)=h_1(-\xi+1)e^{\lambda_1(\xi-1)},\ \bar{W}=1.$$

则通过计算可得

$$\begin{aligned}
F_1(\xi)\le{}& d_1\left[h_1(-\xi-1)e^{\lambda_1(\xi+1)}+h_1(-\xi+1)e^{\lambda_1(\xi-1)}-2h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}\right]-c\left[-h_1e^{\lambda_1\xi}+h_1\lambda_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}\right]\\
&+r_1e^{\lambda_1\xi}h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}\left[-1-h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}k\underline{V}(\xi)+a\right]\\
={}&h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}\left[d_1\left(e^{\lambda_1}+e^{-\lambda_1}-2\right)-c\lambda_1\right]+d_1\left[-h_1e^{\lambda_1(\xi+1)}+h_1e^{\lambda_1(\xi-1)}\right]+ch_1e^{\lambda_1\xi}\\
&+r_1h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}\left[-1-h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}-k\underline{V}(\xi)+a\right]\\
\le{}&h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}\left[-d_1e^{\lambda_1}+e^{-\lambda_1}+c\right]+r_1h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}\left[-h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}-k\underline{V}(\xi)\right]\\
={}&r_1h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}\left[-h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}-k\underline{V}(\xi)\right]\\
\le{}&-r_1h_1(-\xi)^2e^{2\lambda_1\xi}\\
\le{}&0.
\end{aligned}$$

同样的对所有的 $\xi\ne 0$ 也能得到 $F_2(\xi)\le 0$。

由于 $\bar{W}=1$，则容易看出

$$F_3(\xi)=-r_3b\left[\underline{U}(\xi)+\underline{V}(\xi)\right]\le 0.$$

接下来证明对于所有的 $\xi\ne 0$ 有 $L_3(\xi)\ge 0$。对 $\xi\ne 0$，其中 $e^{\lambda_3\xi_3}+pe^{\mu\lambda_3\xi_3}=a\sigma$，由于 $a\sigma<1$，则 $\xi_3<0$.

当 $\xi>\xi_3$ 时，$\underline{W}(\xi)=1-a\sigma$，$\underline{W}(\xi+1)=1-a\sigma$，$\underline{W}(\xi-1)\ge 1-a\sigma$，$\bar{U}\le\sigma_1$，$\bar{V}\le\sigma_2$。

则

$$\begin{aligned}
L_3(\xi)\ge{}& r_3(1-a\sigma)[1-b\sigma_1-b\sigma_2-1+a\sigma]\\
={}&r_3(1-a\sigma)\left[a\sigma-b(\sigma_1+\sigma_2)\right]\\
\ge{}&0.
\end{aligned}$$

当 $\xi<\xi_3<0$ 时，$e^{\lambda_3\xi_3}+pe^{\mu\lambda_3\xi_3}\le a\sigma$. 为了 $\xi_3<-\frac{1}{\lambda_1}$，则选择 $p>a\sigma\sqrt{e}$ 且

$$\underline{W}(\xi)=1-\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right),\ \underline{W}(\xi+1)\ge 1-\left(e^{\lambda_3(\xi+1)}+pe^{\mu\lambda_3(\xi+1)}\right),$$

$$\underline{W}(\xi-1)=1-\left(e^{\lambda_3(\xi-1)}+pe^{\mu\lambda_3(\xi-1)}\right),\ \bar{U}=h_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi},\ \bar{V}=\sigma_2e^{\lambda_2\xi}.$$

则由计算得到

$$\begin{aligned}
L_3(\xi)\ge{}& d_3\left[-e^{\lambda_3(\xi+1)}-pe^{\mu\lambda_3(\xi+1)}-e^{\lambda_3(\xi-1)}-pe^{\mu\lambda_3(\xi-1)}+2e^{\lambda_3\xi}+2pe^{\mu\lambda_3\xi}\right]+c\left(\lambda_3e^{\lambda_3\xi}+\lambda_3pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)\\
&+r_3\left\{1-\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)\right\}\left\{\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)-bh_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}-b\sigma_2e^{\lambda_2\xi}\right\}\\
\ge{}&-e^{\lambda_3\xi}\left\{d_3\left(e^{\lambda_3}+e^{-\lambda_3}-2\right)-c\lambda_3-r_3\right\}-pe^{\mu\lambda_3\xi}\left\{d_3\left(e^{\mu\lambda_3}+e^{-\mu\lambda_3}-2\right)-c\mu\lambda_3-r_3\right\}\\
&-r_3\left\{\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)^2+bh_1(-\xi)e^{\lambda_1\xi}+b\sigma_2e^{\lambda_2\xi}\right\}
\end{aligned}$$

DOI: 10.12677/aam.2025.1410416

$$\ge e^{\mu\lambda_3\xi}\Big(p\left\{-d_3\left(e^{\mu\lambda_3}+e^{-\mu\lambda_3}-2\right)-c\mu\lambda_3-r_3\right\}$$
$$-r_3\left\{a\sigma e^{(1-\mu)\lambda_3\xi}+a\sigma p+bh_1(-\xi)e^{(\lambda_1-\mu\lambda_3)\xi}+b\sigma_2 e^{(\lambda_2-\mu\lambda_3)\xi}\right\}\Big)$$
$$:=e^{\mu\lambda_3\xi}g_3(\xi).$$

现选择 μ 使得 $0<\mu<\min\left\{\frac{\lambda_1}{2\lambda_3},\frac{\lambda_2}{\lambda_3},\alpha\right\}$，由于 $\alpha<\frac{\lambda_1}{2\lambda_3}$，则对于任意的 $\xi\le 0$，能得到

$$bh_1(-\xi)e^{(\lambda_1-\mu\lambda_3)\xi}\le bh_1(-\xi)e^{\mu\lambda_3\xi}\le\frac{bh_1}{\mu\lambda_3 e}.$$

若 $p>\max\left\{a\sigma\sqrt{e},\frac{r_3\left[a\sigma+bh_1/(\mu\lambda_3 e)+b\sigma_2\right]}{-\left[d_3\left(e^{\mu\lambda_3}+e^{-\mu\lambda_3}-2\right)-c\mu\lambda_3-(1-a\sigma)r_3\right]}\right\}$，则有 $g_3(\xi)\ge 0$。

最后我们证明 $L_1(\xi)\ge 0$。当 $\xi>\xi_1'$ 时，$\underline{U}(\xi)=0$，$\underline{U}(\xi+1)=0$，$\underline{U}(\xi-1)\ge 0$。则 $L_1(\xi)=0$。当 $\xi<\xi_1'$ 时，选择 $q_1>1$，使得

$$q_1>\frac{r_1h_1}{d_1\left(l_1e^{\lambda_1}+l_2e^{-\lambda_1}\right)}\left[h_1\left(\frac{7}{2\lambda_1 e}\right)^{7/2}+k\sigma_2\left(\frac{5}{2\lambda_2 e}\right)^{5/2}+a\left(\frac{5}{2\lambda_3 e}\right)^{5/2}+ap\left(\frac{5}{2\alpha\lambda_3 e}\right)^{5/2}\right].$$

$$\underline{U}(\xi)=\left[h_1(-\xi)-q_1(-\xi)^{1/2}\right]e^{\lambda_1\xi},\quad \underline{U}(\xi+1)\ge\left[h_1(-\xi-1)-q_1(-\xi-1)^{1/2}\right]e^{\lambda_1(\xi+1)},$$
$$\underline{U}(\xi-1)=\left[h_1(-\xi+1)-q_1(-\xi+1)^{1/2}\right]e^{\lambda_1(\xi-1)},\ \bar{V}=\sigma_2e^{\lambda_2\xi},\ \underline{W}\ge 1-\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right).$$

则得到

$$L_1(\xi)\ge d_1\left[-q_1(-\xi-1)^{1/2}e^{\lambda_1(\xi+1)}-q_1(-\xi+1)^{1/2}e^{\lambda_1(\xi-1)}+2q_1(-\xi)^{1/2}e^{\lambda_1\xi}\right]$$
$$-c\left[-q_1\lambda_1(-\xi)^{1/2}+\frac{1}{2}q_1(-\xi)^{-1/2}\right]e^{\lambda_1\xi}-r_1(a-1)q_1(-\xi)^{1/2}e^{\lambda_1\xi}$$
$$-r_1\left[h_1(-\xi)-q_1(-\xi)^{1/2}\right]^2e^{2\lambda_1\xi}-r_1kh_1\sigma_2(-\xi)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi}-r_1ah_1(-\xi)\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)$$
$$=d_1q_1(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_1\xi}\left[\left(\xi^2+\xi\sqrt{\xi^2+\xi}+\frac{1}{2}\xi\right)e^{\lambda_1}+\left(\xi^2+\xi\sqrt{\xi^2-\xi}+\frac{1}{2}\xi\right)e^{-\lambda_1}\right]$$
$$-r_1\left[h_1(-\xi)-q_1(-\xi)^{1/2}\right]^2e^{2\lambda_1\xi}-r_1kh_1\sigma_2(-\xi)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi}-r_1ah_1(-\xi)\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)$$
$$\ge(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_1\xi}\left\{\left[d_1q_1\left(l_1e^{\lambda_1}+l_2e^{-\lambda_1}\right)\right]-r_1h_1^2(-\xi)^{7/2}e^{\lambda_1\xi}-r_1kh_1\sigma_2(-\xi)^{5/2}e^{\lambda_2\xi}\right.$$
$$\left.-r_1ah_1(-\xi)^{5/2}\left(e^{\lambda_3\xi}+pe^{\mu\lambda_3\xi}\right)\right\}$$
$$\ge(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_1\xi}\left\{\left[d_1q_1\left(l_1e^{\lambda_1}+l_2e^{-\lambda_1}\right)\right]-r_1h_1^2\left(\frac{7}{2\lambda_1 e}\right)^{7/2}-r_1kh_1\sigma_2\left(\frac{5}{2\lambda_2 e}\right)^{5/2}\right.$$
$$\left.-r_1ah_1\left(\frac{5}{2\lambda_3 e}\right)^{5/2}-r_1ah_1p\left(\frac{5}{2\alpha\lambda_3 e}\right)^{5/2}\right\}$$
$$\ge 0.$$

2.2.2. $r_1d_1=r_2d_2$

当 $r_1d_1=r_2d_2$ 时，$d_i\left(e^{\lambda_i}+e^{-\lambda_i}-2\right)+r_i(a-1)=0$ 有一个正的二重根 $\lambda_i, i=1,2$。则有

$$c_* = d_1\left(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}\right) = d_2\left(e^{\lambda_2} + e^{-\lambda_2}\right).$$

接下来，我们将定义以下连续函数：

$$\bar{V}(\xi) = \begin{cases} \sigma_2, & \xi \ge -\dfrac{1}{\lambda_2}, \\ h_2(-\xi)e^{\lambda_2\xi}, & \xi \le -\dfrac{1}{\lambda_2}, \end{cases} \qquad \underline{V}(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \ge \xi_2', \\ \left[h_2(-\xi) - q_2(-\xi)^{1/2}\right]e^{\lambda_2\xi}, & \xi \le \xi_2', \end{cases}$$

其中 $h_2 = \sigma_2\lambda_2 e$，$\xi_2' = -\left(\dfrac{q_2}{h_2}\right)^2$，$q_2 > 1$。

与 $r_1d_1 > r_2d_2$ 的情形一样，若 $\mu, p, q_2 > 1$ 和 $q_1 > 1$ 满足以下条件：

$$0 < \mu < \min\left\{\frac{\lambda_1}{2\lambda_3}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \alpha\right\},$$

$$p > \max\left\{a\sigma\sqrt{e}, \frac{r_3\left[a\sigma + bh_1/(\mu\lambda_3 e) + b\sigma_2\right]}{-\left[d_3\left(e^{\mu\lambda_3} + e^{-\mu\lambda_3} - 2\right) - c\mu\lambda_3 - (1-a\sigma)r_3\right]}\right\},$$

$$q_1 > \frac{r_1h_1}{d_1\left(l_1e^{\lambda_1} + l_2e^{-\lambda_1}\right)}\left[h_1\left(\frac{7}{2\lambda_1 e}\right)^{7/2} + kh_2\left(\frac{5}{2\lambda_2 e}\right)^{5/2} + a\left(\frac{5}{2\lambda_3 e}\right)^{5/2} + ap\left(\frac{5}{2\alpha\lambda_3 e}\right)^{5/2}\right],$$

$$q_2 > \frac{r_2h_2}{d_2\left(l_1e^{\lambda_1} + l_2e^{-\lambda_1}\right)}\left[hh_1\left(\frac{7}{2\lambda_1 e}\right)^{7/2} + h_2\left(\frac{5}{2\lambda_2 e}\right)^{5/2} + a\left(\frac{5}{2\lambda_3 e}\right)^{5/2} + ap\left(\frac{5}{2\alpha\lambda_3 e}\right)^{5/2}\right].$$

则连续函数 $\varphi = \left(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}\right)$ 和 $\phi = \left(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}\right)$ 被称为系统(4)的一对上下解。

3. 行波解的存在性

在本节中，我们将应用 Schauder 不动点定理来推导系统(4)解的存在性。

引理 3.1： 对于给定的 $c > 0$，若 $\varphi = \left(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}\right)$ 和 $\phi = \left(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}\right)$ 是系统(4)的一对上下解且满足

$$0 \le \underline{U} \le \bar{U} \le a-1,\ \ 0 \le \underline{V} \le \bar{V} \le a-1,\ \ 0 \le \underline{W} \le \bar{W} \le 1,$$

则系统(4)有解 (U, V, W)，使得对所有的 $\xi \in \mathbb{R}$，有

$$\underline{U}(\xi) \le U(\xi) \le \bar{U}(\xi),\ \underline{V}(\xi) \le U(\xi) \le \bar{V}(\xi),\ \underline{W}(\xi) \le U(\xi) \le \bar{W}(\xi).$$

证明：令 X 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的连续函数空间，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，令

$$K = \left\{(U, V, W) \in \mathrm{X} \,\middle|\, \left(U(\xi), V(\xi), W(\xi)\right) \in [0, a-1] \times [0, a-1] \times [0,1]\right\}.$$

令 $\psi = (U, V, W)$，我们考虑定义 H_i 为

$$H_1[\psi] = \beta U(\xi) + d_1D_1[U](\xi) + r_1U(\xi)\left[-1 - U(\xi) - kV(\xi) + aW(\xi)\right],$$
$$H_2[\psi] = \beta V(\xi) + d_2D_1[V](\xi) + r_2V(\xi)\left[-1 - hU(\xi) - V(\xi) + aW(\xi)\right],$$
$$H_3[\psi] = \beta W(\xi) + d_3D_1[W](\xi) + r_3W(\xi)\left[1 - bU(\xi) - bV(\xi) - W(\xi)\right],$$

其中

$$\beta = \max\left\{2d_1 + r_1\left[1 + (2+k)(a-1)\right], 2d_2 + r_2\left[1 + (2+h)(a-1)\right], 2d_3 + r_3\left[1 + 2b(a-1)\right]\right\}.$$

我们接下来定义算子

$$G_i[\psi](\xi):=\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{\beta(\xi-y)/c}H_i[\psi](y)\mathrm{d}y,\xi\in\mathbb{R},\ i=1,2,3.$$

令 $G[\psi]:=(G_1[\psi],G_2[\psi],G_3[\psi])$，则 $G:K\to\mathrm{X}$，易知 (G_1,G_2,G_3) 满足系统(4)，因此还需要证明 G 有一个不动点。

令

$$\Gamma:=\left\{(U,V,W)\in Q\,\middle|\,\underline{U}(\xi)\le U(\xi)\le\bar{U}(\xi),\underline{V}(\xi)\le V(\xi)\le\bar{V}(\xi),\underline{W}(\xi)\le W(\xi)\le\bar{W}(\xi)\right\},\ \xi\in\mathbb{R}.$$

令 $\rho\in\left(0,\frac{\beta}{c}\right)$，定义超范数

$$B_\rho(\mathbb{R},\mathbb{R}^3):=\left\{\psi\in\mathrm{X}\,\middle|\,|\psi|_\rho<\infty\right\}.$$

$$|\psi|_\rho:=\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left\{\max\left(|U(\xi)|,|V(\xi)|,|W(\xi)|\right)e^{-\rho\xi}\right\},\psi\in\mathrm{X}.$$

易知 $\left(B_\rho(\mathbb{R},\mathbb{R}^3),|\psi|_\rho\right)$ 是 Banach 空间，且 Γ 是 $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ 关于衰减函数 $|\cdot|_\rho$ 的有界闭的非空凸子集。

首先，我们将证明 $G(\Gamma)\subset\Gamma$，令 $\psi\in\Gamma$，则由 β 的取值易知 $H_1[\psi](\xi)\ge H_1[\underline{U},\bar{V},\underline{W}](\xi)$，因此对所有的 $\xi\in\mathbb{R}$，有 $G_1[\psi](\xi)\ge G_1[\underline{U},\bar{V},\underline{W}](\xi)$。

$$\begin{aligned}G_1[\underline{U},\bar{V},\underline{W}](\xi)&=\frac{1}{c}\int_\xi^\infty e^{\beta(\xi-y)/c}H_1[\underline{U},\bar{V},\underline{W}](y)\mathrm{d}y\\&=\int_\xi^\infty e^{\beta(\xi-y)/c}\frac{H_1[\underline{U},\bar{V},\underline{W}](y)}{c}\mathrm{d}y\\&\ge\int_\xi^\infty e^{\beta(\xi-y)/c}e^{\beta(\xi-y)/c}\frac{-c\underline{U}'(y)+\beta\underline{U}(y)}{c}\mathrm{d}y\\&=\underline{U}(\xi),\end{aligned}$$

此外，根据上下解的定义以及 β 的选择，我们能够得到：

$$\begin{cases}\bar{U}\ge G_1[\bar{U},\underline{V},\bar{W}]\ge G_1[\psi]\ge G_1[\underline{U},\bar{V},\underline{W}]\ge\underline{U},\\\bar{V}\ge G_2[\underline{U},\bar{V},\bar{W}]\ge G_2[\psi]\ge G_2[\bar{U},\underline{V},\underline{W}]\ge\underline{V},\\\bar{W}\ge G_3[\underline{U},\underline{V},\bar{W}]\ge G_3[\psi]\ge G_3[\bar{U},\bar{V},\underline{W}]\ge\underline{W}.\end{cases}$$

因此 $G(\Gamma)\subset\Gamma$。

通过在文献[10]中的相似结论，算子 $G:\Gamma\to\Gamma$ 关于衰减函数 $|\cdot|_\rho$ 完全连续，则该引理通过 Schauder 不动点定理能够得到证明。

通过引理 2.1~2.1 和引理 3.1，我们得到以下定理。

定理 3.1： 当 $c\ge c^*$ 时，系统(4)存在有界正解 (U,V,W) 满足 $(U,V,W)(-\infty)=(0,0,1)$。

4. 尾部渐近行为

为了得到连接 $(0,0,1)$ 和 (u^*,v^*,w^*) 的行波解，即能推导出 (U,V,W) 的右尾极限满足 $(U,V,W)(\infty)=(u^*,v^*,w^*)$。为了得到波廓线的右尾极限，我们需要对 b 有更严格的限制。我们改变 σ 的范围使得

$$\sigma\in\left(\frac{2b(a-1)}{a},\min\{1-h,1-k\}(a-1)/a^2\right)\subset\left[\frac{2b(a-1)}{a},\frac{1}{a}\right).$$

在这个选择条件下，上文中构造的函数也为上下解且有 $w^*>1-a\sigma$。

引理 4.1： 令 $b_1 := (a-1)(1-k) - a^2\sigma$， $b_2 := (a-1)(1-h) - a^2\sigma$， 则 $U \ge b_1$， $V \ge b_2$。

证明：我们首先考虑(4)中的第一个等式有 $(u,v,w)(x,t) = (U,V,W)(x+ct)$，其中 $w(x,t) = W \ge 1-a\sigma$，$v(x,t) = V \le \sigma_2$，因此 $u(x,t) = U$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} \ge d_1 D_1[U](x,t) + r_1 U(-1-k\sigma_2 + a(1-a\sigma) - U), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = U(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

因为 $-1-k\sigma_2 + a(1-a\sigma) = (a-1)(1-k) - a^2\sigma =: b_1$，由其中由 σ 的选择知 $b_1 > 0$，所以由比较原理得到

$$U^- := \liminf_{\xi \to +\infty} U(\xi) = \liminf_{\xi \to +\infty} U\left(0, \frac{\xi}{c}\right) \ge b_1 > 0.$$

同理，我们也能得到 $V^- \ge b_2 > 0$。

受文献[10]的影响，我们接下来研究 (U,V,W) 在 ∞ 处的渐近性，定义如下函数：

$$\begin{aligned} m_1(\theta) &= \theta u^* + (1-\theta)(b_1 - \varepsilon), \quad M_1(\theta) = (1-\theta)(\sigma_1 + \varepsilon) + \theta u^*, \\ m_2(\theta) &= \theta v^* + (1-\theta)(b_2 - \varepsilon), \quad M_2(\theta) = (1-\theta)(\sigma_2 + \varepsilon) + \theta v^*, \\ m_3(\theta) &= \theta w^* + (1-\theta)(b_3 - \varepsilon), \quad M_3(\theta) = (1-\theta)(1 + \varepsilon^2) + \theta w^*, \end{aligned}$$

其中 ε 是足够小的正常数使得

$$\varepsilon \le \min\left\{\frac{1-h}{a}, \frac{1-k}{a}, \frac{a\sigma - 2b(a-1)}{2b}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right\}.$$

由此得出 $m_i(\theta)$ 关于 $\theta \in [0,1]$ 递增， $M_i(\theta)$ 关于 $\theta \in [0,1]$ 递减， 且

$$m_1(1) = M_1(1) = u^*, \ m_2(1) = M_2(1) = v^*, \ m_3(1) = M_3(1) = w^*.$$

令

$$\begin{aligned} U^+ &= \limsup_{\xi \to \infty} U(\xi), \quad U^- = \liminf_{\xi \to \infty} U(\xi) \ge b_1 > 0, \\ V^+ &= \limsup_{\xi \to \infty} V(\xi), \quad V^- = \liminf_{\xi \to \infty} V(\xi) \ge b_2 > 0, \\ W^+ &= \limsup_{\xi \to \infty} W(\xi), \quad W^- = \liminf_{\xi \to \infty} W(\xi) \ge b_3 > 0. \end{aligned}$$

对 $\theta = 0$ 时，以下结论显然成立：

$$\begin{aligned} m_1(\theta) &< U^- \le U^+ < M_1(\theta), \\ m_2(\theta) &< V^- \le V^+ < M_2(\theta), \\ m_3(\theta) &< W^- \le W^+ < M_3(\theta). \end{aligned} \tag{6}$$

则 $\bar{\theta} := \sup\{\theta \in [0,1) : (6)\text{成立}\} \in (0,1]$ 是良好定义的。因此若我们能证明 $\bar{\theta} = 1$。则能得出结论 $(U,V,W)(\infty) = (u^*, v^*, w^*)$。

下证 $\bar{\theta} = 1$。

若 $\bar{\theta} < 1$，通过 $\theta \to \bar{\theta}$ 的极限，我们有

$$\begin{aligned} m_1(\bar{\theta}) &\le U^- \le U^+ \le M_1(\bar{\theta}), \\ m_2(\bar{\theta}) &\le V^- \le V^+ \le M_2(\bar{\theta}), \\ m_3(\bar{\theta}) &\le W^- \le W^+ \le M_3(\bar{\theta}). \end{aligned}$$

然而由于$\bar{\theta}$的定义及$m_i\left(\bar{\theta}\right), M_i\left(\bar{\theta}\right)$的连续性，这意味着下列等式中至少有一个成立：

$$U^- = m_1\left(\bar{\theta}\right),\ \ U^+ = M_1\left(\bar{\theta}\right),$$
$$V^- = m_2\left(\bar{\theta}\right),\ \ V^+ = M_2\left(\bar{\theta}\right),$$
$$W^- = m_1\left(\bar{\theta}\right),\ \ W^+ = M_3\left(\bar{\theta}\right).$$

首先我们假设若$U^- = m_1\left(\bar{\theta}\right)$成立，若$U$是最终单调，则$U(\infty)$存在.故$\limsup_{\xi\to\infty} U'(\xi)=0$或$\liminf_{\xi\to\infty} U'(\xi)=0$。由此可见存在一个序列$\{\xi_n\}$，$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\infty$使得

$$\lim_{n\to\infty} U'(\xi_n)=0,\ \ \lim_{n\to\infty} U(\xi_n)=m_1\left(\bar{\theta}\right).$$

因为

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\left[-1-U(\xi_n)-kV(\xi_n)+aW(\xi_n)\right]\\
&\ge -1-\lim_{n\to\infty}U(\xi_n)-k\limsup_{n\to\infty}V(\xi_n)+a\liminf_{n\to\infty}W(\xi_n)\\
&\ge -1-m_1\left(\bar{\theta}\right)-kM_2\left(\bar{\theta}\right)+am_3\left(\bar{\theta}\right)\\
&\ge \left(1-\bar{\theta}\right)\left[\varepsilon\left(1-k-a\varepsilon\right)\right]\\
&>0.
\end{aligned}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
0 &= -c\liminf_{n\to\infty}U'(\xi_n)\\
&\ge \liminf_{n\to\infty} d_1D[U](\xi_n)+\liminf_{n\to\infty} r_1U(\xi_n)\left[-1-U(\xi_n)-kV(\xi_n)+aW(\xi_n)\right]\\
&>0,
\end{aligned}$$

则得到矛盾。

另一方面若U是振荡的，则可以选择U的局部最小值序列$\{\xi_n\}$，其中$n\to\infty$时$\xi_n\to\infty$使得对所有的n有

$$U'(\xi_n)=0,\ \ \lim_{n\to\infty}U(\xi_n)=m_1\left(\bar{\theta}\right)。$$

与上述类似我们可以得到同样的矛盾。因此$U^- = m_1\left(\bar{\theta}\right)$不能成立，与上述类似其他等式也不能成立。

5. 最小波速

在证明最小波速前，我们首先给出以下引理。

引理 5.1：若(c,U,V,W)是系统(4)的解使得$U,V,W\ge 0$，则(U,V,W)在$\mathbb{R}$上是正的且$c>0$。

证明：首先我们证明在$\mathbb{R}$上$U>0$。

因为$U(+\infty)=u^*$，我们能找到ξ_0使得$U(\xi_0)=0$，对所有的$\xi>\xi_0$，有$U(\xi)>0$。

另一方面，由于$U\ge 0$，则$U'(\xi_0)=0$. 通过系统(4)的第一个等式，我们能得到

$$U(\xi_0+1)=U(\xi_0-1)=0,$$

故矛盾。故对所有的$\xi\in\mathbb{R}$有$U(\xi)>0$。

同理我们对所有的$\xi\in\mathbb{R}$能得到$V(\xi)>0$，$W(\xi)>0$。

下证$c>0$。

因为$\lim_{\xi\to-\infty}(U,V,W)=(0,0,1)$，存在足够大的$N$，对$\forall\xi\le -N$使得

$$-1-U(\xi)-kV(\xi)+aW(\xi)\geq\frac{a-1}{2}.$$

对(4)的第一个等式从 $-\infty$ 到 $\xi<-N$ 积分，能得到：

$$cU(\xi)=d_1\left[\int_{\xi}^{\xi+1}U(\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{\xi-1}^{\xi}U(\theta)\mathrm{d}\theta\right]+\int_{-\infty}^{\xi}r_1U(\theta)\left[-1-U(\theta)-kV(\theta)+aW(\theta)\right]\mathrm{d}\theta. \quad (7)$$

则有：

$$\begin{aligned}|c|+2d\geq cU(\theta)-d_1\left[\int_{\xi}^{\xi+1}U(\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{\xi-1}^{\xi}U(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\\=\int_{-\infty}^{\xi}r_1U(\theta)\left[-1-U(\theta)-kV(\theta)+aW(\theta)\right]\mathrm{d}\theta\\=\frac{a-1}{2}\int_{-\infty}^{\xi}U(\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

令 $I(\xi)=\int_{-\infty}^{\xi}U(\theta)\mathrm{d}\theta$，在 $\xi<-N$ 是良好定义的，且 $I(\xi)$ 在 $(-\infty,-N)$ 上是递增的。

对(7)从 $-\infty$ 到 $\chi<-N$ 积分，能得到：

$$cI(\chi)=d_1\left[\int_{\chi}^{\chi+1}I(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{\chi-1}^{\chi}I(\xi)\mathrm{d}\xi\right]+\int_{-\infty}^{\chi}\int_{-\infty}^{\xi}r_1U(\theta)\left[-1-U(\theta)-kV(\theta)+aW(\theta)\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi>0. \quad (8)$$

则 $c>0$.

下一个定理我们将给出波速的最小值.

定理 5.1： 若 (c,U,V,W) 是系统(4)的解使得 $U,V,W\geq0$，则 $c\geq c^*$。

证明：设 (c,U,V,W) 是系统(4)的正解。

令

$$z(\xi)=\frac{U(\xi)}{U'(\xi)},\ \ B(\xi)=r_1\left[-1-U(\xi)-kV(\xi)+aW(\xi)\right]-2d_1.$$

则由

$$-cU'(\xi)=d_1D_1[U](\xi)+r_1U(\xi)\left[-1-U(\xi)-kV(\xi)+aW(\xi)\right],$$

可知：

$$cz(\xi)=d_1\left[\mathrm{e}^{\int_{\xi}^{\xi+1}z(s)\mathrm{d}s}+\mathrm{e}^{-\int_{\xi-1}^{\xi}z(s)\mathrm{d}s}\right]+B(\xi).$$

则从文献[15]知道 $\omega:=\lim\limits_{\xi\to-\infty}z(\xi)$ 存在且满足 $c\omega=d\left(\mathrm{e}^{\omega}+\mathrm{e}^{-\omega}-2\right)+r_1(a-1)$。

因此由 c^* 的定义知 $c\geq c^*$。

6. 结论

本文的数学结果揭示了双捕食者－单食饵离散扩散系统中入侵动力学的严格规律，其结论可为生物入侵防控与生态系统管理提供理论依据。首先，行波解的存在性及其最小波速 c^* 的确定，从数学上描述了捕食者成功入侵的临界条件：只有当入侵速度不低于 c^* 时，捕食者种群才能建立起从无到有、并最终达到共存状态的空间波前，从而实现成功定殖。这些结论与多项实际入侵案例相一致。例如，在外来天敌引入以控制害虫的生态工程中，天敌的扩散能力与捕食效率直接决定其是否能够成功建立地理种群并持续扩散。若其传播速度低于该生态系统中的临界波速，则引入可能失败。类似地，在保护生物学中，理解强势外来捕食者(如入侵鱼类或节肢动物)的传播机制，有助于早期预警和拦截策略的制定，通过降低

其有效扩散率或提高其死亡率，可使实际传播速度低于最小波速，从而阻止入侵。

本文所建立的格上模型特别适用于描述生境碎片化情形下的生物入侵，如农林生态系统、保护区网络及城市生境斑块等离散环境。相较于连续模型，离散框架能更准确地捕捉跳跃式传播与栖息地边界效应，从而为入侵路线预测和拦截点布设提供更精细的决策支持。

参考文献

[1] Bates, P.W., Fife, P.C., Ren, X. and Wang, X. (1997) Traveling Waves in a Convolution Model for Phase Transitions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **138**, 105-136. https://doi.org/10.1007/s002050050037

[2] Keener, J.P. (1987) Propagation and Its Failure in Coupled Systems of Discrete Excitable Cells. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **47**, 556-572. https://doi.org/10.1137/0147038

[3] Chen, Y.Y., Guo, J.S. and Hamel, F. (2016) Traveling Waves for a Lattice Dynamical System Arising in a Diffusive Endemic Model. *Nonlinearity*, **30**, 2334-2359. https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa6b0a

[4] San, Z.C. (2019) Traveling Waves for a Two-Group Epidemic Model with Latent Period in a Patchy Environment. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **475**, 1502-1531. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.03.029

[5] Xu, R. and Chen, L. (2000) Persistence and Stability for a Two-Species Ratio-Dependent Predator-Prey System with Time Delay in a Two-Patch Environment. *Computers & Mathematics with Applications*, **40**, 577-588. https://doi.org/10.1016/s0898-1221(00)00181-4

[6] Ai, S., Du, Y. and Peng, R. (2017) Traveling Waves for a Generalized Holling-Tanner Predator-Prey Model. *Journal of Differential Equations*, **263**, 7782-7814. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.08.021

[7] Zhang, T. and Jin, Y. (2017) Traveling Waves for a Reaction-Diffusion-Advection Predator-Prey Model. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **36**, 203-232. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.01.011

[8] Dong, F.D., Li, W.T. and Zhang, G.B. (2019) Invasion Traveling Wave Solutions of a Predator-Prey Model with Nonlocal Dispersal. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **79**, Article 104926. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104926

[9] Zhao, M., Ma, Z. and Yuan, R. (2022) The Spreading Speed and the Existence of Planar Waves for a Class of Predator-Prey System with Nonlocal Diffusion. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **26**, 381-410. https://doi.org/10.11650/tjm/211001

[10] Chen, Y.Y., Guo, J.S. and Yao, C.H. (2017) Traveling Wave Solutions for a Continuous and Discrete Diffusive Predator-Prey Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **445**, 212-239. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.07.071

[11] Tian, Z. and Zhang, L. (2024) Traveling Wave Solutions for a Continuous and Discrete Diffusive Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **23**, Article No. 253. https://doi.org/10.1007/s12346-024-01116-7

[12] Huang, Y. and Lin, G. (2014) Traveling Wave Solutions in a Diffusive System with Two Preys and One Predator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **418**, 163-184. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.03.085

[13] Chen, Y.S. and Guo, J.S. (2021) Traveling Wave Solutions for a Three-Species Predator-Prey Model with Two Aborigine Preys. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **38**, 455-471. https://doi.org/10.1007/s13160-020-00445-9

[14] Guo, J.S., Nakamura, K.I., Ogiwara, T., *et al*. (2020) Traveling Wave Solutions for a Predator-Prey System with Two Predators and One Prey. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **54**, Article 103111. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103111

[15] Chen, X. and Guo, J.S. (2003) Uniqueness and Existence of Traveling Waves for Discrete Quasilinear Monostable Dynamics. *Mathematische Annalen*, **326**, 123-146. https://doi.org/10.1007/s00208-003-0414-0