Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(10), 31-47
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1410417

格上三物种Lotka-Volterra竞争系统的行波

廖 怡[1,2]

[1]长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙
[2]长沙理工大学工程数学建模与分析湖南省重点实验室，湖南 长沙

收稿日期：2025年8月25日；录用日期：2025年9月19日；发布日期：2025年9月26日

摘 要

本文考虑三物种之间均存在竞争关系的格上Lotka-Volterra竞争系统行波的存在性，主要研究两个外来物种入侵一个弱本土物种和一个外来物种入侵两个弱本土物种这两种情况。首先，在构造上下解的帮助下，利用Schauder不动点定理证明了行波解的存在性；其次，采用压缩矩形法验证了在负无穷远处的稳定波尾极限；最后，通过反证法证明了在某些条件下行波的不存在性。

关键词

Lotka-Volterra竞争系统，Schauder不动点定理，压缩矩形法，行波解

Traveling Waves for a Three Species Lotka-Volterra Competition System on the Lattice

Yi Liao[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
[2]Hunan Provincial Key Laboratory of Mathematical Modeling and Analysis in Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: August 25, 2025; accepted: September 19, 2025; published: September 26, 2025

Abstract

The work is concerned with the existence of two types of traveling waves for Lotka-Volterra competitive system on the lattice with competition among three species. We examine the cases of two alien species invading one weak native species and one alien species invading two weak native species. Firstly, the existence of traveling waves is proved by Schauder's fixed point theorem with the

文章引用: 廖怡. 格上三物种 Lotka-Volterra 竞争系统的行波[J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 31-47.
DOI: 10.12677/aam.2025.1410417

help of constructing upper-lower solutions. Secondly, using the method of the contracting rectangles, we derive the stable wave tail limit at negative infinity. Finally, the nonexistence of travelling waves is proved under certain conditions.

Keywords

Lotka-Volterra Competition System, Schauder's Fixed Point Theorem, Contracting Rectangles, Traveling Waves

1. 引言

本文研究以下格上三物种 Lotka-Volterra 竞争系统(简称 L-V 竞争系统):

$$\begin{cases} u_j'(t)=d_1D_2\left[u_j\right](t)+r_1u_j(t)\left(1-u_j(t)-a_2v_j(t)-a_3w_j(t)\right), j\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{R},\\ v_j'(t)=d_2D_2\left[v_j\right](t)+r_2v_j(t)\left(1-b_1u_j(t)-v_j(t)-b_3w_j(t)\right), j\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{R},\\ w_j'(t)=d_3D_2\left[w_j\right](t)+r_3w_j(t)\left(1-c_1u_j(t)-c_2v_j(t)-w_j(t)\right), j\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{R},\end{cases} \tag{1}$$

其中，$D_2\left[z_j\right](t)=z_{j+1}(t)+z_{j-1}(t)-2z_j(t), z_j=u_j,v_j,w_j$。函数 $u_j(t),v_j(t),w_j(t)$ 分别表示在空间位置 j 时刻 t 的物种密度；$d_i(i=1,2,3)$ 代表物种的扩散系数；$r_i(i=1,2,3)$ 代表物种的内禀增长率；a_2,a_3,b_1,b_3,c_1,c_2 代表种群间的竞争系数；所有参数都是正常数，且每个物种的承载能力为 1。

在生态学研究中，多物种入侵过程不仅对生物多样性的维持与生态系统稳定性具有深远影响，还在生物保护与入侵物种管理中具有重要的现实意义。随着人类活动加剧和全球气候变化，物种的迁移与竞争格局发生了显著变化，理解多个物种在空间中的竞争共存机制，对于预测生物多样性变化、制定自然保护策略以及防控外来物种侵害尤为关键。传统的连续模型通常基于微分方程在均匀空间中对种群动态进行建模，难以捕捉真实生境中普遍存在的空间异质性和离散化特征，如栖息地碎片化、局部扩散限制等。相比之下，晶格模型通过将空间划分为离散单元，能够更直观地体现个体在斑块环境中的迁移、竞争与适应过程，从而更好地模拟实际生态系统中行波的形成与传播动态。本文研究格上的三物种 Lotka-Volterra 竞争系统，旨在从理论层面揭示多物种竞争互动的空间波形特征，也为理解真实生态系统中物种的共存与更替模式提供更具现实意义的见解。

近年来，具有局部(以拉普拉斯算子为代表)和非局部(以卷积算子为代表)扩散的三物种竞争系统因其比两物种竞争系统具有更加复杂的动力学行为而受到广泛关注[1]-[10]。2015 年 Guo 等人[2]研究了下列扩散的三物种竞争系统行波解的最小速度:

$$\begin{cases} u_t=d_1u_{xx}+r_1u\left(1-u-b_{12}v\right), x,t\in\mathbb{R},\\ v_t=d_2v_{xx}+r_2v\left(1-b_{21}u-v-b_{23}w\right), x,t\in\mathbb{R},\\ w_t=d_3w_{xx}+r_3w\left(1-b_{32}v-w\right), x,t\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{2}$$

作者主要关心的是最小速度的线性确定性，给出了竞争系统参数的若干条件，保证了竞争系统的线性确定性。其中，通过将系统(2)转化为一个单调系统(合作系统)，应用单调迭代方法，证明了连接(1, 0, 1)和(0, 1, 0)行波解的存在性。进一步，Guo 等人在文献[3]考虑具有两个弱土著竞争者和一个强外来竞争者的局部三物种竞争系统，研究了以下扩散的 L-V 竞争系统:

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + r_1 u\left(1 - u - a_2 v - a_3 w\right), x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v_t = dv_{xx} + r_2 v\left(1 - b_1 u - v - b_3 w\right), x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w_t = dw_{xx} + r_3 w\left(1 - c_1 u - c_2 v - w\right), x \in \mathbb{R}, t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

由于系统(3)的反应项比系统(2)更复杂，不能直接转化为合作系统，因此作者利用 Schauder 不动点定理证明了连接$\left(0, v_c, w_c\right)$和(1, 0, 0)行波的存在性，其中，$v_c := \dfrac{1-b_3}{1-b_3 c_2}, w_c := \dfrac{1-c_2}{1-b_3 c_2}$。并且通过收缩矩形法推导出稳定波尾极限。研究结果表明，强大的外来竞争对手将消灭本土的两个弱竞争对手。随后，Karen Guo [4]在文献[3]的基础上研究了两个外来物种入侵单个弱本土物种和单个外来物种入侵两个弱本土物种两种情况行波的存在性和不存在性。

由于生态系统中的某些生物可以移动一定距离，它们的运动和相互作用可能发生在不相邻的空间位置之间[6]-[12]，所以 2019 年 Dong Fang-Di 等人[6]利用截断问题的极限论证，研究了下列具有非局部各向异性扩散的三物种竞争模型行波的存在性和单调性：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = J_1 * u - u + r_1 u\left(1 - u - b_2 v\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = J_2 * v - v + r_2 v\left(1 - b_1 u - v - b_3 w\right), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = J_3 * w - w + r_3 w\left(1 - b_2 v - w\right), \end{cases} \tag{4}$$

其中，卷积算子$\left(J * \chi\right)\left(x, t\right) = \int_{\mathbb{R}} J\left(x - y\right)\chi\left(y, t\right)\mathrm{d}y, \chi = u, v, w$。进一步，Wang 等人[10]采用上述[3]类似的方法研究了具有非局部扩散的三物种竞争系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1\left(J * u - u\right) + r_1 u\left(1 - u - a_2 v - a_3 w\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2\left(J * v - v\right) + r_2 v\left(1 - b_1 u - v - b_3 w\right), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = d_3\left(J * w - w\right) + r_3 w\left(1 - c_1 u - c_2 v - w\right). \end{cases} \tag{5}$$

在文献[10]中，作者同样考虑了文献[4]中的两种情况。结果表明，一个强的外来竞争物种可以消灭其他两个物种，或者三个弱竞争物种可以共存。

在生物学的背景下，晶格微分方程可以用来研究一个物种在由无限多个斑块组成的栖息地中的空间传播。因此，对于聚集分散，晶格动力系统模型(简称为 LDS 模型)比连续模型更适合描述物种间竞争现象[13]-[16]。Guo 等人[16]考虑以下三分量格上动力系统：

$$\begin{cases} u_j'\left(t\right) = d_1 D_2\left[u_j\right]\left(t\right) + r_1 u_j\left(t\right)\left[1 - u_j\left(t\right) - b_2 v_j\left(t\right)\right], j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}, \\ v_j'\left(t\right) = d_2 D_2\left[v_j\right]\left(t\right) + r_2 v_j\left(t\right)\left[1 - b_1 u_j\left(t\right) - v_j\left(t\right) - b_3 w_j\left(t\right)\right], j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}, \\ w_j'\left(t\right) = d_3 D_2\left[w_j\right]\left(t\right) + r_3 w_j\left(t\right)\left[1 - b_2 v_j\left(t\right) - w_j\left(t\right)\right], j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{6}$$

其中，$D_2\left[z_j\right]\left(t\right) = z_{j+1}\left(t\right) + z_{j-1}\left(t\right) - 2z_j\left(t\right), z_j = u_j, v_j, w_j$。

对于三物种 L-V 竞争系统，由于竞争强度、扩散率、环境异质性等因素对行波解稳定性和波速的影响，行波解的构造与分析变得困难，因此对其行波解存在性的研究相对较少，尤其对于离散空间中三物种 L-V 竞争系统行波解的研究。而研究格上三物种 L-V 竞争系统的行波具有深刻的生物学意义。它不仅有助于理解物种间的竞争与入侵动态，还为生态系统的稳定性、恢复以及多物种共存提供了理

论框架。因此，对系统(6)进行推广，研究三物种之间均存在竞争关系的格上三物种 L-V 竞争系统(1)的行波解。

将 $\left(u_j(t),v_j(t),w_j(t)\right)=\left(U(\xi),V(\xi),W(\xi)\right),\xi:=j-ct$ 代入系统(1)得到

$$\begin{cases} d_1\mathcal{D}_2[U](\xi)+cU'(\xi)+r_1U(\xi)\left[1-U(\xi)-a_2V(\xi)-a_3W(\xi)\right]=0,\xi\in\mathbb{R}, \\ d_2\mathcal{D}_2[V](\xi)+cV'(\xi)+r_2V(\xi)\left[1-b_1U(\xi)-V(\xi)-b_3W(\xi)\right]=0,\xi\in\mathbb{R}, \\ d_3\mathcal{D}_2[W](\xi)+cW'(\xi)+r_3W(\xi)\left[1-c_1U(\xi)-c_2V(\xi)-W(\xi)\right]=0,\xi\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{7}$$

其中，对于函数 $Z=Z(\xi),\xi\in\mathbb{R},\mathcal{D}_2[Z](\xi):=Z(\xi+1)+Z(\xi-1)-2Z(\xi)$。

在本文中，受文献[4] [10]的启发，我们考虑下述两种情况：两个外来物种入侵一个弱本地物种，需证明满足 $(U,V,W)(+\infty)=(0,0,1)$ 行波解的存在性；一个外来物种入侵了两个弱小的本地物种，转化为证明满足 $(U,V,W)(+\infty)=(0,v_c,w_c)$ 行波解的存在性。

为了简化计算，假设所有物种都具有相同的扩散系数，即

(H) $d_1=d_2=d_3$。

考虑系统(1)对应的齐次方程组，易证其有以下四个平衡点

$$e_0:=(0,0,0),e_1:=(1,0,0),e_2:=(0,1,0),e_3:=(0,0,1),$$

其中，e_0 是不稳定的；当 $b_1<1$ 或 $c_1<1$ 时，e_1 是不稳定的；当 $a_2<1$ 或 $c_2<1$ 时，e_2 是不稳定的；当 $a_3<1$ 或 $b_3<1$ 时，e_3 是不稳定的。当 $b_3<1$ 且 $c_2<1$，对应的齐次方程组系统存在半共存状态 $e_c^u:=(0,v_c,w_c)$，其中，

$$v_c:=\frac{1-b_3}{1-b_3c_2}\in(0,1),w_c:=\frac{1-c_2}{1-b_3c_2}\in(0,1).$$

当 $\alpha:=1-a_2v_c-a_3w_c>0$ 即 $a_2+a_3<1$ 时，e_c^u 是不稳定。类似地，当 $b_1+b_3<1$ 时，存在不稳定的半共存状态 e_c^v；当 $c_1+c_2<1$ 时，存在不稳定的半共存状态 e_c^w。当 $a_2+a_3<1,b_1+b_3<1,c_1+c_2<1$ 时，对应的齐次方程组系统存在共存状态 $e_*:=(u_*,v_*,w_*),u_*,v_*,w_*\in(0,1)$，且 e_* 是稳定的。

本文主要由以下部分组成。第二部分，通过构造恰当的上下解，证明了两种在正无穷远处行波解的存在性；第三部分，利用压缩矩形法，证明了两种在负无穷远处行波解的存在性；第四部分，通过矛盾论证，验证了在某些条件下行波解的不存在性。

2. 行波在正无穷远处的存在性

该部分将构造不同的上下解，利用 Schauder 不动点定理，分别证明系统(7)在 $+\infty$ 处两类不同行波解的存在性，即 $(U,V,W)(+\infty)=(0,0,1)$，$(U,V,W)(+\infty)=(0,v_c,w_c)$。

首先，给出上下解的定义。为了简化符号，定义

$$\mathcal{L}_1(U,V,W)(\xi):=\mathcal{D}_2[U](\xi)+cU'(\xi)+r_1U(\xi)\left[1-U(\xi)-a_2V(\xi)-a_3W(\xi)\right],$$

$$\mathcal{L}_2(U,V,W)(\xi):=\mathcal{D}_2[V](\xi)+cV'(\xi)+r_2V(\xi)\left[1-b_1U(\xi)-V(\xi)-b_3W(\xi)\right],$$

$$\mathcal{L}_3(U,V,W)(\xi):=\mathcal{D}_2[W](\xi)+cW'(\xi)+r_3W(\xi)\left[1-c_1U(\xi)-c_2V(\xi)-W(\xi)\right].$$

定义 2.1 若存在集合 $\mathbb{E}=\{E_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,m\}$，使得对任意 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{E}$，$\bar{\Phi}'',\bar{\Phi}',\underline{\Phi}'',\underline{\Phi}'$ 有界，其中，$\bar{\Phi}:=(\bar{U},\bar{V},\bar{W}),\underline{\Phi}:=(\underline{U},\underline{V},\underline{W})$，且满足

$$\mathcal{L}_1(\bar{U},\underline{V},\underline{W})(\xi)\le 0,\mathcal{L}_2(\underline{U},\bar{V},\underline{W})(\xi)\le 0,\mathcal{L}_3(\underline{U},\underline{V},\bar{W})(\xi)\le 0, \tag{8}$$

$$\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\geq 0,\mathcal{L}_2\left(\bar{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\geq 0,\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\geq 0, \tag{9}$$

则称连续函数 $\bar{\Phi}$ 和 $\underline{\Phi}$ 分别为系统(7)的一对上下解。

利用 Schauder 不动点定理(如[3] [10] [17])，可以得到以下关于行波存在性的结果，在这里省略它的证明。

命题 2.2 令 $c>0$。假设系统(7)存在一对上下解 $\left(\bar{U},\bar{V},\bar{W}\right)$ 和 $\left(\underline{U},\underline{V},\underline{W}\right)$，使得

(1) $\underline{T}<\bar{T},T=U,V,W$，

(2) $\lim\limits_{\xi\to\xi^+}\bar{T}'(\xi)\leq\lim\limits_{\xi\to\xi^-}\bar{T}'(\xi),\lim\limits_{\xi\to\xi^-}\underline{T}'(\xi)\leq\lim\limits_{\xi\to\xi^+}\underline{T}'(\xi),\xi\in\mathbb{E},T=U,V,W$.

则系统(7)存在一个解 (U,V,W)，使得 $\underline{T}\leq T\leq\bar{T},T=U,V,W$。

2.1. 满足 $(U,V,W)(+\infty)=(0,0,1)$ 的行波

定理 2.3 令 $c^*:=\inf\limits_{\lambda>0}\dfrac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2+r_1(1-a_3)}{\lambda}$。假设

$$a_3<1,b_3<1,r_1(1-a_3)=r_2(1-b_3)\geq r_3(c_1+c_2-1). \tag{10}$$

则当 $c\geq c^*$ 时，系统(7)存在一个正解 (U,V,W) 满足 $(U,V,W)(+\infty)=(0,0,1)$。

首先，证明 $c>c^*$ 时，系统(7)满足 $(U,V,W)(+\infty)=(0,0,1)$ 行波的存在性。

定义

$$\Lambda_1(\lambda,c):=\left(e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2\right)-c\lambda+r_1(1-a_3). \tag{11}$$

对于 $c>c^*$，设 λ_1 和 $\lambda_2\,(\lambda_1<\lambda_2)$ 为方程 $\Lambda_1(\lambda,c)=0$ 的两个正解，使得对于所有的 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2),\Lambda_1(\lambda,c)<0$。

定义

$$\bar{U}(\xi)=\begin{cases}e^{-\lambda_1\xi}, & \xi>0,\\ 1, & \xi\leq 0,\end{cases}\quad \underline{U}(\xi)=\begin{cases}e^{-\lambda_1\xi}-k_1e^{-\mu_1\xi}, & \xi>\xi_1,\\ 0, & \xi\leq\xi_1,\end{cases} \tag{12}$$

$$\bar{V}(\xi)=\begin{cases}e^{-\lambda_1\xi}, & \xi>0,\\ 1, & \xi\leq 0,\end{cases}\quad \underline{V}(\xi)=\begin{cases}e^{-\lambda_1\xi}-k_2e^{-\mu_1\xi}, & \xi>\xi_2,\\ 0, & \xi\leq\xi_2,\end{cases} \tag{13}$$

$$\bar{W}(\xi)=1,\quad \underline{W}(\xi)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1\xi}, & \xi>0,\\ 0, & \xi\leq 0,\end{cases} \tag{14}$$

其中，$\mu_1\in\left(\lambda_1,\min\{\lambda_2,2\lambda_1\}\right),\xi_i:=\dfrac{\ln k_i}{\mu_1-\lambda_1}>0\,(i=1,2),k_i\,(i=1,2)$ 均为常数且满足

$$k_1>\max\left\{1,\frac{r_1(1+a_2)}{-\Lambda_1(\mu_1,c)}\right\},k_2>\max\left\{1,\frac{r_2(1+b_1)}{-\Lambda_1(\mu_1,c)}\right\}. \tag{15}$$

下面通过引理来验证上述定义的函数(12)~(14)是系统(7)的上下解。

引理 2.4 对给定的 $c>c^*$，假设(10)成立。则定义在(12)-(14)的函数是系统(7)的一对上下解。

证明 当 $\xi>0$ 时，有 $\bar{U}(\xi-1)\leq e^{-\lambda_1(\xi-1)}$，$\bar{U}'(\xi)=-\lambda_1e^{-\lambda_1\xi}$。则根据 $\Lambda_1(\lambda_1,c)=0$，可得

$$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\leq e^{-\lambda_1\xi}\left[\left(e^{-\lambda_1}+e^{\lambda_1}-2\right)-c\lambda_1+r_1(1-a_3)\right]+r_1e^{-\lambda_1\xi}\left[-e^{-\lambda_1\xi}-a_2\underline{V}(\xi)+a_3e^{-\lambda_1\xi}\right]\leq 0,$$

当 $\xi<0$ 时，有 $\bar{U}(\xi+1)\leq 1$。根据 $\underline{V}(\xi),\underline{W}(\xi)\geq 0$，易证 $\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\leq r_1\left[-a_2\underline{V}(\xi)-a_3\underline{W}(\xi)\right]\leq 0$。因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\leq 0$。类似地，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$\mathcal{L}_2\left(\underline{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\leq 0$。

DOI: 10.12677/aam.2025.1410417

由于 $\mathcal{L}_3(\underline{U},\underline{V},\bar{W})(\xi)=r_3\left[-c_1\underline{U}(\xi)-c_2\underline{V}(\xi)\right]$ 且 $\underline{U}(\xi),\underline{V}(\xi)\geq 0$，因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}$，$\mathcal{L}_3(\underline{U},\underline{V},\bar{W})(\xi)\leq 0$。

当 $\xi>\xi_1$ 时，有 $\underline{U}(\xi-1)\geq e^{-\lambda_1(\xi-1)}-k_1e^{-\mu_1(\xi-1)}$，$\underline{U}'(\xi)=-\lambda_1e^{-\lambda_1\xi}+\mu_1k_1e^{-\mu_1\xi}$。则根据 $\Lambda_1(\lambda_1,c)=0$ 和(15)式，可得

$$\mathcal{L}_1(\underline{U},\bar{V},\bar{W})(\xi)\geq e^{-\mu_1\xi}\left[-k_1\Lambda_1(\mu_1,c)-r_1(1+a_2)\right]\geq 0.$$

当 $\xi<\xi_1$ 时，有 $\underline{U}(\xi+1)\geq 0$。易证 $\mathcal{L}_1(\underline{U},\bar{V},\bar{W})(\xi)\geq 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\xi_1\}$，$\mathcal{L}_1(\underline{U},\bar{V},\bar{W})(\xi)\geq 0$。类似地，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\xi_2\}$，$\mathcal{L}_2(\bar{U},\underline{V},\bar{W})(\xi)\geq 0$。

当 $\xi>0$ 时，有 $\underline{W}(\xi-1)\geq 1-e^{-\lambda_1(\xi-1)}$，$\underline{W}'(\xi)=\lambda_1e^{-\lambda_1\xi}$。则根据 $\Lambda_1(\lambda_1,c)=0$，可得

$$\mathcal{L}_3(\bar{U},\bar{V},\underline{W})(\xi)\geq r_1(1-a_3)e^{-\lambda_1\xi}+r_3\left(1-e^{-\lambda_1\xi}\right)\cdot e^{-\lambda_2\xi}(1-c_1-c_2).$$

若 $c_1+c_2\leq 1$，根据 $a_3<1$，有 $\mathcal{L}_3(\bar{U},\bar{V},\underline{W})(\xi)\geq r_1(1-a_3)e^{-\lambda_1}\geq 0$；若 $c_1+c_2>1$，根据 $r_1(1-a_3)\geq r_3(c_1+c_2-1)$，有 $\mathcal{L}_3(\bar{U},\bar{V},\underline{W})(\xi)\geq e^{-\lambda_1\xi}\left[r_1(1-a_3)-r_3(c_1+c_2-1)\right]\geq 0$。

当 $\xi<0$ 时，$\underline{W}(\xi+1)\geq 0$。易证 $\mathcal{L}_3(\bar{U},\bar{V},\underline{W})(\xi)\geq 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$\mathcal{L}_3(\bar{U},\bar{V},\underline{W})(\xi)\geq 0$。证毕。

下面，证明 $c=c^*$ 的情形。

对于 $c=c^*$，$\Lambda_1(\lambda,c^*)=0$ 存在唯一正解 λ^*，即

$$c^*\lambda^*=\left(e^{\lambda^*}+e^{-\lambda^*}-2\right)+r_1(1-a_3). \tag{16}$$

这也表明

$$(\Lambda_1)_\lambda(\lambda^*,c^*)=\left(e^{\lambda^*}-e^{-\lambda^*}\right)-c^*=0. \tag{17}$$

令

$$g_1(\xi):=\xi^2-\xi\sqrt{\xi^2+\xi}+\frac{1}{2}\xi, g_2(\xi):=\xi^2-\xi\sqrt{\xi^2-\xi}-\frac{1}{2}\xi, \xi\in[1,+\infty).$$

则 $g_1(\xi),g_2(\xi)$ 在 $[1,+\infty)$ 上大于零。利用 L'Hôpital 法则，可得

$$\lim_{\xi\to+\infty}g_1(\xi)=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{1-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\xi}}{\frac{1}{\xi^2}}=\frac{1}{8}.$$

类似地，可得 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}g_2(\xi)=\frac{1}{8}$。因此，

$$s_1:=\inf_{\xi>1}g_1(\xi)>0, s_2:=\inf_{\xi>1}g_2(\xi)>0 \tag{18}$$

是定义良好的。

令 $M^*:=\lambda^*e$。定义

$$\bar{U}(\xi)=\begin{cases}M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}, & \xi>\frac{1}{\lambda^*},\\ 1, & \xi\leq\frac{1}{\lambda^*},\end{cases}\quad \underline{U}(\xi)=\begin{cases}\left(M^*\xi-k_3\sqrt{\xi}\right)e^{-\lambda^*\xi}, & \xi>\xi_3,\\ 0, & \xi\leq\xi_3,\end{cases} \tag{19}$$

$$\bar{V}(\xi)=\begin{cases}M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}, & \xi>\frac{1}{\lambda^*},\\ 1, & \xi\le\frac{1}{\lambda^*},\end{cases}\quad \underline{V}(\xi)=\begin{cases}\left(M^*\xi-k_4\sqrt{\xi}\right)e^{-\lambda^*\xi}, & \xi>\xi_4,\\ 0, & \xi\le\xi_4,\end{cases} \tag{20}$$

$$\bar{W}(\xi)=1,\quad \underline{W}(\xi)=\begin{cases}1-M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}, & \xi>\frac{1}{\lambda^*},\\ 0, & \xi\le\frac{1}{\lambda^*},\end{cases} \tag{21}$$

其中，$\xi_i:=\left(\frac{k_i}{M^*}\right)^2(i=3,4)$ 且

$$k_3>\max\left\{e\sqrt{\lambda^*},\frac{r_1(1+a_2)\left(M^*\right)^2\left(\frac{7}{2e\lambda^*}\right)^{\frac{7}{2}}}{s_1e^{-\lambda^*}+s_2e^{\lambda^*}}\right\},k_4>\max\left\{e\sqrt{\lambda^*},\frac{r_2(1+b_1)\left(M^*\right)^2\left(\frac{7}{2e\lambda^*}\right)^{\frac{7}{2}}}{s_1e^{-\lambda^*}+s_2e^{\lambda^*}}\right\}. \tag{22}$$

同样通过一个引理来验证定义在(19)-(21)的函数是系统(7)的上下解。

引理 2.5 对给定的 $c=c^*$，假设(10)成立。则定义在(19)~(21)的函数是系统(7)的一对上下解。

证明 当 $\xi>\frac{1}{\lambda^*}$ 时，有 $\bar{U}(\xi-1)\le M^*(\xi-1)e^{-\lambda^*(\xi-1)},\bar{U}'(\xi)=M^*e^{-\lambda^*\xi}-\lambda^*M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}$。则根据(16)~(17)式，可得

$$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le r_1M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\cdot M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}(a_3-1)\le 0.$$

当 $\xi<\frac{1}{\lambda^*}$ 时，有 $\bar{U}(\xi+1)\le 1$。易证 $\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{1}{\lambda^*}\right\}$，$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le 0$。类似地，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{1}{\lambda^*}\right\}$，$\mathcal{L}_2\left(\underline{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\le 0$。易证，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}$，$\mathcal{L}_3\left(\underline{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\le 0$。

当 $\xi>\xi_3$ 时，有 $\underline{U}(\xi-1)\ge\left[M^*(\xi-1)-k_3\sqrt{\xi-1}\right]e^{-\lambda^*(\xi-1)}$。则结合(16)~(17)式，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge k_3&\left[\left(\xi^2-\xi\sqrt{\xi^2+\xi}+\frac{1}{2}\xi\right)e^{-\lambda^*}+\left(\xi^2-\xi\sqrt{\xi^2-\xi}-\frac{1}{2}\xi\right)e^{\lambda^*}\right]\xi^{-\frac{3}{2}}e^{-\lambda^*\xi}\\&-r_1M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\left[\underline{U}(\xi)+a_2M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\right].\end{aligned}$$

根据(18)式，知

$$\xi^2-\xi\sqrt{\xi^2+\xi}+\frac{1}{2}\xi\ge s_1,\xi^2-\xi\sqrt{\xi^2-\xi}-\frac{1}{2}\xi\ge s_2。$$

进一步，结合 $\sup_{\xi>0}\left\{\xi^\kappa e^{-\tau\xi}\right\}\le\left(\frac{\kappa}{\tau e}\right)^\kappa,\kappa,\tau>0$ 和(22)式，可得

$$\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge k_3\left(s_1e^{-\lambda^*}+s_2e^{\lambda^*}\right)\xi^{-\frac{3}{2}}e^{-\lambda^*\xi}-r_1(1+a_2)\left(M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\right)^2+r_1k_3M^*\xi^{\frac{3}{2}}e^{-2\lambda^*\xi}\ge 0.$$

当 $\xi<\xi_3$ 时，有 $\underline{U}(\xi+1)\ge 0$。易证 $\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\diagdown\{\xi_3\}$，$\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。类似地，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\diagdown\{\xi_4\}$，$\mathcal{L}_2\left(\bar{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$

当 $\xi>\frac{1}{\lambda^*}$ 时，$\underline{W}(\xi-1)\ge 1-M^*(\xi-1)e^{-\lambda^*(\xi-1)}$，$\underline{W}'(\xi)=-M^*e^{-\lambda^*\xi}+\lambda^*M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}$。则

$$\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge r_1\left(1-a_3\right)M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}+r_3\left(1-M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\right)\cdot M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\left(1-c_1-c_2\right).$$

若 $c_1+c_2\le 1$，根据 $a_3<1$，有 $\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge r_1\left(1-a_3\right)M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\ge 0$；若 $c_1+c_2>1$，根据 $r_1\left(1-a_3\right)\ge r_3\left(c_1+c_2-1\right)$，可得

$$\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge r_1\left(1-a_3\right)M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}+r_3M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\left(1-c_1-c_2\right)\ge M^*\xi e^{-\lambda^*\xi}\left[r_1\left(1-a_3\right)-r_3\left(c_1+c_2-1\right)\right]\ge 0.$$

当 $\xi<\dfrac{1}{\lambda^*}$ 时，有 $\underline{W}(\xi+1)\ge 0$。易证 $\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\lambda^*}\right\}$，$\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge 0$。证毕。

通过上述上下解的构造，应用命题 2.2，即可证明定理 2.3。

2.2. 满足 $(U,V,W)(+\infty)=(0,v_c,w_c)$ 的行波

定理 2.6 令 $c_*:=\inf\limits_{\lambda>0}\dfrac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2+r_1\alpha}{\lambda}$。假设

$$b_3<1,c_2<1,r_1\alpha\ge\max\left\{r_2\left(b_1+b_3c_2v_c\right),r_3\left(c_1+c_2\left(1-v_c\right)\right)\right\}. \tag{23}$$

则当 $c\ge c_*$ 时，系统(7)存在一个正解 (U,V,W) 满足 $(U,V,W)(+\infty)=(0,v_c,w_c)$。

定义

$$\Lambda_2(\lambda,c):=\left(e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2\right)-c\lambda+r_1\alpha. \tag{24}$$

对于 $c>c_*$，设 λ_3 和 $\lambda_4\left(\lambda_3<\lambda_4\right)$ 为方程 $\Lambda_2(\lambda,c)=0$ 的两个正解，使得对于所有的 $\lambda\in\left(\lambda_3,\lambda_4\right),\Lambda_2(\lambda,c)<0$。

定义

$$\bar{U}(\xi)=\begin{cases}e^{-\lambda_3\xi}, & \xi>0,\\ 1, & \xi\le 0,\end{cases}\quad \underline{U}(\xi)=\begin{cases}e^{-\lambda_3\xi}-k_5e^{-\mu_2\xi}, & \xi>\xi_5,\\ 0, & \xi\le\xi_5,\end{cases} \tag{25}$$

$$\bar{V}(\xi)=\begin{cases}v_c+\left(1-v_c\right)e^{-\lambda_3\xi}, & \xi>0,\\ 1, & \xi\le 0,\end{cases}\quad \underline{V}(\xi)=\begin{cases}v_c\left(1-e^{-\lambda_3\xi}\right), & \xi>0,\\ 0, & \xi\le 0,\end{cases} \tag{26}$$

$$\bar{W}(\xi)=\begin{cases}w_c+c_2v_ce^{-\lambda_3\xi}, & \xi>0,\\ 1, & \xi\le 0,\end{cases}\quad \underline{W}(\xi)=\begin{cases}w_c\left(1-e^{-\lambda_3\xi}\right), & \xi>0,\\ 0, & \xi\le 0,\end{cases} \tag{27}$$

其中，$\mu_2\in\left(\lambda_3,\min\left\{\lambda_4,2\lambda_3\right\}\right),\xi_5:=\dfrac{\ln k_5}{\mu_2-\lambda_3}>0$，$k_5$ 为常数且满足

$$k_5>\max\left\{1,\frac{r_1\left[1+a_2\left(1-v_c\right)+a_3c_2v_c\right]}{-\Lambda_2\left(\mu_2,c\right)}\right\}. \tag{28}$$

下面通过引理来验证上述定义的函数(25)~(27)是系统(7)的上下解。

引理 2.7 对给定的 $c>c_*$，假设(23)成立。则定义在(25)~(27)的函数是系统(7)的一对上下解。

证明 当 $\xi>0$ 时，有 $\bar{U}(\xi-1)\le e^{-\lambda_3(\xi-1)},\bar{U}'(\xi)=-\lambda_3e^{-\lambda_3\xi}$。则根据 $\Lambda_2\left(\lambda_3,c\right)=0$ 和 $\alpha\ge 0$，可得

$$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le -r_1\alpha e^{-2\lambda_3\xi}\le 0,$$

当 $\xi<0$ 时，有 $\bar{U}(\xi+1)\le 1$。根据 $\underline{V}(\xi),\underline{W}(\xi)\ge 0$，易证

$$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le r_1\left[-a_2\underline{V}(\xi)-a_3\underline{W}(\xi)\right]\le 0.$$

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$， $\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le 0$。

当 $\xi>0$ 时，有 $\bar{V}(\xi-1)\le v_c+(1-v_c)e^{-\lambda_3(\xi-1)}$， $\bar{V}'(\xi)=-\lambda_3(1-v_c)e^{-\lambda_3\xi}$。则根据 $\Lambda_2(\lambda_3,c)=0$，$1-v_c-b_3w_c=0$ 和 $v_c<1$，可得

$$\mathcal{L}_2\left(\underline{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\le -r_1\alpha(1-v_c)e^{-\lambda_3\xi}\le 0.$$

当 $\xi<0$ 时，有 $\bar{V}(\xi+1)\le 1$。易证 $\mathcal{L}_2\left(\underline{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\le 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$， $\mathcal{L}_2\left(\underline{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\le 0$。

当 $\xi>0$ 时，有 $\bar{W}(\xi-1)\le w_c+c_2v_ce^{-\lambda_3(\xi-1)}$，$\bar{W}'(\xi)=-\lambda_3c_2v_ce^{-\lambda_3\xi}$。则根据 $\Lambda_2(\lambda_3,c)=0$ 和 $1-c_2v_c-w_c=0$，可得 $\mathcal{L}_3\left(\underline{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\le c_2v_ce^{-\lambda_3\xi}\left[\left(e^{-\lambda_3}+e^{\lambda_3}-2\right)-c\lambda_3\right]+r_3\bar{W}(\xi)\left[(1-c_2v_c-w_c)-c_1\underline{U}(\xi)\right]\le -r_1\alpha c_2v_ce^{-\lambda_3\xi}\le 0.$

当 $\xi<0$ 时，有 $\bar{W}(\xi+1)\le 1$。易证 $\mathcal{L}_3\left(\underline{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\le 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$， $\mathcal{L}_3\left(\underline{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\le 0$

当 $\xi>\xi_5$ 时，有 $\underline{U}(\xi-1)\ge e^{-\lambda_3(\xi-1)}-k_5e^{-\mu_2(\xi-1)}$,$\underline{U}'(\xi)=-\lambda_3e^{-\lambda_3\xi}+\mu_2k_5e^{-\mu_2\xi}$。则根据 $\Lambda_2(\lambda_3,c)=0$ 和(28)式，可得

$$\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge e^{-\mu_2\xi}\left\{-k_5\Lambda_2(\mu_2,c)-r_1\left[1+a_2(1-v_c)+a_3c_2v_c\right]\right\}\ge 0.$$

当 $\xi<\xi_5$ 时，有 $\underline{U}(\xi+1)\ge 0$。易证 $\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\xi_5\}$， $\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。

当 $\xi>0$ 时，有 $\underline{V}(\xi-1)\ge v_c\left(1-e^{-\lambda_3(\xi-1)}\right)$,$\underline{V}'(\xi)=\lambda_3v_ce^{-\lambda_3\xi}$。则根据 $\Lambda_2(\lambda_3,c)=0$ 和 $1-v_c-b_3w_c=0$，可得 $\mathcal{L}_2\left(\bar{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。 当 $\xi<0$ 时，有 $\underline{V}(\xi+1)\ge 0$。易证 $\mathcal{L}_2\left(\bar{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$， $\mathcal{L}_2\left(\bar{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。

当 $\xi>0$ 时，有 $\underline{W}(\xi-1)\ge w_c\left(1-e^{-\lambda_3(\xi-1)}\right)$， $\underline{W}'(\xi)=\lambda_3w_ce^{-\lambda_3}$。则根据 $\Lambda_2(\lambda_3,c)=0$ 和 $1-c_2v_c-w_c=0$，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge&-w_ce^{-\lambda_3\xi}\left[\left(e^{-\lambda_3}+e^{\lambda_3}-2\right)-c\lambda_3\right]\\&+r_3w_c\left(1-e^{-\lambda_3\xi}\right)\left\{(1-c_2v_c-w_c)-\left[c_1+c_2(1-v_c)\right]e^{-\lambda_3\xi}+w_ce^{-\lambda_3\xi}\right\}\\\ge&\,0.\end{aligned}$$

当 $\xi<0$ 时，有 $\underline{W}(\xi+1)\ge 0$。易证 $\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$， $\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge 0$。证毕。

对于 $c=c_*$， $\Lambda_2(\lambda,c_*)=0$ 存在唯一正解 λ_*，即

$$c_*\lambda_*=\left(e^{\lambda_*}+e^{-\lambda_*}-2\right)+r_1\alpha. \tag{29}$$

这也表明

$$\left(\Lambda_2\right)_\lambda(\lambda_*,c_*)=\left(e^{\lambda_*}-e^{-\lambda_*}\right)-c_*=0. \tag{30}$$

令 $M_*:=\lambda_*e$。定义

$$\bar{U}(\xi)=\begin{cases}M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}, & \xi>\dfrac{1}{\lambda_*},\\ 1, & \xi\le\dfrac{1}{\lambda_*},\end{cases}\quad \underline{U}(\xi)=\begin{cases}\left(M_*\xi-k_6\sqrt{\xi}\right)e^{-\lambda_*\xi}, & \xi>\xi_6,\\ 0, & \xi\le\xi_6,\end{cases} \tag{31}$$

$$\bar{V}(\xi)=\begin{cases} v_c+(1-v_c)M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}, & \xi>\dfrac{1}{\lambda_*},\\ 1, & \xi\le\dfrac{1}{\lambda_*},\end{cases}\quad \underline{V}(\xi)=\begin{cases} v_c\left(1-M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}\right), & \xi>\dfrac{1}{\lambda_*},\\ 0, & \xi\le\dfrac{1}{\lambda_*},\end{cases} \tag{32}$$

$$\bar{W}(\xi)=\begin{cases} w_c+c_2v_cM_*\xi e^{-\lambda_*\xi}, & \xi>\dfrac{1}{\lambda_*},\\ 1, & \xi\le\dfrac{1}{\lambda_*},\end{cases}\quad \underline{W}(\xi)=\begin{cases} w_c\left(1-M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}\right), & \xi>\dfrac{1}{\lambda_*},\\ 0, & \xi\le\dfrac{1}{\lambda_*},\end{cases} \tag{33}$$

其中，$\xi_6:=\left(\dfrac{k_6}{M_*}\right)^2$ 且

$$k_6>\max\left\{e\sqrt{\lambda_*},\frac{r_1\left[1+a_2(1-v_c)+a_3c_2v_c\right](M_*)^2\left(\dfrac{7}{2e\lambda_*}\right)^{\frac{7}{2}}}{s_1e^{-\lambda_*}+s_2e^{\lambda_*}}\right\}. \tag{34}$$

同样通过一个引理来验证定义在(31)~(33)的函数是系统(7)的上下解。

引理 2.8 对给定的$c=c_*$，假设(23)成立。则定义在(31)~(33)的函数是系统(7)的一对上下解。

证明 当$\xi>\dfrac{1}{\lambda_*}$时，有$\bar{U}(\xi-1)\le M_*(\xi-1)e^{-\lambda_*(\xi-1)},\bar{U}'(\xi)=M_*e^{-\lambda_*\xi}-\lambda_*M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}$。则根据(29)~(30)式和$\alpha\ge0$，可得

$$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le -r_1\alpha\left(M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}\right)^2\le0.$$

当$\xi<\dfrac{1}{\lambda_*}$时，有$\bar{U}(\xi+1)\le1$。易证$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le0$。

因此，对任意的$\xi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\lambda_*}\right\}$，$\mathcal{L}_1\left(\bar{U},\underline{V},\underline{W}\right)(\xi)\le0$。

当$\xi>\dfrac{1}{\lambda_*}$时，有$\bar{V}(\xi-1)\le v_c+(1-v_c)M_*(\xi-1)e^{-\lambda_*(\xi-1)}$，$\bar{V}'(\xi)=(1-v_c)M_*e^{-\lambda_*\xi}-\lambda_*(1-v_c)M_*\xi e^{-\lambda\xi}$。则根据(29)~(30)式，$1-v_c-b_3w_c=0$和$v_c<1$，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2\left(\underline{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)&\le(1-v_c)M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}\left[\left(e^{-\lambda_*}+e^{-\lambda_*}-2\right)-c\lambda_*\right]+(1-v_c)M_*e^{-\lambda_*\xi}\left[\left(e^{-\lambda_*}-e^{\lambda_*}\right)+c\right]\\&\quad+r_2\bar{V}(\xi)\left[(1-v_c-b_3w_c)-b_1\underline{U}(\xi)-(1-v_c-b_3w_c)M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}\right]\\&\le0.\end{aligned}$$

当$\xi<\dfrac{1}{\lambda_*}$时，有$\bar{V}(\xi+1)\le1$。易证$\mathcal{L}_2\left(\underline{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\le0$。

因此，对任意的$\xi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\lambda_*}\right\}$，$\mathcal{L}_2\left(\underline{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\le0$。

当$\xi>\dfrac{1}{\lambda_*}$时，有$\bar{W}(\xi-1)\le w_c+c_2v_cM_*(\xi-1)e^{-\lambda_*(\xi-1)}$，$\bar{W}'(\xi)=c_2v_cM_*e^{-\lambda_*\xi}-\lambda_*c_2v_cM_*\xi e^{-\lambda_*\xi}$。根据(29)~(30)式和$1-c_2v_c-w_c=0$，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3\left(\underline{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi) &\le c_2 v_c M_* \xi e^{-\lambda_*\xi}\left[\left(e^{-\lambda_*}+e^{\lambda_*}-2\right)-c\lambda_*\right]+c_2 v_c M_* e^{-\lambda_*\xi}\left[\left(e^{-\lambda_*}-e^{\lambda_*}\right)+c\right]\\ &\quad +r_3\bar{W}(\xi)\left[\left(1-c_2 v_c-w_c\right)-c_1\underline{U}(\xi)\right]\\ &\le -r_1\alpha c_2 v_c M_*\xi e^{-\lambda_*\xi}\le 0.\end{aligned}$$

当 $\xi<\dfrac{1}{\lambda_*}$ 时，有 $\bar{W}(\xi+1)\le 1$。易证 $\mathcal{L}_3\left(\underline{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\le 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\lambda_*}\right\}$，$\mathcal{L}_3\left(\underline{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\le 0$。

当 $\xi>\xi_6$ 时，有 $\underline{U}(\xi-1)\ge\left[M_*(\xi-1)-k_6\sqrt{\xi-1}\right]e^{-\lambda_*(\xi-1)}$。则由(29)-(30)式，$\sup\limits_{\xi>0}\left\{\xi^{\kappa}e^{-\tau\kappa}\right\}\le\left(\dfrac{\kappa}{\tau e}\right)^{\kappa},\kappa,\tau>0$ 和(34)式，可得

$$\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge\xi^{-\frac{3}{2}}e^{-\lambda_*\xi}\left\{k_6\left(s_1e^{-\lambda_*}+s_2e^{\lambda_*}\right)-r_1\left(M_*\right)^2\left(\frac{7}{2e\lambda_*}\right)^{\frac{7}{2}}\left[1+a_2\left(1-v_c\right)+a_3c_2v_c\right]\right\}\ge 0.$$

当 $\xi<\xi_6$ 时，有 $\underline{U}(\xi+1)\ge 0$。易证 $\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\xi_6\}$，$\mathcal{L}_1\left(\underline{U},\bar{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。

当 $\xi>\dfrac{1}{\lambda_*}$ 时，有 $\underline{V}(\xi-1)\ge v_c\left[1-M_*(\xi-1)e^{-\lambda_*(\xi-1)}\right]$，$\underline{V}'(\xi)=-v_cM_*e^{-\lambda_*\xi}+\lambda_*v_cM_*\xi e^{-\lambda_*\xi}$。则根据(29)~(30)式和 $1-v_c-b_3w_c=0$，可得

$$\mathcal{L}_2\left(\bar{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge v_cM_*\xi e^{-\lambda_*\xi}\left[r_1\alpha-r_2\left(b_1+b_3c_2v_c\right)\right]\ge 0.$$

当 $\xi<\dfrac{1}{\lambda_*}$ 时，有 $\underline{V}(\xi+1)\ge 0$。易证 $\mathcal{L}_2\left(\bar{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\lambda_*}\right\}$，$\mathcal{L}_2\left(\bar{U},\underline{V},\bar{W}\right)(\xi)\ge 0$。

当 $\xi>\dfrac{1}{\lambda_*}$ 时，有 $\underline{W}(\xi-1)\ge w_c\left[1-M_*(\xi-1)e^{-\lambda_*(\xi-1)}\right]$，$\underline{W}'(\xi)=-w_cM_*e^{-\lambda_*\xi}+\lambda_*w_cM_*\xi e^{-\lambda_*\xi}$。则根据(29)~(30)式和 $1-c_2v_c-w_c=0$，可得

$$\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge w_cM_*\xi e^{-\lambda_*\xi}\left\{r_1\alpha-r_3\left[c_1+c_2\left(1-v_c\right)\right]\right\}\ge 0.$$

当 $\xi<\dfrac{1}{\lambda_*}$ 时，有 $\underline{W}(\xi+1)\ge 0$。易证 $\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge 0$。

因此，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\lambda_*}\right\}$，$\mathcal{L}_3\left(\bar{U},\bar{V},\underline{W}\right)(\xi)\ge 0$。证毕。

通过上述上下解的构造，已证 $(U,V,W)(+\infty)=(0,v_c,w_c)$。应用命题 2.2，即可证明定理 2.6。

3. 在负无穷远处的波尾极限

在上一节中，证明了系统(7)具有满足 $(U,V,W)(+\infty)=(0,0,1)$ 或 $(U,V,W)(+\infty)=(0,v_c,w_c)$ 正解的存在性。在本节中，将使用压缩矩形法推导出 (U,V,W) 的左尾极限。

3.1. 满足 $(U,V,W)(-\infty)=(1,0,0)$ 的波尾极限

定理 3.1 当 $c\ge c^*$ $(c\ge c_*)$ 时，令 (U,V,W) 是在定理 2.3 (定理 2.6)中证明的行波。假设

$$a_2 b_1 \geq 1, a_3 c_1 \geq 1, a_2 + a_3 < 1. \tag{35}$$

则$(U,V,W)(-\infty)=(1,0,0)$。

设

$$T^{-} := \liminf_{\xi \to -\infty} T(\xi), T^{+} := \limsup_{\xi \to +\infty} T(\xi), T = U,V,W.$$

由于$T>0, T=U,V,W$，根据最大值原理可知，$0 \leq T \leq 1, T=U,V,W$。因此，$0 \leq T^{-} \leq T^{+} \leq 1, T=U,V,W$。

引理 3.2 若$a_2+a_3<1$，则$U^{-} \geq \beta_0 := 1-a_2-a_3>0$。

证明 对于下列带有初值的问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u(x+1,t)+u(x-1,t)-2u(x,t)+r_1 u(1-a_2-a_3-u), x \in \mathbb{Z}, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{36}$$

根据[18]可知，系统(36)的解$u(x,t)$满足对任意$0<\tilde{c}<c_u$，

$$\liminf_{t \to +\infty} \inf_{|x|<\tilde{c}t} u(x,t) = \beta_0,$$

其中，

$$c_u := \inf_{\lambda>0} \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2+r_1(1-a_2-a_3)}{\lambda}.$$

由于$V,W \leq 1$，则$\phi(x,t) := U(x-ct)$满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \geq \phi(x+1,t)+\phi(x-1,t)-2\phi(x,t)+r_1\phi(1-a_2-a_3-\phi), x \in \mathbb{R}, t>0, \\ \phi(x,0)=U(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{37}$$

根据比较原理，可知对所有的$x \in \mathbb{R}, t>0$，有$u(x,t) \leq \phi(x,t)$。因此，

$$U^{-} = \liminf_{\xi \to -\infty} U(\xi) = \liminf_{\xi \to -\infty} \phi(0,-\xi/c) \geq \liminf_{\xi \to -\infty} u(0,-\xi/c) \geq \beta_0.$$

证毕。

定义

$$m_{11}(\theta) := (1-\theta)(\beta_0-\varepsilon)+\theta, \theta \in [0,1],$$

其中，$\varepsilon \in (0,\beta_0)$。由于$\beta_0<1$，则$m_{11}(\theta)$在$\theta \in [0,1]$上递增且$m_{11}(1)=1$。令

$$\mathcal{A} := \{\theta \in [0,1) \mid U^{-} > m_{11}(\theta)\}.$$

根据引理 3.2，知$0 \in \mathcal{A}$，$\theta_0 := \sup \mathcal{A}$是定义良好的，且$\theta_0 \in (0,1]$。取极限后，可以得到

$$U^{-} \geq m_{11}(\theta_0). \tag{38}$$

引理 3.3 假设(38)成立，则有

$$\begin{cases} V^{+} \leq M_{12}(\theta_0) := \max\{0, 1-b_1 m_{11}(\theta_0)\}, \\ W^{+} \leq M_{13}(\theta_0) := \max\{0, 1-c_1 m_{11}(\theta_0)\}. \end{cases}$$

证明 对于任何趋于无穷的序列$\{\xi_n\}$，假设

$$\varphi(\xi) := \lim_{n \to \infty} V(\xi+\xi_n), \xi \in \mathbb{R},$$

存在。根据系统(7)，(38)式及$W \ge 0$知，在$\mathbb{R}$中，

$$\mathcal{D}_2[\varphi]+c\varphi'+r_2\varphi\left[1-b_1m_{11}(\theta_0)-\varphi\right]\ge 0.$$

由于$V\le 1$，根据抛物线比较原理知，$\varphi(\xi)\le\overline{v}(0),\xi\in\mathbb{R},t>0$，其中，$\overline{v}(t)$是下列初值问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t}=r_2\overline{v}\left[1-b_1m_{11}(\theta_0)-\overline{v}\right],t>0,\\ \overline{v}(0)=1.\end{cases}$$

当$t\to+\infty$时，$\overline{v}(t)\to M_{12}(\theta_0)$。因此，对任意$\xi\in\mathbb{R},\varphi(\xi)\le M_{12}(\theta_0)$。由此可知，$V^+\le M_{12}(\theta_0)$。类似可证，$W^+\le M_{13}(\theta_0)$。证毕。

接下来，证明$\theta_0=1$。

假设$\theta_0\in(0,1)$。根据$m_{11}(\theta_0)$的连续性，知$\theta_0\notin\mathcal{A}$。结合(38)式，可得

$$U^-=m_{11}(\theta_0). \tag{39}$$

令$\gamma_1:=1-m_{11}(\theta_0)-a_2M_{12}(\theta_0)-a_3M_{13}(\theta_0)$。根据引理3.3，可得

$$\gamma_1\ge\begin{cases}(1-a_2-a_3)+(a_2b_1+a_3c_1-1)m_{11}(\theta_0), & m_{11}(\theta_0)<\min\{1/b_1,1/c_1\},\\ (1-a_2)+(a_2b_1-1)m_{11}(\theta_0), & m_{11}(\theta_0)\in[1/c_1,1/b_1),\\ (1-a_3)+(a_3c_1-1)m_{11}(\theta_0), & m_{11}(\theta_0)\in[1/b_1,1/c_1).\end{cases}$$

结合(35)式，知$\gamma_1>0$。

若当$\xi\to-\infty$，$U(\xi)$是最终单调的，则$\lim\limits_{\xi\to-\infty}U(\xi)=m_{11}(\theta_0)$。对系统(7)的第一个方程从一个负整数$-n$到0积分，得到

$$c\left[U(-n)-U(0)\right]=\int_{-n}^{0}\left[\mathcal{D}_2[U](\xi)+r_1U(\xi)(1-U-a_2V-a_3W)(\xi)\right]\mathrm{d}\xi. \tag{40}$$

由于

$$\lim_{\xi\to-\infty}\left\{\mathcal{D}_2[U](\xi)+r_1U(\xi)(1-U-a_2V-a_3W)(\xi)\right\}\ge r_1m_{11}(\theta_0)\gamma_1\ge 0,$$

注意到当$n\to\infty$时，(40)式右侧趋于无穷，而(40)式左侧对于所有的n都是一致有界的，从而得出矛盾。

若当$\xi\to-\infty$，$U(\xi)$是振荡的，则存在一个序列$\{\xi_n\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty}U(\xi_n)=m_{11}(\theta_0)$。根据系统(7)的第一个方程可得

$$\begin{aligned}0&=U(\xi_n+1)+U(\xi_n-1)-2U(\xi_n)+cU'(\xi_n)+r_1U(\xi_n)(1-U-a_2V-a_3W)(\xi_n)\\&\ge r_1U(\xi_n)(1-U-a_2V_2-a_3W_3)(\xi_n).\end{aligned}$$

对上述不等式在$n\to\infty$时取下极限，结合$\gamma_1>0$，产生矛盾。因此，$\theta_0=1$。这表明$U^-=1$，即$U(-\infty)=1$。

最后，将引理3.3和$\theta_0=1$结合，并考虑$b_1,c_1>1$，可以推出$V^-=W^-=0$。

因此，$(U,V,W)(-\infty)=(1,0,0)$。

3.2. 满足$(U,V,W)(-\infty)=(u_*,v_*,w_*)$的波尾极限

定理3.4 当$c\ge c^*\,(c\ge c_*)$时，令(U,V,W)是在定理2.3 (定理2.6)中证明的行波。假设

$$a_2+a_3<1,b_1+b_3<1,c_1+c_2<1. \tag{41}$$

则$(U,V,W)(-\infty)=(u_*,v_*,w_*)$。

证明 令

$$\begin{cases}\beta_1 := \min\{1-a_2-a_3, u_*/2\},\\ \beta_2 := \min\{1-b_1-b_3, v_*/2\},\\ \beta_3 := \min\{1-c_1-c_2, w_*/2\}.\end{cases}$$

显然，$\beta_i > 0, i = 1,2,3$。因此，根据引理 3.2 知，

$$U^- \ge \beta_1, V^- \ge \beta_2, W^- \ge \beta_3.$$

定义

$$\begin{cases}m_{21}(\theta) := \theta u_* + (1-\theta)(\beta_1-\varepsilon), & M_{21}(\theta) := \theta u_* + (1-\theta)(1+\varepsilon),\\ m_{22}(\theta) := \theta v_* + (1-\theta)(\beta_2-\varepsilon), & M_{22}(\theta) := \theta v_* + (1-\theta)(1+\varepsilon),\\ m_{23}(\theta) := \theta w_* + (1-\theta)(\beta_3-\varepsilon), & M_{23}(\theta) := \theta w_* + (1-\theta)(1+\varepsilon),\end{cases}$$

其中，$\theta \in [0,1]$，ε是一个正常数且满足$0 < \varepsilon < \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$。

定义

$$\mathcal{B} := \left\{\theta \in [0,1) \mid m_{21}(\theta) < U^- \le U^+ < M_{21}(\theta), m_{22}(\theta) < V^- \le V^+ < M_{22}(\theta), m_{23}(\theta) < W^- \le W^+ < M_{23}(\theta)\right\}.$$

显然，$0 \in \mathcal{B}$，所以$\mathcal{B} \ne \varnothing$。

下面，证明$\sup \mathcal{B} = 1$。

利用反证法，假设$\sup \mathcal{B} = \theta_* \in (0,1)$。设

$$\begin{aligned}&h_1(\theta) := 1 - m_{21}(\theta) - a_2 M_{22}(\theta) - a_3 M_{23}(\theta), l_1(\theta) := 1 - M_{21}(\theta) - a_2 m_{22}(\theta) - a_3 m_{23}(\theta),\\ &h_2(\theta) := 1 - b_1 M_{21}(\theta) - m_{22}(\theta) - b_3 M_{23}(\theta), l_2(\theta) := 1 - b_1 m_{21}(\theta) - M_{22}(\theta) - b_3 m_{23}(\theta),\\ &h_3(\theta) := 1 - c_1 M_{21}(\theta) - c_2 M_{22}(\theta) - m_{23}(\theta), l_3(\theta) := 1 - c_1 m_{21}(\theta) - c_2 m_{22}(\theta) - M_{23}(\theta).\end{aligned}$$

通过计算，结合(41)式可得

$$\begin{aligned}&h_1(\theta) = (1-\theta)\left[(1-a_2-a_3-\beta_1) + (1-a_2-a_3)\varepsilon\right] \ge (1-\theta)(1-a_2-a_3)\varepsilon > 0,\\ &h_2(\theta) = (1-\theta)\left[(1-b_1-b_3-\beta_2) + (1-b_1-b_3)\varepsilon\right] \ge (1-\theta)(1-b_1-b_3)\varepsilon > 0,\\ &h_3(\theta) = (1-\theta)\left[(1-c_1-c_2-\beta_3) + (1-c_1-c_2)\varepsilon\right] \ge (1-\theta)(1-c_1-c_2)\varepsilon > 0,\\ &l_1(\theta) = -(1-\theta)\left[\varepsilon + a_2(\beta_2-\varepsilon) + a_3(\beta_3-\varepsilon)\right] < 0,\\ &l_2(\theta) = -(1-\theta)[\varepsilon + b_1(\beta_1-\varepsilon) + b_3(\beta_3-\varepsilon) < 0,\\ &l_3(\theta) = -(1-\theta)\left[\varepsilon + c_1(\beta_1-\varepsilon) + c_2(\beta_2-\varepsilon)\right] < 0,\end{aligned}$$

让$\theta \to \theta_*$，则有

$$\begin{cases}m_{21}(\theta_*) \le U^- \le U^+ \le M_{21}(\theta_*),\\ m_{22}(\theta_*) \le V^- \le V^+ \le M_{22}(\theta_*),\\ m_{23}(\theta_*) \le W^- \le W^+ \le M_{23}(\theta_*).\end{cases} \tag{42}$$

因此，下列六个等式中必有一个成立

$$\begin{cases}U^- = m_{21}(\theta_*), U^+ = M_{21}(\theta_*),\\ V^- = m_{22}(\theta_*), V^+ = M_{22}(\theta_*),\\ W^- = m_{23}(\theta_*), W^+ = M_{23}(\theta_*).\end{cases}$$

下面，仅考虑$U^-=m_{21}(\theta_*)$的情形，剩余五种情形可以类似地讨论。

若当$\xi\to-\infty$，$U(\xi)$是最终单调的，则$\lim_{\xi\to-\infty}U(\xi)$存在。由于$\int_{-\infty}^{0}U'(\xi)\mathrm{d}\xi=U(-\infty)-U(0)$是有限的，则存在下列两种情况：对于$\xi\gg1$，若$U'(\xi)>0$，$\liminf_{\xi\to-\infty}U'(\xi)=0$；对于$\xi\gg1$，若$U'(\xi)<0$，$\limsup_{\xi\to-\infty}U'(\xi)=0$。因此，可以找到序列$\{\xi_n\}$，使得当$n\to+\infty$时，$\xi_n\to-\infty$，且$\lim_{n\to+n}U(\xi_n)=m_{21}(\theta_*)$。

若当$\xi\to-\infty$，$U(\xi)$是振荡的，则可以选取由U的最小值点构成的序列$\{\xi_n\}$。根据U^-的定义，可得

$$\liminf_{n\to+\infty}U(\xi_n+1)\ge U^-,\limsup_{n\to+\infty}U(\xi_n-1)\ge U^-。$$

再结合(42)式，$\limsup_{n\to+\infty}V(\xi_n)\le M_{22}(\theta_*)$和$\limsup_{n\to+\infty}W(\xi_n)\le M_{23}(\theta_*)$，则有

$$\liminf_{n\to+\infty}(1-U-a_2V-a_3W)(\xi_n)\ge1-m_{21}(\theta_*)-a_2M_{22}(\theta_*)-a_3M_{23}(\theta_*)=h_1(\theta_*)>0.$$

这表明

$$\begin{aligned}0&=\liminf_{n\to+\infty}\left\{\left[U(\xi_n+1)+U(\xi_n-1)-2U(\xi_n)\right]+cU'(\xi_n)+r_1U(\xi_n)\left[1-U(\xi_n)-a_2U(\xi_n)-a_3U(\xi_n)\right]\right\}\\&\ge\left(U^-+U^--2U^-\right)+r_1U^-h_1(\theta_*)>0,\end{aligned}$$

矛盾。

因此，$\sup\mathcal{B}=1$。证得$(U,V,W)(-\infty)=(u_*,v_*,w_*)$。证毕。

4. 行波的不存在性

定理 4.1 存在以下情况时，系统(7)不存在正解(U,V,W)。

(1) 当$c<c^*$时，若$a_3<1$，

$$(U,V,W)(-\infty)\in\left\{(1,0,0),(u_*,v_*,w_*)\right\},(U,V,W)(+\infty)=(0,0,1);$$

(2) 当$c<c_*$时，若$b_3<1,c_2<1,\alpha>0$，

$$(U,V,W)(-\infty)\in\left\{(1,0,0),(u_*,v_*,w_*)\right\},(U,V,W)(+\infty)=(0,v_c,w_c)。$$

证明 (1)假设对某些$c<c^*$，系统(7)存在正解(U,V,W)，使得$(U,V,W)(+\infty)=(0,1,1)$

令$\zeta_1(\xi):=\dfrac{U'(\xi)}{U(\xi)}$，则对系统(7)的第一个方程两边同时除以$U(\xi)$得

$$\begin{aligned}-c\zeta_1(\xi)&=\left[\frac{U(\xi+1)}{U(\xi)}+\frac{U(\xi-1)}{U(\xi)}-2\right]+r_1\left[1-U(\xi)-a_2V(\xi)-a_3W(\xi)\right]\\&=\left[e^{\int_{\xi}^{\xi+1}\zeta_1(s)\mathrm{d}s}+e^{\int_{\xi-1}^{\xi}\zeta_1(s)\mathrm{d}s}-2\right]+r_1\left[1-U(\xi)-a_2V(\xi)-a_3W(\xi)\right],\xi\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

注意到，当$\xi\to+\infty$时，$r_1\left[1-U(\xi)-a_2V(\xi)-a_3W(\xi)\right]\to r_1(1-a_3)$。根据[14]知，$\widehat{\zeta_1}:=\lim_{\xi\to+\infty}\zeta_1(\xi)$存在，且满足

$$-c\widehat{\zeta_1}=e^{\widehat{\zeta_1}}+e^{-\widehat{\zeta_1}}-2+r_1(1-a_3).$$

由于对任意的$\xi\in\mathbb{R}$，$U(\xi)>0$且$U(+\infty)=0$，则$\widehat{\zeta_1}\le0$。这意味着

$$c = \frac{e^{\widehat{\zeta}_1} + e^{-\widehat{\zeta}_1} - 2 + r_1(1-a_3)}{-\widehat{\zeta}_1} \geq c^*,$$

矛盾。因此，系统(7)不存在满足$(U,V,W)(+\infty)=(0,0,1)$的行波。

同理，可证系统(7)不存在满足$(U,V,W)(+\infty)=(0,v_c,w_c)$的行波。证毕。

5. 讨论

本研究通过分析格上三物种 Lotka-Volterra 竞争系统的行波解，从生态学角度揭示了外来物种入侵的两种典型动态：一是两个外来强势物种共同入侵一个本地弱势物种，二是一个外来强势物种入侵两个本地弱势物种。数学上，我们证明了在特定参数条件下存在两类行波解：Type I 波连接边界平衡点(0, 0, 1)，Type II 波连接半共存平衡点$(0,v_c,w_c)$。关键参数条件如$a_3<1, b_3<1$等反映了物种间的竞争强度。进一步，通过构造合适的上下解和控制系统，我们刻画了行波在负无穷远处的渐近行为，表明在强竞争条件下，入侵物种可完全排除本地物种，系统趋于单物种主导状态；而在弱竞争条件下，三物种可达成共存。与以往基于拉普拉斯算子和卷积算子的模型相比，晶格模型通过离散迁移核函数统一描述了从短距离到长距离的扩散行为，突出了空间离散性对入侵速度和模式的关键影响。这一框架为研究破碎化景观中的生物入侵动力学提供了不可替代的数学工具。本研究的结果不仅推广了已有关于两物种和三物种竞争系统的结论，也为理解离散环境中多物种共存与竞争排斥提供了新的理论依据。

参考文献

[1] Guo, J. and Liang, X. (2011) The Minimal Speed of Traveling Fronts for the Lotka-Volterra Competition System. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **23**, 353-363. https://doi.org/10.1007/s10884-011-9214-5

[2] Guo, J., Wang, Y., Wu, C. and Wu, C. (2015) The Minimal Speed of Traveling Wave Solutions for a Diffusive Three Species Competition System. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **19**, 1805-1829. https://doi.org/10.11650/tjm.19.2015.5373

[3] Guo, J. and Guo, K. (2022) Traveling Waves for a Three-Species Competition System with Two Weak Aboriginal Competitors. *Differential and Integral Equations*, **35**, 819-832. https://doi.org/10.57262/die035-1112-819

[4] Guo, K. (2023) On the Invading Speeds for a Diffusive Three-Species Competition System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **526**, Article 127229. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127229

[5] Dong, F.D., Li, W.T. and Wang, J.B. (2017) Asymptotic Behavior of Traveling Waves for a Three-Component System with Nonlocal Dispersal and Its Application. *Discrete & Continuous Dynamical Systems A*, **37**, 6291-6318. https://doi.org/10.3934/dcds.2017272

[6] Dong, F.D., Li, W.T. and Wang, J.B. (2019) Propagation Dynamics in a Three-Species Competition Model with Nonlocal Anisotropic Dispersal. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **48**, 232-266. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.01.012

[7] Zhang, G.B., Dong, F.D. and Li, W.T. (2019) Uniqueness and Stability of Traveling Waves for a Three-Species Competition System with Nonlocal Dispersal. *Discrete & Continuous Dynamical Systems B*, **24**, 1511-1541. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018218

[8] He, J. and Zhang, G.B. (2021) The Minimal Speed of Traveling Wavefronts for a Three-Component Competition System with Nonlocal Dispersal. *International Journal of Biomathematics*, **14**, Article 2150058. https://doi.org/10.1142/s1793524521500583

[9] Hao, Y.C. and Zhang, G.B. (2023) Global Stability of Bistable Traveling Wavefronts for a Three-Species Lotka-Volterra Competition System with Nonlocal Dispersal. *International Journal of Biomathematics*, **16**, Article 2250106. https://doi.org/10.1142/s1793524522501066

[10] Wang, M.L., Zhang, G.B. and He, P. (2024) Invasion Traveling Waves of a Three Species Lotka-Volterra Competitive System with Nonlocal Dispersal. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **132**, Article 107939. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.107939

[11] Hao, Y.C. and Zhang, G.B. (2022) The Dynamics of Traveling Wavefronts for a Nonlocal Delay Competition System with Local vs. Nonlocal Diffusions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **110**, Article

106381. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106381

[12] Zhang, G.B. and Zhao, X.Q. (2020) Propagation Phenomena for a Two-Species Lotka-Volterra Strong Competition System with Nonlocal Dispersal. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, Article No. 10. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1662-5

[13] Chen, X.F. and Guo, J.S. (2002) Existence and Asymptotic Stability of Traveling Waves of Discrete Quasilinear Monostable Equations. *Journal of Differential Equations*, **184**, 549-569. https://doi.org/10.1006/jdeq.2001.4153

[14] Chen, X.F. and Guo, J.S. (2003) Uniqueness and Existence of Traveling Waves for Discrete Quasilinear Monostable Dynamics. *Mathematische Annalen*, **326**, 123-146. https://doi.org/10.1007/s00208-003-0414-0

[15] Chen, X.F., Fu, S.C. and Guo, J.S. (2006) Uniqueness and Asymptotics of Traveling Waves of Monostable Dynamics on Lattices. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **38**, 233-258. https://doi.org/10.1137/050627824

[16] Guo, J.S. and Wu, C.C. (2016) The Existence of Traveling Wave Solutions for a Bistable Three-Component Lattice Dynamical System. *Journal of Differential Equations*, **260**, 1445-1455. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.036

[17] Li, J.F. and Wang, J.B. (2024) Spatial Propagation of a Lattice Predation-Competition System with One Predator and Two Preys in Shifting Habitats. *Studies in Applied Mathematics*, **152**, 307-341. https://doi.org/10.1111/sapm.12645

[18] Hu, C.B. and Li, B.T. (2015) Spatial Dynamics for Lattice Differential Equations with a Shifting Habitat. *Journal of Differential Equations*, **259**, 1967-1989. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.025