Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(10), 199-204
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1410432

Hans汉斯

关于不定方程$5x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$

李 涵

西南大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2025年9月11日；录用日期：2025年10月4日；发布日期：2025年10月14日

摘 要

本文运用Pell方程、二次平方剩余、递归序列等方法，对不定方程$5x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$展开研究，证明了该方程共有16组整数解，且不存在正整数解。

关键词

不定方程，整数解，递归序列，平方剩余

On the Diophantine Equation $5x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$

Han Li

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing

Received: September 11, 2025; accepted: October 4, 2025; published: October 14, 2025

Abstract

In this paper, we use Pell equation, quadratic residue, recursive sequence and other methods to study the $5x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ Diophantine equation. It is proved that the equation has 16 groups of integer solutions, and there is no positive integer solution.

Keywords

Diophantine Equation, Integer Solution, Recursive Sequence, Squared Residual

文章引用: 李涵. 关于不定方程 5x (x + 1) (x + 2) (x + 3) = 11y (y + 1) (y + 2) (y + 3) [J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 199-204. DOI: 10.12677/aam.2025.1410432

1. 引言与结论

对于形如 $px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$ (其中 $(p,q)=1$，且 $p,q\in\mathbb{N}^*$)的不定方程，其正整数解的研究长期受到数论领域的关注[1]-[10]，现已有一些重要结论。1971 年 Cohn 证明了当 $p=1,q=2$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(5,4)$ [1]；1991 年罗明证明了 $p=1,q=7$ 时，仅有正整数解 $(x,y)=(4,2)$ [2]；2024 年张艺宝证明了当 $p=5,q=42$ 时，仅有正整数解 $(x,y)=(6,3)$ [9]。但当 $p=5,q=11$ 时，方程转化后得到的递推序列系数相对于前者较大，直接计算与验证的难度显著提升，故该方程整数解的问题仍未解决。本文将证明 $p=5,q=11$ 时，即方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

无正整数解。

2. 预备知识

化简(1)得：

$$25[x(x+3)][(x+1)(x+2)]=55[y(y+3)][(y+1)(y+2)]$$

$$25(x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1)=55(y^2+3y+1-1)(y^2+3y+1+1)$$

$$25(x^2+3x+1)^2-25=55(y^2+3y+1)^2-55$$

由此得到如下形式：

$$\left[5(x^2+3x+1)\right]^2-55(y^2+3y+1)^2=-30 \tag{2}$$

易知方程 $x^2-55y^2=-30$ 的全部整数解由以下两个结合类给出：

$$x_n+y_n\sqrt{55}=\pm(5+\sqrt{55})(u_n+v_n\sqrt{55})=\pm(5+\sqrt{55})(89+12\sqrt{55})^n, n\in\mathbb{N}^*,$$

$$\overline{x}_n+\overline{y}_n\sqrt{55}=\pm(-5+\sqrt{55})(u_n+v_n\sqrt{55})=\pm(-5+\sqrt{55})(89+12\sqrt{55})^n, n\in\mathbb{N}^*,$$

其中 $5+\sqrt{55}$ 是是方程 $x^2-55y^2=-30$ 的最小正整数解，$89+12\sqrt{55}$ 是 Pell 方程 $x^2-55y^2=1$ 的基本解。易知 $\overline{y}_n=y_{-n}$，且方程(2)的解需要满足以下两个式子

$$(2y+3)^2=4y_n+5,$$

$$(2y+3)^2=4\overline{y}_n+5.$$

故 $y_n\ge -1$、$\overline{y}_n\ge -1$，并且方程 $x^2-55y^2=-30$ 的两个结合类都只取正号，于是方程(2)的解需要满足

$$(2y+3)^2=\pm 4y_n+5. \tag{3}$$

不难推出以下关系式成立：

$$y_{n+1}=178y_n-y_{n-1}, y_0=1, y_1=149 \tag{4}$$

$$u_{n+1}=178u_n-u_{n-1}, u_0=1, u_1=89 \tag{5}$$

$$v_{n+1}=178v_n-v_{n-1},v_0=0,v_1=12 \tag{6}$$

$$u_{2n}=u_n^{\ 2}+55v_n^{\ 2}=2u_n^{\ 2}-1,v_{2n}=2u_nv_n \tag{7}$$

$$y_n=u_n+5\mathrm{v}_n \tag{8}$$

$$u_{n+2km}\equiv(-1)^k u_n\left(\bmod u_m\right) \tag{9}$$

$$v_{n+2km}\equiv(-1)^k v_n\left(\bmod v_m\right) \tag{10}$$

$$y_{n+2km}\equiv(-1)^k y_n\left(\bmod u_m\right) \tag{11}$$

以下的内容将证明(3)式仅在 $n=-1,0$ 时成立，进而求得方程(2)的全部整数解，最后得到方程(1)的全部整数解。

3. 分类讨论

3.1. 当 $(2y+3)^2=4y_n+5$ 时

引理 1 设 $2|m,m>0$, 则 $\left(\dfrac{\pm 20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\dfrac{u_m\pm 4v_m}{71}\right)$。

证明 当 $2|m,m>0$ 时，由(5)式知 $2\nmid \mathrm{u}_m$，由(7)式知

$$u_{2m}\equiv 2u_m^{\ 2}-1\equiv 1\left(\bmod 8\right),$$

$$\left(\frac{-1}{u_{2m}}\right)=1,\quad \left(\frac{2}{u_m}\right)=1,\quad \left(\frac{5}{u_m}\right)=1,$$

所以 $$\left(\frac{\pm 20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm 40u_mv_m+10u_m^{\ 2}}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\left(\frac{5}{u_{2m}}\right)\left(\frac{u_m\pm 4v_m}{u_{2m}}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{u_{2m}}{u_m\pm 4v_m}\right)=\left(\frac{u_m^{\ 2}+55v_m^{\ 2}}{u_m\pm 4v_m}\right)=\left(\frac{u_m^{\ 2}+55v_m^{\ 2}-(u_m\pm 4v_m)(\mathrm{u}_m\mp 4v_m)}{u_m\pm 4v_m}\right)$$

$$=\left(\frac{71v_m^{\ 2}}{u_m\pm 4v_m}\right)=\left(\frac{71}{u_m\pm 4v_m}\right)=\left(\frac{u_m\pm 4v_m}{71}\right)$$

引理 2 若 $4y_n+5$ 是平方数，则 $n\equiv 0,-1\left(\bmod 2^2\times 3^2\times 5\right)$。

证明 对序列 $\{4y_n+5\}$ 取不同模的方法来证明。

$\bmod 151$，排除 $n\equiv 2,3\left(\bmod 5\right)$，因为此时 $4y_n+5\equiv 87,113$，而 87、113 是 $\bmod 311$ 的平方非剩余，故排除 $n\equiv 2,3\left(\bmod 5\right)$，剩余 $n\equiv 0,1,4\left(\bmod 5\right)$。为节省篇幅，下面不再赘述排除的原由。

$\bmod 6301$，排除 $n\equiv 1,6\left(\bmod 10\right)$，剩余 $n\equiv 0,4,5,9\left(\bmod 10\right)$。

$\bmod 521$，排除 $n\equiv 4,9,14,\left(\bmod 20\right)$，剩余 $n\equiv 0,5,10,15,19\left(\bmod 20\right)$。

$\bmod 59$，排除 $n\equiv 1,4\left(\bmod 6\right)$，剩余 $n\equiv 0,5,15,20,30,35,39,45,50,59\left(\bmod 60\right)$。

$\bmod 2437$，排除 $n\equiv 2,3,5,9\left(\bmod 12\right)$，剩余 $n\equiv 0,20,30,35,59\left(\bmod 60\right)$。

$\bmod 19$，排除 $n\equiv 2,5\left(\bmod 9\right)$，剩余 $n\equiv 0,30,35,60,80,90,120,150,179\left(\bmod 180\right)$。

$\bmod 251,7489$，排除 $n\equiv 6,8,12\left(\bmod 18\right)$，剩余 $n\equiv 0,90,179\left(\bmod 180\right)$。

下面，利用计算的方法接着排除 $n\equiv 90\left(\bmod 180\right)$，令 $n=180\mathrm{k}+90$。若 $k=2k_1$，则 $n=360k+90$，那么 $n\equiv 2\left(\bmod 8\right)$，对序列 $\{4y_n+5\}$ 取 $\bmod 73$ 可排除 $n\equiv 2\left(\bmod 8\right)$ 的情形；若 $k=2k_1+1$，则 $n\equiv 6\left(\bmod 8\right)$，对序列 $\{4y_n+5\}$ 取 $\bmod 73$ 同样可排除 $n\equiv 6\left(\bmod 8\right)$ 的情形。

综上所述 $n\equiv 0,-1\left(\bmod 2^2\times 3^2\times 5\right)$。

引理 3 设 $n\equiv 0\left(\bmod 2^2\times 3^2\times 5\right)$，则当且仅当 $n=0$ 时，$4y_n+5$ 是平方数。

证明 设 $n\neq 0$，令 $n=(4k\pm 1)\times 2\times 3^2\times 5\times 2^t$ (其中 $t\geq 1$)。现取 m 为 2^t 、5×2^t 、3×2^t 之一，由引理 1 和(8)、(11)可推出

$$4y_n+5\equiv 4u_n+20v_n+5\equiv \pm 20v_m+5\left(\bmod u_{2m}\right)$$

故 $\left(\dfrac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\dfrac{\pm 20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\dfrac{u_m\pm 4v_m}{71}\right)$。

对 $\{u_m\pm 4v_m\}$ 取 mod 71，得到的两个剩余序列周期均为 36，再对 $\{2^t\}$ 取 mod 36，得到的剩余周期为 6。

情况 1 对于序列 $\{u_m-4v_m\}$，m 的选择如下：

$$m=\begin{cases} 2^t, t\equiv 0,1,4\left(\bmod 6\right) \\ 3\times 2^t, t\equiv 2\left(\bmod 6\right) \\ 5\times 2^t, t\equiv 5\left(\bmod 6\right) \\ 3\times 5\times 2^t, t\equiv 3\left(\bmod 6\right) \end{cases}$$

则有表 1

Table 1. The situation of $u_m-4v_m\left(\bmod 71\right)$

表 1. $u_m-4v_m\left(\bmod 71\right)$

$t\geq 1\left(\bmod 6\right)$	0	1	2	3	4	5
$m\left(\bmod 36\right)$	28	2	12	12	16	16
$u_m-4v_m\left(\bmod 71\right)$	17	5	31	31	13	13

对于表 1 中的所有 m，均有 $\left(\dfrac{u_m-4v_m}{71}\right)=-1$，进而 $\left(\dfrac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=-1$，所以 $4y_n+5$ 为非平方数。

情况 2 对于序列 $\{u_m+4v_m\}$，m 的选择如下：

$$m=\begin{cases} 2^t, t\equiv 1\left(\bmod 6\right) \\ 3\times 2^t, t\equiv 0,3,5\left(\bmod 6\right) \\ 3\times 5\times 2^t, t\equiv 2,4\left(\bmod 6\right) \end{cases}$$

同理有 $\left(\dfrac{u_m+4v_m}{71}\right)=-1$，进而 $\left(\dfrac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=-1$，所以 $4y_n+5$ 为非平方数。

因此当 $n=0$ 时，$4y_n+5=3^2$ 为平方数。

引理 4 设 $n\equiv -1\left(\bmod 2^2\times 3^2\times 5\right)$，则当且仅当 $n=-1$ 时，$4y_n+5$ 是平方数。

证明 设 $n\neq -1$，令 $n=(4k\pm 1)\times 2\times 3^2\times 5\times 2^t$ (其中 $t\geq 1$)，由(11)式可知，

$$4y_n+5=4y_{-1+2\times(4k\pm 1)\times 3^2\times 5\times 2^t}+5\equiv -4y_{-1}+5\equiv -111\left(\bmod u_m\right)$$

其中 $y_{-1}=29$，m 为 $2^t, 3\times 2^t, 5\times 2^t, 3\times 5\times 2^t$ 中的任意一个。

因为 $2\mid m$，此时 $u_m\equiv 1\left(\bmod 4\right)$，又由(5)易推出 $u_m\equiv 1\left(\bmod 3\right)$，则

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-111}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{3}{u_m}\right)\left(\frac{37}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{37}\right)$$

对 u_m 取 $\bmod 37$，剩余序列周期为 38，对序列 $\{2^t\}$ 取 $\bmod 38$，剩余序列周期为 18。令

$$m=\begin{cases}2^t, t\equiv 1,4,6,7,10,12,13,16 \pmod{18}\\ 3\times 2^t, t\equiv 0,2,14 \pmod{18}\\ 5\times 2^t, t\equiv 5,8,11,17 \pmod{18}\\ 3\times 5\times 2^t, t\equiv 3,9,15 \pmod{18}\end{cases}$$

则对所有的 m，均有 $\left(\frac{u_m}{37}\right)=-1$，从而有且只有当 $n=-1$ 时，$4y_n+5=11^2$ 为平方数。

3.2. 当 $(2y+3)^2=4\overline{y}_n+5$ 时

引理 5 当且仅当 $n=0$ 时，$4\overline{y}_n+5$ 是平方数。

证明 因为 $(2y+3)^2=4\overline{y}_n+5=-4y_n+5\ge 0$，解得 $y_n\le 1$，由(4)知 $y_0=1$，且 $\{y_n\}$ 是递增序列，又因为 $-4y_0+5=1^2$，所以当且仅当 $n=0$ 时，$4\overline{y}_n+5$ 是平方数，结论成立。

4. 定理证明

定理 不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的全部整数解为:

$$\begin{aligned}(x,y)=&(0,0),(-1,0),(-2,0),(-3,0),(0,-3),(-1,-3),(-2,-3),(-3,-3),\\&(0,-1),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(0,-2),(-1,-2),(-2,-2),(-3,-2),\end{aligned}$$

其中无正整数解。

证明 由引理 3 知 $(2y+3)^2=4y_0+5=3^2$，解得 $y=0$ 或者 $y=-3$，相对应的整数解为 $(-3,-3),(-2,-3),(-1,-3),(0,-3),(-3,0),(-2,0),(-1,0),(0,0)$。

由引理 4 知 $(2y+3)^2=4y_{-1}+5=11^2$，解得 $y=4$ 或者 $y=-7$，将 y 的值带入方程(2)，得 $\left[5\left(x^2+3x+1\right)\right]^2=46225$，即 $x^2+3x+1=\pm 43$，此时 x 无整数解。

由引理 5 知 $(2y+3)^2=-4y_0+5=1^2$，解得 $y=-1$ 或者 $y=-2$，相对应的整数解为 $(-3,-2),(-2,-2),(-1,-2),(0,-2),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(0,-1)$。

综上所述，该不定方程有 16 组整数解，没有正整数解，证毕。

5. 结论

本文以不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ 为研究对象，综合运用数论中的 Pell 方程理论、递归序列分析及二次平方剩余判定方法，完成了对该方程整数解的完整探究。研究首先通过代数变形将原方程转化为 $\left[5\left(x^2+3x+1\right)\right]^2-55\left(y^2+3y+1\right)^2=-30$ 的形式，明确其解与 Pell 方程 $x^2-55y^2=-30$ 两个结合类的对应关系，并推导得出递归序列 $\{y_n\}$ 的递推关系 $y_{n+1}=178y_n-y_{n-1}$（初始值 $y_0=1, y_1=149$）及相关同余性质；随后通过多轮模运算(如模 151、模 6301、模 521 等)与引理证明，逐步排除非解情形，最终证实该方程共存在 16 组整数解，分别为

$$\begin{aligned}(x,y)=&(0,0),(-1,0),(-2,0),(-3,0),(0,-3),(-1,-3),(-2,-3),(-3,-3),\\&(0,-1),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(0,-2),(-1,-2),(-2,-2),(-3,-2),\end{aligned}$$

且不存在正整数解。本文的核心贡献在于填补了特定参数组合下同类不定方程的研究空白。对于形

如 $px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$ (其中 $(p,q)=1$，且 $p,q\in\mathbb{N}^*$)的不定方程，此前学界已在 $p=1,q=2$、$p=1,q=7$、$p=5,q=42$ 等参数下取得求解成果，但 $p=5,q=11$ 的情形长期未得到解决。本文通过严谨的推导与验证，明确了该参数组合下方程的解的数量与具体形式，进一步完善了此类不定方程的解谱，为后续同类方程的研究提供了关键的基础结论。

参考文献

[1] Cohn, J.H.E. (1971) The Diophantine Equation x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 2y(y + 1)(y + 2)(y + 3). *Pacific Journal of Mathematics*, **37**, 331-335. https://doi.org/10.2140/pjm.1971.37.331

[2] 罗明. 关于不定方程 x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 7y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1991(1): 1-8.

[3] 段辉明, 杨春德. 关于不定方程 x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 19y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2009, 32(1): 60-63.

[4] 郭凤明, 罗明. 关于不定方程 x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 13y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(5): 101-105.

[5] 王聪. 关于不定方程 x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 30y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2016, 33(1): 29-32.

[6] 张配, 罗明. 关于不定方程 x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 39y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 重庆科技学院学报(自然科学版), 2017, 19(3): 120-122.

[7] 李妮. 关于不定方程 5x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 14y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2017, 34(4): 41-45.

[8] 卢安然. 关于不定方程 3x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 10y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 数学的实践与认识, 2023, 53(11): 265-270.

[9] 张艺宝. 关于不定方程 5x(x1)(x2)(x3) = 42y(y1)(y2)(y3) [J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2105-2109.

[10] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 15-29.