Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(10), 89-91
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1410422

Hans汉斯

线性代数中有关逆矩阵的几个等价命题

王天波

上海工程技术大学数理与统计学院，上海

收稿日期：2025年8月29日；录用日期：2025年9月23日；发布日期：2025年9月30日

摘　要

本文罗列了《线性代数》中有关逆矩阵的几个等价命题，并且给出了相应证明。本文不仅说明了逆矩阵在《线性代数》课程中的重要性，而且以逆矩阵为主线，将《线性代数》中大部分概念和结论串联在一起，有助于学生更好地理解和学习该课程。

关键词

方阵，逆矩阵，秩，特征值

Several Equivalent Propositions about Inverse Matrices in Linear Algebra

Tianbo Wang

School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai

Received: August 29, 2025; accepted: September 23, 2025; published: September 30, 2025

Abstract

This paper systematically presents several equivalent propositions concerning the inverse matrices in Linear Algebra and provides the corresponding proofs. The study not only highlights the crucial role of inverse matrices in the course but also employs them as a central thread to connect most key concepts and conclusions within the subject. This approach can help students to understand and learn the course.

Keywords

Array, Inverse Matrix, Rank, Eigenvalue

文章引用: 王天波. 线性代数中有关逆矩阵的几个等价命题[J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 89-91.
DOI: 10.12677/aam.2025.1410422

1. 引言

《线性代数》课程作为高等院校理工科学生必修的基础学科之一，内容比较抽象，概念、法则和性质很多。特别地，这些内容往往是从不同角度描述向量之间的线性关系和变换特征，导致这些内容相互交织在一起，难以认清其中的本质，因而学生普遍感觉学习该课程较为困难。即使在结业考试中取得了较好的成绩，但往往也很难将该课程的内容讲清楚，特别是学习该课程的目的。当前，众多学者对该课程的教学方法和教学内容进行了深入研究，取得了很多成果[1] [2]。本文将以逆矩阵为主线，讨论几个命题之间的等价关系，这样可以将《线性代数》课程中的行列式、逆矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组及特征值等诸多概念和性质串联起来，帮助学生更好地理解和掌握本课程。

本文的目的是证明以下 10 个命题等价。

定理[3]-[5] 假设 A 是 n 阶实矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，则以下命题等价：

(1) A 为可逆矩阵；

(2) A 的行列式 $|A| \neq 0$；

(3) A 为非奇异矩阵；

(4) A 没有零特征值；

(5) A 的伴随矩阵 A^* 可逆；

(6) 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解；

(7) A 的列(行)向量组线性无关；

(8) A 的秩 $r(A) = n$；

(9) A 可以表示成有限个初等矩阵的乘积；

(10) 存在 n 阶可逆矩阵 P 和 Q，使得 $PAQ = E$。

证明：分五组证明。

2. 证明(4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4)

$(4) \Rightarrow (2)$ 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值，则根据特征值的性质知 $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$。因为 $\lambda_k \neq 0$，$k = 1, 2, \ldots, n$，故 $|A| \neq 0$。

$(2) \Rightarrow (3)$ 直接根据定义得到。(定义：当 $|A| \neq 0$，方阵 A 称为非奇异矩阵。)

$(3) \Rightarrow (4)$ 因为 A 为非奇异矩阵，故 $|A| \neq 0$。又因为 $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$，故 $\lambda_k \neq 0$，$k = 1, 2, \ldots, n$，即 A 没有零特征值。

3. 证明(1) $\Leftrightarrow$ (2)

$(1) \Rightarrow (2)$ 因为 A 为可逆阵，故存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = E$。又因为 $|AB| = |A| \cdot |B| = 1$，故 $|A| \neq 0$。

$(2) \Rightarrow (1)$ 由于 $|A| \neq 0$，故 $\frac{1}{|A|} A^*$ 存在，其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵。直接计算可得 $A \cdot \frac{1}{|A|} A^* = E$，故 A 为可逆矩阵，而且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$。

4. 证明(1)⇔(5)

$(1)\Rightarrow(5)$ 因为 A 为可逆阵，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，即 $A^*=|A|\cdot A^{-1}$，故伴随矩阵 A^* 可逆，且 $\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$。

$(5)\Rightarrow(1)$ 由于 A^* 可逆，故 $|A^*|\neq 0$。因为 $|A^*|=||A|\cdot A^{-1}|=|A|^{n-1}$，故 $|A|\neq 0$， A 为可逆矩阵。

5. 证明(2)⇒(6)⇒(7)⇒(8)⇒(2)

$(2)\Rightarrow(6)$ 因为 $|A|\neq 0$，则由克莱姆法则知齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解。

$(6)\Rightarrow(7)$ 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，将 A 按列分块，记为 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$，其中 $\alpha_i=\left(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}\right)^T$。假设存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$。由于 $Ax=0$ 仅有零解，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，即 A 的列向量组线性无关。同理可以证明 A 的行向量组线性无关。

$(7)\Rightarrow(8)$ 由于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故根据向量组秩的定义知 $r(A)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=n$。

$(8)\Rightarrow(2)$ 反证法。假设 $|A|=0$，则 $Ax=0$ 有非零解。又因为 $r(A)=n$，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。根据线性无关的定义，只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时，等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 成立。即齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解，这与 $Ax=0$ 有非零解矛盾。故 $|A|\neq 0$。

6. 证明(1)⇒(9)⇒(10)⇒(1)

$(1)\Rightarrow(9)$ 假设 A 的标准型矩阵为 F，由于 A 与 F 等价，知 F 可以通过有限次的初等变换化为 A，即存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$ 使 $A=P_1\cdots\cdots P_kFP_{k+1}\cdots\cdots P_l$。因为 A 是可逆矩阵，而且 $P_1,P_2,\cdots,P_l$ 都是可逆矩阵，故标准型 F 可逆。假设 $F=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $r<n$，则 $|F|=0$，与 F 可逆矛盾。因此，必有 $r=n$，即 $F=E$，从而 $A=P_1\cdots\cdots P_k\cdot P_{k+1}\cdots\cdots P_l$。

$(9)\Rightarrow(10)$ 假设 $A=P_1\cdots\cdots P_k\cdot P_{k+1}\cdots\cdots P_l$，其中 P_i， $i=1,2,\cdots,l$， 为初等矩阵，则 $P_k^{-1}\cdots\cdots P_1^{-1}AP_l^{-1}\cdots\cdots P_{k+1}^{-1}=E$，令 $P=P_k^{-1}\cdots\cdots P_1^{-1}$， $Q=P_l^{-1}\cdots\cdots P_{k+1}^{-1}$，则有 $PAQ=E$。由于初等矩阵的逆也是可逆矩阵，故矩阵 P 和 Q 可逆。

$(10)\Rightarrow(1)$ 因为 P 和 Q 为可逆矩阵，故 $|P|\neq 0$ 和 $|Q|\neq 0$。由于 $|PAQ|=|P|\cdot|A|\cdot|Q|=1$，故 $|A|\neq 0$，即 A 为可逆矩阵。

通过学习该定理，学生对《线性代数》课程会有一个清晰的整体认识，对学好这门课程具有积极的指导意义。后续，我们将进一步探讨如何更加通俗易懂地教好这门课程。

参考文献

[1] 王跃恒，李应求. 关于以学生为中心的线性代数教学研究[J]. 中国大学数学, 2011(8): 59-61.

[2] 王跃恒，孙倩，等. “以学生为中心”的线性代数课程教学研究与实践[J]. 湖南工业大学学报, 2010(24): 99-101.

[3] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 上海: 同济大学出版社, 2011.

[4] 居余马，等，著. 线性代数[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.

[5] 吴隋超，王国强，殷志祥，著. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2024.