

一种新的NS方程算法执行过程的数学框架

凌洪涛

安徽国际商务职业学院信息工程学院, 安徽 合肥

收稿日期: 2025年9月11日; 录用日期: 2025年10月4日; 发布日期: 2025年10月14日

摘要

Navier-Stokes (NS)方程的数值求解依赖算子分裂、多物理场耦合等复杂算法, 但传统数学工具(如集合论、范畴论)难以严格描述算法选择逻辑与执行过程: 集合论无法刻画动态操作-结果关联, 范畴论虽具备抽象统一视角却缺乏计算可行性, 导致算法设计常依赖经验, 执行过程“黑箱化”。为解决此问题, 本文提出基于广义映射理论(GMT)的数学框架, 通过“对象集-操作集-结果集-生成关系”四元结构, 将NS方程数值求解的静态参数(物理量、网格)、动态操作(对流/粘性离散、压力重构)、分支结果(多算法选择)转化为可计算的张量映射。该框架不仅像范畴论一样为算法提供严格数学语言, 更通过操作显式化、路径可追踪特性, 使算子分裂的子步骤、多模型融合的概率权重均成为透明可控的映射单元。以汽车外流场模拟、血栓形成血流模拟为案例, 验证框架可精准描述不同NS算法的执行逻辑, 且支持流场结果与计算性能的定量追踪。实验表明, 相比传统描述方法, 该框架使算法选择的数学一致性和执行过程的可解释性的实现成为可能, 为NS方程数值算法的标准化、透明化提供新工具。

关键词

广义映射理论(GMT), Navier-Stokes方程(NS方程), 算子分裂, 算法透明化, 数值模拟, 张量映射

A New Mathematical Framework for Describing the Execution Process of NS Equation Algorithms

Hongtao Ling

Information Engineering College of Anhui Institute of International Business, Hefei Anhui

Received: September 11, 2025; accepted: October 4, 2025; published: October 14, 2025

Abstract

The numerical solution of the Navier-Stokes (NS) equations relies on complex algorithms such as

operator splitting and multi-physics field coupling. However, traditional mathematical tools (e.g., set theory, category theory) struggle to rigorously describe the algorithm selection logic and execution process: set theory cannot characterize the dynamic operation-result relationships, while category theory, despite its abstract and unified perspective, lacks computational feasibility. This leads to algorithm design often depending on experience, resulting in an “black-box” execution process. To address this issue, this paper proposes a mathematical framework based on the Generalized Mapping Theory (GMT). Through a four-element structure of “object set-operation set-result set-generation relationship”, it transforms the static parameters (physical quantities, grids), dynamic operations (convection/viscous discretization, pressure reconstruction), and branch results (multiple algorithm selections) in the numerical solution of NS equations into computable tensor mappings. This framework not only provides a rigorous mathematical language for algorithms like category theory but also, through the explicit nature of operations and traceable path characteristics, makes sub-steps of operator splitting and probability weights of multi-model fusion transparent and controllable mapping units. Taking automotive external flow field simulation and thrombus formation blood flow simulation as cases, it is verified that the framework can accurately describe the execution logic of different NS algorithms and support the quantitative tracking of flow field results and computational performance. Experiments show that compared with traditional description methods, this framework enables the realization of mathematical consistency in algorithm selection and interpretability in the execution process, providing a new tool for the standardization and transparency of NS equation numerical algorithms.

Keywords

Generalized Mapping Theory (GMT), Navier-Stokes Equations (NS Equations), Operator Splitting, Algorithm Transparency, Numerical Simulation, Tensor Mapping

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Navier-Stokes 方程作为描述流体运动的核心方程，在航空航天、生物医学等领域的数值求解中面临严峻挑战：一方面，其非线性与耦合性需依赖算子分裂、多尺度模型等复杂算法(如分离流模拟中粘性项与对流项的分步离散)；另一方面，现有数学工具难以对算法的“选择-执行-结果”全流程进行严格刻画。集合论仅能静态描述数据集合，无法捕捉操作与结果的动态生成关系；范畴论虽能在抽象层面统一不同算法的结构共性，但其“对象-态射”的高度抽象性与计算机数值计算的工程需求脱节，难以直接转化为可执行的追踪逻辑[1]。

为填补这一空白，Ling 提出广义映射理论(GMT)，通过“对象集 A - 操作集 F - 结果集 B - 生成关系 $\vdash$ ”的四元框架，实现动态行为-结果关联的数学建模，其第一种确定性形式($A \vdash B | F$)已被验证可描述静态分布与简单动态过程[2]。此前研究中，基于 GMT 第一种形式的简化 NS 方程代码实验已初步验证该理论的可行性：在二维管道流模拟中，通过将初始流场定义为对象集、有限差分离散定义为操作集，成功实现速度场演化的透明追踪[3] [4]。

在文献[5]中，用 GMT 理论的嵌套形式，分别描述了常微分方程，偏微分方程和随机微分方程以及随机积分方程。以文献中最复杂的随机积分举例如下：

方程形式： $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$ (X_0 为初始值，描述由确定性积分与随机积分叠加

的过程) [6]。

嵌套逻辑:

第一层映射(组件描述, 含概率性):

o 描述初始值 X_0 : 对象集 $A_1 = \{X_0\}$ (常数), 操作集 $F_1 = \{\text{恒等映射}\}$, 结果集 $B_1 = \{X_0\}$, 即 $A_1 \vdash B_1 \mid F_1$ 。

o 描述确定性积分 $\int_0^t \mu(X_s) ds$: 对象集 $A_2 = \{X_s\}$, 操作集 $F_2 = \left\{ \int_0^t \mu(\cdot) ds \right\}$ (黎曼积分运算), 结果集 $B_2 = \left\{ \int_0^t \mu(X_s) ds \right\}$, 即 $A_2 \vdash B_2 \mid F_2$ 。

o 描述随机积分 $\int_0^t \sigma(X_s) dW_s$: 对象集 $A_3 = \{X_s\}$, 操作集 $F_3 = \left\{ \int_0^t \sigma(\cdot) dW_s \right\}$ (伊藤积分运算), 结果集 $B_3 = \left\{ \int_0^t \sigma(X_s) dW_s \right\}$, 概率集 $P = \{P(W_s)\}$, 即 $A_3 \vdash B_3 \mid F_3 / P$ 。

第二层映射(方程构建): 通过“加法”与“等号”关联 B_1, B_2, B_3 , 设操作集 $F = \{+, =\}$, 结果集 $B = \{X_t\}$, 则 $(B_1 \oplus B_2 \oplus B_3) \vdash B \mid F / P$ 。

完整嵌套形式: $\left[(A_1 \vdash B_1 \mid F_1) \oplus (A_2 \vdash B_2 \mid F_2) \oplus (A_3 \vdash B_3 \mid F_3 / P) \right] \vdash B \mid F = \{+, =\} / P$

以上只是用嵌套形式对方程本身的描述进行重构表达, 并不涉及方程的数值计算过程, 具体的数值计算过程可以根据具体的算法和定位(就是我们希望在运行中输出哪些计算过程信息)需要, 对计算过程进行重构封装, 不需要定位的不建议重构封装, 因为目前来看, 定位的重构封装会增加算法的时间和空间复杂程度。

而要将伊藤积分(以随机微分方程 $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$ 为核心的随机分析对象)用范畴论表达, 需从范畴的构造、态射的定义以及结构间的函子关系入手, 以下是关键思路:

1) 定义基础范畴 **Stoch** (随机分析范畴)

对象(Objects):

取“带滤波的概率空间上的随机过程类”为对象。具体来说, 对象可表示为 $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P, X)$, 其中:

(Ω, F, P) 是概率空间;

$(F_t)_{t \geq 0}$ 是满足“通常条件”(右连续、包含所有零概率集)的滤波(用来描述“信息随时间的演化”);

$X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是适应于该滤波的随机过程(即对每个 t , X_t 是 F_t -可测的, 保证“时刻 t 的过程值仅依赖于时刻 t 前的信息”)。

态射(Morphisms):

态射是“保持随机结构的映射”, 通常取随机过程间的适应映射(或更严格的“随机流”“鞅变换”等, 依研究粒度而定)。例如, 若有对象 $X = (X_t)$ 和 $Y = (Y_t)$, 态射 $f: X \rightarrow Y$ 需满足: 对每个 t , $Y_t = f(X_s)_{s \leq t}$ 且 Y 适应于 X 所在的滤波(或自身的滤波)。

2) 伊藤积分的“函子化”表达

伊藤积分是“从‘被积过程空间’到‘积分过程空间’的映射”, 可通过函子来刻画这种“空间的变换与态射的保持”。

被积过程的范畴 **Integrables**:

对象是“满足伊藤可积条件的随机过程”(如关于布朗运动 W 平方可积的适应过程 $\sigma(X_s)$); 态射是“过程间的适应变换”(如 $\sigma(X_s) \rightarrow \sigma'(X_s)$ 的适应映射)。

积分过程的范畴 **Integrals**:

对象是“伊藤积分的结果过程”(如 $\int_0^t \sigma(X_s) dW_s$)；态射是“积分过程间的变换”(由被积过程的态射诱导)。

伊藤积分函子 $I: \text{Integrables} \rightarrow \text{Integrals}$:

对象层面：将被积过程 $\sigma(X_s)$ 映射为积分过程 $I(\sigma(X_s)) = \int_0^\cdot \sigma(X_s) dW_s$;

态射层面：若有态射 $\phi: \sigma(X_s) \rightarrow \sigma'(X_s)$ (被积过程的适应变换)，则诱导态射

$I(\phi): \int_0^\cdot \sigma(X_s) dW_s \rightarrow \int_0^\cdot \sigma'(X_s) dW_s$, 保持“积分随被积过程的变换规律”。

3) 随机微分方程的“范畴论整合”

完整的随机微分方程 $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$ 视为范畴间的态射复合或函子的联合作用：

确定性积分 $\int_0^t \mu(X_s) ds$ 对应“从过程到其 Lebesgue 积分过程”的函子 L (类似伊藤积分函子，但针对 Lebesgue 积分)；

随机微分方程的解过程 X ，可看作“初始对象 X_0 经 L (确定性积分)与 I (伊藤积分)作用后，在 Stoch 范畴内的‘极限’或‘解对象’”。

从上面的案例可以看出用范畴论描述伊藤积分比较麻烦，难以理解，最重要的是难以直接代入计算，而用 GMT (广义映射理论)去描述伊藤积分，层次结构清晰，容易理解，而且可以进行计算。

在此基础上，本文进一步拓展 GMT 的应用场景，聚焦两类高复杂度 NS 方程数值实验：1) 汽车外流场模拟(高雷诺数湍流、复杂几何边界)，需融合 WENO 对流离散与动态压力重构算法[7]；2) 血栓形成血流模拟(气液两相流、剪切率依赖的生物力学效应)，涉及涡粘度模型与血小板输运方程的耦合[8]。本文的核心工作包括：1) 构建适用于两类实验的 GMT 张量映射框架，明确对象集的物理参数张量、操作集的算法离散规则、结果集的流场分支定义；2) 给出两类实验算法执行过程的详细数学描述，包括算子分裂的子操作映射、多模型融合的概率加权逻辑；3) 通过与传统 spio 算法、投影方法的比对，验证框架的描述精度与计算兼容性。

2. 汽车 NS 方程数值计算过程的 GMT 数学描述

2.1. 对象集 A (初始输入集合)

A 包含数值求解所需的初始与静态信息，具体为：

物理参数集合：雷诺数 $Re = 10^6$ 、来流速度 $U_\infty = 30.0$ m/s、特征长度 $L = 4.0$ m、运动粘度 $\nu = \frac{U_\infty L}{Re}$ 、

空气密度 $\rho = 1.225$ kg/m³；

计算域参数集合：计算域尺寸 $L_x = 20.0$ m、 $L_y = 8.0$ m、 $L_z = 5.0$ m，网格数 $n_x = 100$ 、 $n_y = 60$ 、 $n_z = 50$ ，网格步长 $dx = \frac{L_x}{n_x - 1}$ 、 $dy = \frac{L_y}{n_y - 1}$ 、 $dz = \frac{L_z}{n_z - 1}$ ；

时间参数集合：时间步长 $dt = 0.002$ s、总时间 $T = 2.0$ s，时间步数 $nt = \text{int}(T/dt)$ ；

汽车参数集合：车身长度 $\text{car_length} = 4.0$ m、宽度 $\text{car_width} = 1.8$ m、高度 $\text{car_height} = 1.5$ m；

网格坐标张量： $X, Y, Z \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$ ，为计算域内各网格点的坐标张量；

初始流场张量：初始速度场 $U_0 = (u_0, v_0, w_0) \in R^{n_x \times n_y \times n_z \times 3}$ (初始速度全为 0，入口边界 $u_0 = U_\infty$)，初始压力场 $P_0 \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$ (初始压力全为 0)；

几何张量集合：车身区域掩码张量 $M_{\text{car}} \in \{0, 1\}^{n_x \times n_y \times n_z}$ (标记车身占据的网格点)、车身表面区域掩码张量 $M_{\text{surf}} \in \{0, 1\}^{n_x \times n_y \times n_z}$ (标记车身表面的网格点)、车身表面法向量张量 $n = (n_x, n_y, n_z) \in R^{n_x \times n_y \times n_z \times 3}$ (车身表面各点的单位法向量)。

2.2. 操作集 F (离散操作集合)

F 是用于离散求解 Navier-Stokes 方程的操作集合, 随迭代动态更新, 包含以下子操作:

对流操作 F_{conv} : 通过中心差分与曲率感知通量限制器离散对流项 $u \cdot \nabla u$, 数学上表示为 $U_{conv} = F_{conv} \cdot U$, 其中 F_{conv} 为四阶对流权重张量, U 为当前速度场张量, 通量限制器 $\phi = \min\left(1.0, \frac{\text{curvature} \cdot dx}{U_{\infty} dt + \varepsilon}\right)$ (curvature 为曲率场, $\varepsilon = 1e-10$ 为防除零小量);

粘性操作 F_{visc} : 通过拉普拉斯差分与自适应粘性系数离散粘性项 $\nu \nabla^2 u$, 数学上表示为

$U_{visc} = (\nu + \alpha) \cdot F_{lap} \cdot U$, 其中 F_{lap} 为四阶拉普拉斯权重张量, 自适应粘性系数 $\alpha = 0.2 \cdot \frac{dx^2}{dt} \cdot I\left(|\Omega| > 0.5 \frac{U_{\infty}}{dx}\right)$

(Ω 为涡量场, $I(\cdot)$ 为指示函数);

压力修正操作 F_p : 通过 7 次邻域平均迭代离散压力泊松方程的近似形式, 数学上表示为 $\Delta P = F_p \cdot (\nabla \cdot U^*)$, 其中 F_p 为四阶邻域平均权重张量, U^* 为中间速度场张量, ΔP 为压力修正量, 迭代规则为 $\Delta P^{(i)} = 0.166 \cdot (\Delta P^{(i-1)} \text{ 邻域和}) - \frac{dt}{\rho} \cdot \text{div} \ (i=1, 2, \dots, 7, \text{ div 为法向散度})$;

边界条件操作 F_{bc} : 对速度场和压力场应用边界条件(入口、出口、车身无滑移、风洞壁面等), 数学上表示为 $U' = F_{bc} \cdot U$, $P' = F_{bc} \cdot P$, 其中 F_{bc} 为边界权重张量;

源项操作集合:

壁面摩擦操作 F_{surf} : 离散壁面摩擦效应, 数学上表示为 $\tau = -0.005 \cdot |U| \cdot M_{surf}$ ($|U|$ 为速度模);

尾涡阻尼操作 F_{wake} : 离散尾涡阻尼效应, 数学上表示为 $\tau_{wake} = -0.05 \cdot \Omega \cdot M_{wake}$ (M_{wake} 为尾涡区域掩码张量)。

2.3. 结果集 B_k (第 k 步迭代结果集合)

B_k 包含第 k 步迭代的中间与最终结果, 具体为:

中间速度场张量 $U_k^* \in R^{n_x \times n_y \times n_z \times 3}$, 由动量方程无压力项部分离散得到, 即

$U_k^* = U_{k-1} + dt \cdot (-U_{conv,k} + U_{visc,k} + \tau + \tau_{wake})$;

压力修正量张量 $\Delta P_k \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$, 由压力修正操作 $F_{p,k}$ 作用于中间速度场法向散度得到;

最终速度场张量 $U_k \in R^{n_x \times n_y \times n_z \times 3}$, 由中间速度场经压力梯度修正得到, 即 $U_k = U_k^* - \omega \cdot \frac{dt}{\rho} \cdot \nabla \Delta P_k$

($\omega = 0.5$ 为松弛因子);

最终压力场张量 $P_k \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$, 由初始压力场经压力修正量松弛叠加得到, $P_k = P_{k-1} + \omega \cdot \Delta P_k$;

涡量张量 $\Omega_k \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$, 由速度场旋度计算得到, 即 $\Omega_k = \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y}$;

气动力系数对 $C_k = (C_{d,k}, C_{l,k})$, 由压力力与粘性力在车身表面的积分无量纲化得到, 即

$C_{d,k} = \frac{F_{x,p} + F_{x,v}}{q_{\infty} A_{ref}}$, $C_{l,k} = \frac{F_{y,p} + F_{y,v}}{q_{\infty} A_{ref}}$ ($F_{x,p}, F_{y,p}$ 为压力力分量, $F_{x,v}, F_{y,v}$ 为粘性力分量, $q_{\infty} = 0.5 \rho U_{\infty}^2$ 为来流动压, A_{ref} 为车身参考面积);

性能指标集合: 第 k 步迭代耗时 t_k 、内存占用 mem_k 。

2.4. 迭代映射关系

1) 操作集自迭代(更新操作集):

基于第 $k-1$ 步的涡量张量 Ω_{k-1} 调整粘性操作 F_{visc} 中的自适应粘性系数 α ，更新规则为

$$\alpha_k(x) = 0.2 \cdot \frac{dx^2}{dt} \cdot I\left(|\Omega_{k-1}(x)| > 0.5 \frac{U_\infty}{dx}\right) \quad (x \text{ 为网格点坐标}, I(\cdot) \text{ 为指示函数}), \text{ 得到第 } k \text{ 步操作集 } F_k, \text{ 其余}$$

子操作(对流、压力修正、边界条件、源项等)保持与 F_{k-1} 一致。

2) 原集不变迭代(生成结果集):

固定对象集 A ，通过第 k 步操作集 F_k 生成第 k 步结果集 B_k ，具体步骤为:

对流项计算: $U_{conv,k} = F_{conv,k} \cdot U_{k-1}$;

粘性项计算: $U_{visc,k} = F_{visc,k} \cdot U_{k-1}$;

源项计算: $\tau_k = F_{surf,k} \cdot (U_{k-1}, M_{surf})$, $\tau_{wake,k} = F_{wake,k} \cdot (\Omega_{k-1}, M_{wake})$;

中间速度生成: $U_k^* = U_{k-1} + dt \cdot (-U_{conv,k} + U_{visc,k} + \tau_k + \tau_{wake,k})$;

法向散度计算: $div_k = \nabla \cdot (U_k^* \cdot n)$;

压力修正生成: $\Delta P_k = F_{p,k} \cdot div_k$ (经 7 次邻域平均迭代);

最终流场更新: $U_k = U_k^* - \omega \cdot \frac{dt}{\rho} \cdot \nabla \Delta P_k$, $P_k = P_{k-1} + \omega \cdot \Delta P_k$;

边界修正: $U'_k = F_{bc,k} \cdot U_k$, $P'_k = F_{bc,k} \cdot P_k$;

辅助量计算: $\Omega_k = \nabla \times U'_k$, $C_k = \frac{\int (P'_k \cdot n + \tau_{visc,k}) dV}{q_\infty A_{ref}}$ ($\tau_{visc,k}$ 为壁面粘性应力), 并记录 t_k 、 mem_k 。

2.5. 全局执行流程

1) 初始化($k=0$): 通过 $A \vdash B_0 \mid F_0$ 生成初始结果集 B_0 ，其中 U_0 按入口边界初始化(入口 $u_0 = U_\infty$ ，其余速度分量为 0)， $P_0 = 0$ ， $\Omega_0 = 0$ ， $C_0 = (0,0)$ 。

2) 迭代求解($k=1$ 到 nt): 对每个时间步，先执行操作集自迭代 $F_{k-1} \vdash F_k \mid f$ ，再执行原集不变迭代 $A \vdash B_k \mid F_k$ ，更新结果集。每间隔一定步数(如 $nt/10$ 、 $nt/5$)，输出当前迭代信息并进行流场与性能可视化。

3) 最终结果输出($k=nt$): 通过 $A \vdash B_{final} \mid F_{nt}$ 生成最终结果集 B_{final} ，包含最终速度场 U_{nt} 、压力场 P_{nt} 、气动力系数 C_{final} 与总性能指标(总耗时、平均步长耗时、峰值内存)。

3. 血栓流动模拟 NS 方程数值计算过程的 GMT 数学描述

3.1. 对象集 A (初始输入集合)

A 包含数值求解所需的初始与静态信息，具体为:

物理参数集合: 雷诺数 $Re = 10^6$ 、来流速度 $U_\infty = 30.0 \text{ m/s}$ 、特征长度 $L = 4.0 \text{ m}$ 、运动粘度 $\nu = \frac{U_\infty L}{Re}$ 、

空气密度 $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$;

计算域参数集合: 计算域尺寸 $L_x = 20.0 \text{ m}$ 、 $L_y = 8.0 \text{ m}$ 、 $L_z = 5.0 \text{ m}$ ，网格数 $n_x = 100$ 、 $n_y = 60$ 、 $n_z = 50$ ，网格步长 $dx = \frac{L_x}{n_x - 1}$ 、 $dy = \frac{L_y}{n_y - 1}$ 、 $dz = \frac{L_z}{n_z - 1}$;

时间参数集合: 时间步长 $dt = 0.002 \text{ s}$ 、总时间 $T = 2.0 \text{ s}$ ，时间步数 $nt = \text{int}(T/dt)$;

汽车参数集合: 车身长度 $car_length = 4.0 \text{ m}$ 、宽度 $car_width = 1.8 \text{ m}$ 、高度 $car_height = 1.5 \text{ m}$;

网格坐标张量: $X, Y, Z \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$ ，为计算域内各网格点的坐标张量;

初始流场张量: 初始速度场 $U_0 = (u_0, v_0, w_0) \in R^{n_x \times n_y \times n_z \times 3}$ (初始速度全为 0，入口边界 $u_0 = U_\infty$)，初始

压力场 $P_0 \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$ (初始压力全为 0);

几何张量集合: 车身区域掩码张量 $M_{car} \in \{0,1\}^{n_x \times n_y \times n_z}$ (标记车身占据的网格点)、车身表面区域掩码张量 $M_{surf} \in \{0,1\}^{n_x \times n_y \times n_z}$ (标记车身表面的网格点)、车身表面法向量张量 $n = (n_x, n_y, n_z) \in R^{n_x \times n_y \times n_z \times 3}$ (车身表面各点的单位法向量)。

3.2. 操作集 F (离散操作集合)

F 是用于离散求解 Navier-Stokes 方程的操作集合, 随迭代动态更新, 包含以下子操作:

对流操作 F_{conv} : 通过中心差分与曲率感知通量限制器离散对流项 $u \cdot \nabla u$, 数学上表示为 $U_{conv} = F_{conv} \cdot U$, 其中 F_{conv} 为四阶对流权重张量, U 为当前速度场张量, 通量限制器 $\phi = \min \left(1.0, \frac{\text{curvature} \cdot dx}{U_\infty dt + \varepsilon} \right)$ (curvature 为曲率场, $\varepsilon = 1e-10$ 为防除零小量);

粘性操作 F_{visc} : 通过拉普拉斯差分与自适应粘性系数离散粘性项 $\nu \nabla^2 u$, 数学上表示为 $U_{visc} = (\nu + \alpha) \cdot F_{lap} \cdot U$, 其中 F_{lap} 为四阶拉普拉斯权重张量, 自适应粘性系数 $\alpha = 0.2 \cdot \frac{dx^2}{dt} \cdot I \left(|\Omega| > 0.5 \frac{U_\infty}{dx} \right)$ (Ω 为涡量场, $I(\cdot)$ 为指示函数);

压力修正操作 F_p : 通过 7 次邻域平均迭代离散压力泊松方程的近似形式, 数学上表示为 $\Delta P = F_p \cdot (\nabla \cdot U^*)$, 其中 F_p 为四阶邻域平均权重张量, U^* 为中间速度场张量, ΔP 为压力修正量, 迭代规则为 $\Delta P^{(i)} = 0.166 \cdot (\Delta P^{(i-1)} \text{ 邻域和}) - \frac{dt}{\rho} \cdot \text{div}$ ($i = 1, 2, \dots, 7$, div 为法向散度);

边界条件操作 F_{bc} : 对速度场和压力场应用边界条件(入口、出口、车身无滑移、风洞壁面等), 数学上表示为 $U' = F_{bc} \cdot U$, $P' = F_{bc} \cdot P$, 其中 F_{bc} 为边界权重张量;

源项操作集合:

壁面摩擦操作 F_{surf} : 离散壁面摩擦效应, 数学上表示为 $\tau = -0.005 \cdot |U| \cdot M_{surf}$ ($|U|$ 为速度模);

尾涡阻尼操作 F_{wake} : 离散尾涡阻尼效应, 数学上表示为 $\tau_{wake} = -0.05 \cdot \Omega \cdot M_{wake}$ (M_{wake} 为尾涡区域掩码张量)。

3.3. 结果集 B_k (第 k 步迭代结果集合)

B_k 包含第 k 步迭代的中间与最终结果, 具体为:

中间速度场张量 $U_k^* \in R^{n_x \times n_y \times n_z \times 3}$, 由动量方程无压力项部分离散得到, 即

$$U_k^* = U_{k-1} + dt \cdot (-U_{conv,k} + U_{visc,k} + \tau + \tau_{wake});$$

压力修正量张量 $\Delta P_k \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$, 由压力修正操作 $F_{p,k}$ 作用于中间速度场法向散度得到;

最终速度场张量 $U_k \in R^{n_x \times n_y \times n_z \times 3}$, 由中间速度场经压力梯度修正得到, 即 $U_k = U_k^* - \omega \cdot \frac{dt}{\rho} \cdot \nabla \Delta P_k$

($\omega = 0.5$ 为松弛因子);

最终压力场张量 $P_k \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$, 由初始压力场经压力修正量松弛叠加得到, 即 $P_k = P_{k-1} + \omega \cdot \Delta P_k$;

涡量张量 $\Omega_k \in R^{n_x \times n_y \times n_z}$, 由速度场旋度计算得到, 即 $\Omega_k = \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y}$;

气动系数对 $C_k = (C_{d,k}, C_{l,k})$, 由压力力与粘性力在车身表面的积分无量纲化得到, 即

$$C_{d,k} = \frac{F_{x,p} + F_{x,v}}{q_\infty A_{ref}}, \quad C_{l,k} = \frac{F_{y,p} + F_{y,v}}{q_\infty A_{ref}} \quad (F_{x,p}, F_{y,p} \text{ 为压力力分量}, F_{x,v}, F_{y,v} \text{ 为粘性力分量}, q_\infty = 0.5 \rho U_\infty^2 \text{ 为来流动压}, A_{ref} \text{ 为车身参考面积});$$

性能指标集合：第 k 步迭代耗时 t_k 、内存占用 mem_k 。

3.4. 迭代映射关系

1) 操作集自迭代(更新操作集):

基于第 $k-1$ 步的涡量张量 Ω_{k-1} 调整粘性操作 F_{visc} 中的自适应粘性系数 α ，更新规则为

$$\alpha_k(x) = 0.2 \cdot \frac{dx^2}{dt} \cdot I\left(\left|\Omega_{k-1}(x)\right| > 0.5 \frac{U_\infty}{dx}\right) \quad (x \text{ 为网格点坐标}, I(\cdot) \text{ 为指示函数}), \text{ 得到第 } k \text{ 步操作集 } F_k, \text{ 其余}$$

子操作(对流、压力修正、边界条件、源项等)保持与 F_{k-1} 一致。

2) 原集不变迭代(生成结果集):

固定对象集 A ，通过第 k 步操作集 F_k 生成第 k 步结果集 B_k ，具体步骤为：

对流项计算： $U_{conv,k} = F_{conv,k} \cdot U_{k-1}$ ；

粘性项计算： $U_{visc,k} = F_{visc,k} \cdot U_{k-1}$ ；

源项计算： $\tau_k = F_{surf,k} \cdot (U_{k-1}, M_{surf})$ ， $\tau_{wake,k} = F_{wake,k} \cdot (\Omega_{k-1}, M_{wake})$ ；

中间速度生成： $U_k^* = U_{k-1} + dt \cdot (-U_{conv,k} + U_{visc,k} + \tau_k + \tau_{wake,k})$ ；

法向散度计算： $div_k = \nabla \cdot (U_k^* \cdot n)$ ；

压力修正生成： $\Delta P_k = F_{p,k} \cdot div_k$ (经 7 次邻域平均迭代)；

最终流场更新： $U_k = U_k^* - \omega \cdot \frac{dt}{\rho} \cdot \nabla \Delta P_k$ ， $P_k = P_{k-1} + \omega \cdot \Delta P_k$ ；

边界修正： $U'_k = F_{bc,k} \cdot U_k$ ， $P'_k = F_{bc,k} \cdot P_k$ ；

辅助量计算： $\Omega_k = \nabla \times U'_k$ ， $C_k = \frac{\int (P'_k \cdot n + \tau_{visc,k}) dV}{q_\infty A_{ref}}$ ($\tau_{visc,k}$ 为壁面粘性应力)，并记录 t_k 、 mem_k 。

3.5. 全局执行流程

1) 初始化($k=0$): 通过 $A \vdash B_0 \mid F_0$ 生成初始结果集 B_0 ，其中 U_0 按入口边界初始化(入口 $u_0 = U_\infty$ ，其余速度分量为 0)， $P_0 = 0$ ， $\Omega_0 = 0$ ， $C_0 = (0, 0)$ 。

2) 迭代求解($k=1$ 到 nt): 对每个时间步，先执行操作集自迭代 $F_{k-1} \vdash F_k \mid f$ ，再执行原集不变迭代 $A \vdash B_k \mid F_k$ ，更新结果集。每间隔一定步数(如 $nt/10$ 、 $nt/5$)，输出当前迭代信息并进行流场与性能可视化。

3) 最终结果输出($k=nt$): 通过 $A \vdash B_{final} \mid F_{nt}$ 生成最终结果集 B_{final} ，包含最终速度场 U_{nt} 、压力场 P_{nt} 、气动力系数 C_{final} 与总性能指标(总耗时、平均步长耗时、峰值内存)。

本次实验只是用了 GMT 理论对血栓 NS 数值计算的初期部分做了重构包装，以方便在程序中定位不同的算子(算子分裂方法)在计算中的贡献，没有对全局的计算过程进行重构包装，因为全局重构包装非常消耗时间和空间，在实际操作中，可以根据需要对关键步骤重构包装，用来追踪计算过程。

两次数学描述的实验代码和实验结果都在附录的代码链接中，广大同仁可以用代码进行复现，研究 GMT 封装执行步骤的过程。

4. 总结

本文提出的基于 GMT 的数学框架，首次实现了 NS 方程数值算法从“经验设计”到“严格数学描述”的跨越：相比范畴论的抽象统一，GMT 通过张量拓展具备计算可行性；相比传统集合论的静态描述，GMT 通过生成关系保留操作-结果的动态路径。两个实验案例表明，该框架可精准刻画高雷诺数湍流、多物理场耦合等复杂场景下的算法执行逻辑，使算子分裂的子步骤、模型参数的选择依据均成为可追踪的数

学单元, 为 NS 方程数值算法的透明化提供了统一工具。

未来研究可从三方面拓展: 1) 将 GMT 概率形式进一步应用于多尺度湍流模拟, 实现亚格子模型不确定性的定量描述; 2) 结合机器学习, 通过 GMT 映射的操作关联性优化算法选择策略; 3) 建立 GMT 描述与硬件加速(如 GPU 并行计算)的适配规则, 推动透明化算法的工程落地。期待更多研究者加入 GMT 理论在流体力学领域的拓展, 共同推动 NS 方程数值算法从“黑箱经验”走向“透明可控”的标准化时代。

参考文献

- [1] Mac Lane, S. (1998) *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
- [2] Ling, H. (2025) Generalized Mapping Theory—Used to Describe Phenomena That Cannot Be Characterized by Generalized Functions. <https://doi.org/10.20944/preprints202508.0640.v1>
- [3] Ling, H.T. (2025) Experimental Report on Accelerating Numerical Computation of Simple Navier-Stokes Equations Using Generalized Mapping Theory. <https://engrxiv.org/preprint/view/5156>
- [4] Ling, H.T. (2025) Experimental Report on Progress in Solving Numerical Solutions of NS Equations by Completely Replacing Poisson Equation with Generalized Mapping. <https://doi.org/10.31224/5193>
- [5] Ling, H.T. (2025) Nested Computation Framework of Generalized Mapping and Its Applications. TechRxiv. <https://doi.org/10.36227/techrxiv.175742706.64706552/v1>
- [6] Protter, P.E. (2004) *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*. Springer Science & Business Media.
- [7] He, X., Zhang, L. and Wang, Y. (2023) A GPU-Accelerated Algorithm for High-Reynolds Number Flow Around Automotive Bodies Using WENO Scheme. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **72**, 9876-9888.
- [8] Li, J., Chen, M. and Liu, C. (2022) Numerical Simulation of Blood Flow in Thrombosis Formation Using a Coupled Lattice Boltzmann-Immersed Boundary Method. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **69**, 1689-1699.

附录

实验代码链接(论文已经展示的实验和没有展示的实验): <https://gitee.com/ririririririr/GMT-on-NS>