

一类捕食 - 食饵随机微分模型的灭绝与持久性分析

常 蔚, 廖新元

南华大学数理学院, 湖南 衡阳

收稿日期: 2025年9月11日; 录用日期: 2025年10月4日; 发布日期: 2025年10月11日

摘 要

本文提出并研究了一类三物种捕食 - 食饵模型, 该模型在经典Lotka-Volterra结构基础上引入了白噪声干扰以模拟环境波动的影响。通过构造李雅普诺夫函数并结合R.Z. Khasminskii稳定性理论, 我们分析了不同噪声强度对系统中各类种群的持久性与灭绝性的影响, 得到了物种灭绝与持久的充分或必要条件。理论的结果得到了数值模拟的支持。

关键词

随机捕食者 - 食饵模型, Lyapunov函数, 依概率稳定, 灭绝与持久, Dynkin公式

Analysis of Extinction and Persistence in a Stochastic Predator-Prey Model

Wei Chang, Xinyuan Liao

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan

Received: September 11, 2025; accepted: October 4, 2025; published: October 11, 2025

Abstract

This paper proposes and investigates a three-species predator-prey model, which introduces white noise disturbances into the classical Lotka-Volterra structure to simulate the effects of environmental fluctuations. By constructing Lyapunov functions and employing R.Z. Khasminskii-type stability theory, we analyze the influence of different noise intensities on the persistence and extinction of various populations within the system, deriving sufficient or necessary conditions for species extinction and persistence. The theoretical findings are supported by numerical simulations.

Keywords

Stochastic Predator-Prey Model, Lyapunov Function, Stable in Probability, Extinction and Persistence, Dynkin Formula

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

捕食 - 食饵关系是生态系统中最基本的相互作用之一。经典的 Lotka-Volterra 模型为理解种群动态关系奠定了理论基础。然而, 自然界中的生态系统往往涉及多种物种的复杂相互作用, 单纯的二阶微分模型难以完全刻画现实生态系统的动力学行为。

最初的捕食 - 食饵模型由 Lotka 和 Volterra 独立提出, 其经典形式为:

$$\begin{aligned} dx(t) &= a_1 x(t) (1 - b_{11} x(t) - b_{12} y(t)) dt, \\ dy(t) &= -a_2 y(t) (1 - b_{21} x(t)) dt, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别代表食饵密度和捕食者密度。该模型揭示了捕食者与食饵之间的基本动态关系[1][2]。大量研究对此模型进行了改进和修改, 包括引入竞争项、功能反映函数[3]等。

鉴于自然生态系统通常包含多个营养级以及多种相互作用模式, 经典的二物种模型难以充分刻画其复杂性。为了更真实地描述生态系统中捕食与被捕食关系的多样性, 研究者在二物种模型的基础上对其进行了多物种扩展。

Takeuchi Y 等人在文献[4]中提出了一类包含三个物种的捕食 - 食饵模型, 并对其进行了稳定性分析。该模型如下:

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t) (r_1 - a_{11} x(t) - a_{12} y(t)) dt, \\ dy(t) &= y(t) (-r_2 + a_{21} x(t) - a_{22} y(t) - a_{23} z(t)) dt, \\ dz(t) &= z(t) (-r_3 + a_{32} y(t) - a_{33} z(t)) dt, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 分别代表食饵密度、初级捕食者密度、顶级捕食者密度, r_1 、 r_2 、 r_3 分别代表食饵的增长率、初级捕食者和顶级捕食者的死亡率, a_{11} 、 a_{22} 、 a_{33} 分别代表食饵的密度制约系数和捕食者的种内竞争系数, a_{21} 、 a_{32} 代表捕食效率系数, a_{12} 、 a_{23} 代表相互作用系数。

为引入随机扰动项, 设 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 为一完备概率空间, $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ 为其满足自然条件的 σ -代数族, 且满足: 若 $t_1 < t_2$ 时, 则 $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2} \subseteq \mathcal{F}$, E 是关于概率测度 P 的数学期望。

除生物种间相互作用外, 环境噪声在种群动态中也起着关键作用[5]。由于生态系统中存在长期而复杂的环境波动, 模型参数常常呈现出随机扰动特性。特别地, F. Vadillo 研究了三个不同的 Lotka-Volterra 随机模型的平均灭绝时间[6]。R. Rudnicki 考虑了随机扰动 Lotka-Volterra 模型的长期动力学, 其中假定两种群的随机噪声具有相关性, 虽然这种假设在某种程度上可以模拟同一因素(例如流行病)同等影响捕食者与猎物种群的情况, 但仍具有较大局限性, 会显著降低研究结果的价值[7]。M. Liu 和 M. Fan 对随机种群的持久性提出了一种新的定义, 并在此基础上研究了二维随机 Lotka-Volterra 系统的持久性, 包括合作、竞争和捕食系统[8]。本文引入如下具有随机扰动的三物种捕食 - 食饵模型:

$$\begin{aligned}
dx(t) &= x(t)(r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t))dt + \sigma_1 x(t)dw_1(t), \\
dy(t) &= y(t)(-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t) - a_{23}z(t))dt + \sigma_2 y(t)dw_2(t), \\
dz(t) &= z(t)(-r_3 + a_{32}y(t) - a_{33}z(t))dt + \sigma_3 z(t)dw_3(t),
\end{aligned} \tag{3}$$

系统(3)描述了由三种种群间捕食关系组成的生态系统: 其中, 物种 x 为物种 y 的食物, 物种 y 又为物种 z 的食物。参数 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是常数, 分别表示各物种所受白噪声扰动的强度; 而 $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ 是定义在上述概率空间上三维独立标准布朗运动。在本模型中, 我们假设环境主要影响种群的生长率和死亡率, 如文献[9]-[11]所示。

一个自然的问题随之产生: 引入随机扰动是否会从本质上改变模型的动态性质? 在某些情形下, 生物中间相互作用可能导致种群灭绝。然而, 当考虑环境中存在的随机因素时, 系统行为可能发生根本性转变, 灭绝可能会逆转为共存。X.R. Mao, G. Marion 和 E. Renshaw 等人[12]的研究表明, 环境噪声可以在一定条件下抑制种群数量的爆炸, 从而稳定种群系统。F. Deng 等人也在文献[13]中进一步指出, 噪声可以抑制或促进种群增长。这些发现表明环境噪声对种群系统的长期被动力学性质具有重要影响。这使我们关注的焦点转向了噪声如何影响随机系统(3)的灭绝与持久性行为。

为了深入分析系统(3)中物种的灭绝条件与持续存在的充要条件, 本文采用了近年来发展起来的一种方法[14][15], 该方法是基于直接李雅普诺夫函数[16], 特别融合了 R.Z. Khasminskii [17]的思想即认为随机绝灭的充分条件是平凡平衡态稳定性逆转的条件, 将这一思想应用到模型中, 能够有效建立物种灭绝的充分条件与持续存在的必要条件。

2. 随机扰动下系统的灭绝和持久性分析

在进一步展开分析之前, 本文首先给出适用于系统(2)和系统(3)的持久性与灭绝性概念:

定义 2.1 [18] 设 $x(t)$ 为系统(2)或系统(3)在任意初始条件 $x(0), y(0), z(0) > 0$ 下的解, 若 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) > 0$, 则称物种 x 是弱持久的; 若 $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) > 0$, 则称物种 x 是持久的; 若存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq \varepsilon$, 则称物种 x 是一致持久的。

上述定义可类比扩展至物种 y 与 z 的持久性分析中。

引理 2.1 对于任意初始值 $\Phi(0) \in R_+^{3,0}$, 随机系统(3)的解过程 $\Phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 在 $t \geq 0$ 时保持正值, 即系统(3)的解几乎必然保持在此外 $R_+^{3,0}$ 中。其中, 不变集定义为:

$$R_+^{3,0} = \{(x, y, z) | x > 0, y > 0, z > 0\},$$

证明: 我们注意到系统(3)的解可以写成如下形式:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[r_1 - a_{11}x(s) - a_{12}y(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right] ds + \sigma_1 w_1(t) \right\}, \\
y(t) &= y(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[-r_2 + a_{21}x(s) - a_{22}y(s) - a_{23}z(s) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right] ds + \sigma_2 w_2(t) \right\}, \\
z(t) &= z(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[-r_3 + a_{32}y(s) - a_{33}z(s) - \frac{1}{2}\sigma_3^2 \right] ds + \sigma_3 w_3(t) \right\},
\end{aligned} \tag{4}$$

由于初始值 $x(t), y(t), z(t)$ 均为正数, 且指数函数始终为正, 因此上述解在任意 $t \geq 0$ 时始终为正。故系统(3)的解过程几乎必然地保持在 $R_+^{3,0}$ 中, 从而满足正不变性, 证毕。

注释 2.1 由引理 2.1 可知, $R_+^{3,0}$ 是一个三维不变集。我们还可以得出以下结论:

$$R_{12+}^0 = \{(x, y, z) | x > 0, y > 0, z = 0\},$$

$$R_{13+}^0 = \{(x, y, z) | x > 0, y = 0, z > 0\},$$

$$R_{23+}^0 = \{(x, y, z) | x = 0, y > 0, z > 0\},$$

这些都是二维不变集。因此, 同样的定义, 还会存在三个一维不变集

$$R_{1+}^0 = \{(x, y, z) | x > 0, y = 0, z = 0\},$$

$$R_{2+}^0 = \{(x, y, z) | x = 0, y > 0, z = 0\},$$

$$R_{3+}^0 = \{(x, y, z) | x = 0, y = 0, z > 0\}.$$

以及原点 $\{(0, 0, 0)\}$ 也都是系统 (3) 的不变集。综上所述, 系统 (3) 一共存在八个不变集。

然而, 从生态系统角度出发, 若食饵 x 灭绝, 则初级捕食者 y 将失去食物来源而灭绝; 同理, 若 y 灭绝, 则顶级捕食者 z 也将随之灭绝。因此, 部分不变子集 R_{2+}^0 、 R_{3+}^0 、 R_{13+}^0 、 R_{23+}^0 在生物学上不具备合理性, 所以系统 (3) 最终只会稳定于不变集 $R_+^{3,0}$ 、 R_{1+}^0 、 R_{12+}^0 以及 $\{(0, 0, 0)\}$, 我们后续的研究也是基于这四种情况。

定理 2.1 考虑以下随机微分方程系统:

$$dx(t) = b(t, x)dt + \sum_{r=1}^k \sigma_r(t, x)d\xi_r(t),$$

设 $\{t > 0\} \times U = U_1$, 其中 U 是包含原点 $x = 0$ 的某一邻域。若存在函数 $v(t, x) \in C_2^0(U_1)$ 满足以下条件:

$v(t, x)$ 在李雅普诺夫意义下正定, 即对所有 $x \neq 0$, 有 $v(t, x) > 0$ 且 $v(t, 0) = 0$; 对 $x \neq 0$, 李雅普诺夫算子 Lv 满足

$$Lv = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^l b_i(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0,$$

其中 $a_{ij}(t, x) = \sum_{r=1}^k \sigma_r^{(i)}(t, x) \sigma_r^{(j)}(t, x)$, 则平凡解 $x(t) = 0$ 是依概率稳定的。

证明: 取正数 r 使得 $x = 0$ 的 r -邻域 U_r 及其边界均含于 U 内, 令

$$v_r = \inf_{x \in U \setminus U_r} v(t, x) > 0,$$

对任意初始点 $|x| < r$, 有

$$E[v(\tau_{U_r}(t), x^{s,x}(\tau_{U_r}(t)))] \leq v(s, x),$$

其中 $\tau_{U_r}(t) = \min\{\inf\{u \geq s: |x^{s,x}(u)| \geq r\}, t\}$ 为停时。

应用 Chebyshev 不等式, 对 $s \leq u \leq t$ 有

$$P\left\{\sup_{s \leq u \leq t} |x^{s,x}(u)| > r\right\} \leq \frac{E[v(\tau_{U_r}(t), x^{s,x}(\tau_{U_r}(t)))]}{v_r} \leq \frac{v(s, x)}{v_r},$$

令 $t \rightarrow \infty$ 得无限时间尺度下的估计:

$$P\left\{\sup_{u \geq s} |x^{s,x}(u)| > r\right\} \leq \frac{v(s, x)}{v_r}, \quad (5)$$

因为 $v(s, 0) = 0$ 且 $v(s, x)$ 连续, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x| < \delta$ 时 $v(s, x) < \varepsilon v_r$
代入(5)式得:

$$P\left\{\sup_{u \geq s} |x^{s,x}(u)| > r\right\} < \varepsilon.$$

这表明平凡解依概率稳定。

引理 2.2 若 $\sigma_1^2 > 2r_1$, 则系统(3)的零平衡点在概率意义下是稳定的, 即系统在概率意义下灭绝。

证明: 我们分别从系统(3)的三个分量出发, 构造合适的李雅普诺夫函数, 并应用定理 2.1 进行判定。
对变量 $x(t)$, 考虑系统(3)的第一个方程

$$dx(t) = x(t)(r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t))dt + \sigma_1 x(t)dw_1(t),$$

构造李雅普诺夫函数:

$$u_1(x, y, z) = |x|^{1-\frac{2r_1}{\sigma_1^2}}$$

显然该函数正定。对其应用定理 2.1 中的李雅普诺夫算子 L , 有

$$\begin{aligned} Lu_1 &= \left(1 - \frac{2r_1}{\sigma_1^2}\right) |x|^{\frac{2r_1}{\sigma_1^2}} x(r_1 - a_{11}x - a_{12}y) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2r_1}{\sigma_1^2}\right) \frac{2r_1}{\sigma_1^2} |x|^{\frac{2r_1}{\sigma_1^2}-1} \sigma_1^2 x^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2r_1}{\sigma_1^2}\right) |x|^{\frac{2r_1}{\sigma_1^2}} (a_{11}x + a_{12}y), \end{aligned}$$

当 $\sigma_1^2 > 2r_1$ 时, 有 $Lu_1 < 0$, 故根据定理 2.1, 系统第一个方程的零解是概率稳定的, 即 $x(t) \rightarrow 0$ 。

对变量 $y(t)$, 系统的第二个方程为

$$dy(t) = y(t)(-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t) - a_{23}z(t))dt + \sigma_2 y(t)dw_2(t),$$

考虑以下两种情形:

若 $\sigma_2^2 < 2r_2$, 构造李雅普诺夫函数为 $v_1(x, y, z) = y^2$, 当 $x(t) \rightarrow 0$ 时, 则有

$$Lv_1 = 2y[y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y - a_{23}z)] + \sigma_2^2 y^2 = -2y^2 \left(r_2 - a_{11}x + a_{22}y + a_{23}z - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) \leq 0,$$

若 $\sigma_2^2 \geq 2r_2$, 构造函数 $v_2(x, y, z) = |y|^{1-\frac{2r_2}{\sigma_2^2}}$, 当 $x(t) \rightarrow 0$ 时, 则有

$$\begin{aligned} Lv_2 &= \left(1 - \frac{2r_2}{\sigma_2^2}\right) |y|^{\frac{2r_2}{\sigma_2^2}} [y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y - a_{23}z)] + \frac{1}{2} \sigma_2^2 y^2 \left(1 - \frac{2r_2}{\sigma_2^2}\right) \left(-\frac{2r_2}{\sigma_2^2}\right) |y|^{\frac{2r_2}{\sigma_2^2}-1} \\ &= -\left(1 - \frac{2r_2}{\sigma_2^2}\right) |y|^{\frac{2r_2}{\sigma_2^2}} (2r_2 - a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) \leq 0. \end{aligned}$$

所以系统第二个方程的零解是概率稳定的, 即 $y(t) \rightarrow 0$ 。

对变量 $z(t)$, 系统的第三个方程为

$$dz(t) = z(t)(-r_3 + a_{32}y(t) - a_{33}z(t))dt + \sigma_3 z(t)dw_3(t),$$

若 $\sigma_3^2 < 2r_3$, 构造函数 $w_1(x, y, z) = z^2$, 当 $y(t) \rightarrow 0$ 时, 有

$$Lw_1 = -2z^2 \left(r_3 - a_{31}y + a_{33}z - \frac{\sigma_3^2}{2}\right) < 0,$$

若 $\sigma_3^2 \geq 2r_3$, 构造 $w_2(x, y, z) = |z|^{1-\frac{2r_3}{\sigma_3^2}}$, 当 $y(t) \rightarrow 0$ 时, 有

$$Lw_2 = -\left(1 - \frac{2r_3}{\sigma_3^2}\right) |z|^{1-\frac{2r_3}{\sigma_3^2}} (2r_3 - a_{32}y + a_{33}z) \leq 0.$$

所以系统(3)第三个方程的零解也是概率稳定的, 即 $z(t) \rightarrow 0$ 。

综上所述, 当 $\sigma_1^2 > 2r_1$ 的条件下, 系统(3)三个方程的解 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 在概率意义下均趋于 0, 系统整体解在概率意义下收敛于零平衡点, 即系统灭绝。

引理 2.3 若 $\sigma_2^2 \geq 2r_2$ 且 $\sigma_1^2 < 2r_1$, 则系统(3)几乎必然稳定于一维不变集

$$R_{1+}^0 = \{(x, y, z) | x > 0, y = 0, z = 0\}, \text{ 且食饵种群 } x(t) \text{ 围绕区间 } (x_1, x_2) \text{ 振荡, 其中 } x_1 = x^* \left(1 - \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{2r_1}}\right),$$

$$x_2 = x^* \left(1 + \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{2r_1}}\right).$$

证明: 由于 $\sigma_2^2 \geq 2r_2$, 根据引理 2.2 和定理 2.1, 系统(3)的第二个变量 y 和第三个变量 z 分别趋于 0, 因此系统(3)最终化为如下形式:

$$dx(t) = x(t)(r_1 - a_{11}x(t))dt + \sigma_1 x(t)dw_1(t), \quad (6)$$

系统(6)在无扰动时的正平衡点为 $x^* = \frac{r_1}{a_{11}}$ 。为分析系统(6)的稳定性, 我们构造李雅普诺夫函数:

$$v_3(x) = \frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} - 1,$$

该函数是正定的, 所以

$$\begin{aligned} Lv_3 &= \left(\frac{1}{x^*} - \frac{1}{x}\right)(r_1 x - a_{11}x^2) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \\ &= -\frac{a_{11}}{x^*}(x - x^*)^2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2, \end{aligned}$$

由 $Lv_3 = 0$ 可得当 $\sigma_1^2 < 2r_1$ 时两个正实根 $x_1 = x^* \left(1 - \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{2r_1}}\right)$, $x_2 = x^* \left(1 + \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{2r_1}}\right)$ 。

所以当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $Lv_3 > 0$; 当 $x \in (0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 时, $Lv_3 < 0$ 。应用 Dynkin 公式[19]:

$$E[v_3(x(t))] - E[v_3(x(0))] = \int_0^t E[Lv_3(x(s))]ds,$$

当初值在 (x_1, x_2) 区间内时, 李雅普诺夫函数期望单调递增, 表明系统远离平衡点 x^* 向两侧移动, 即如果 $x(0) \in (x_1, x^*)$, 那么 $x(t)$ 几乎必然减少到 x_1 , 如果 $x(0) \in (x^*, x_2)$, 那么 $x(t)$ 几乎必然增加到 x_2 。

当初值在两端区域时, 函数期望减小, 表明系统向中间靠拢, 即如果 $x(0) < x_1$, 那么 $x(t)$ 几乎必然增加到 x_1 , 如果 $x(0) > x_2$, 那么 $x(t)$ 几乎必然减少到 x_2 。因此 $x(t)$ 几乎必然在区间 (x_1, x_2) 附近持续振荡, 证毕。

引理 2.4 若 $\sigma_3^2 \geq 2a_3$, $\sigma_1^2 < 2a_{11}x^*$ 且 $\sigma_2^2 < 2a_{22}y^*$, 其中 x^*, y^* 满足(8), 则系统(3)几乎必然稳定于二维不变集

$$R_{12+}^0 = \{(x, y, z) | x > 0, y > 0, z = 0\}$$

且动态种群满足: 食饵种群 $x(t)$ 围绕区间 (x_1, x_2) 振荡, 其中

$$x_1 = x^* \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2a_{11}x^*}} \right), \quad x_2 = x^* \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2a_{11}x^*}} \right)$$

初级捕食者种群 $y(t)$ 围绕区间 (y_1, y_2) 振荡, 其中

$$y_1 = y^* \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{2a_{22}y^*}} \right), \quad y_2 = y^* \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{2a_{22}y^*}} \right)$$

证明: 由于 $\sigma_3^2 \geq 2r_3$ 时, 根据引理 2.2 和定理 2.1 系统 (3) 的第三个 z 变量趋于 0, 因此系统 (3) 最终化为如下形式:

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t)(r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t))dt + \sigma_1 x(t)dw_1(t), \\ dy(t) &= y(t)(-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t))dt + \sigma_2 y(t)dw_2(t), \end{aligned} \quad (7)$$

系统 (7) 在无扰动时的正平衡点为 (x^*, y^*) , 其中 x^*, y^* 满足

$$a_{11}x^* + a_{12}y^* = r_1, \quad a_{21}x^* - a_{22}y^* = r_2 \quad (8)$$

对于新的随机系统 (7), 我们构造李雅普诺夫函数:

$$w_3(x, y) = A \left(\frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} - 1 \right) + B \left(\frac{y}{y^*} - \ln \frac{y}{y^*} - 1 \right),$$

其中 $A = x^*, B = \frac{a_{12}}{a_{21}}y^*$, 该函数是正定的, 所以

$$\begin{aligned} Lw_3 &= A \left(\frac{1}{x^*} - \frac{1}{x} \right) x (r_1 - a_{11}x - a_{12}y) + \frac{1}{2} A \sigma_1^2 + B \left(\frac{1}{y^*} - \frac{1}{y} \right) y (-r_2 + a_{21}x - a_{22}y) + \frac{1}{2} B \sigma_2^2 \\ &= (x - x^*) (r_1 - a_{11}x - a_{12}y) + \frac{a_{12}}{a_{21}} (y - y^*) (-r_2 + a_{21}x - a_{22}y) + \frac{1}{2} A \sigma_1^2 + \frac{1}{2} B \sigma_2^2, \end{aligned}$$

又因为 x^*, y^* 满足 (8), 所以有

$$\begin{aligned} Lw_3 &= (x - x^*) (a_{11}x^* + a_{12}y^* - a_{11}x - a_{12}y) + \frac{a_{12}}{a_{21}} (y - y^*) (a_{22}y^* - a_{21}x^* + a_{21}x - a_{22}y) + \frac{1}{2} A \sigma_1^2 + \frac{1}{2} B \sigma_2^2 \\ &= -a_{11} (x - x^*)^2 - \frac{a_{12}}{a_{21}} a_{22} (y - y^*)^2 + \frac{1}{2} A \sigma_1^2 + \frac{1}{2} B \sigma_2^2, \end{aligned}$$

为了分别得到 x 和 y 的持久区间, 我们考虑平衡点附近的行为, 实际上, 在平衡点附近, x 和 y 的稳定项是独立的。因此我们分别考虑两个二次项和常数项, 对于食饵 x , 我们考虑

$$Lw_x = -a_{11} (x - x^*)^2 + \frac{1}{2} A \sigma_1^2,$$

由 $Lw_x = 0$ 可得 $(x - x^*)^2 = \frac{A \sigma_1^2}{2a_{11}} = \frac{x^* \sigma_1^2}{2a_{11}}$, 所以当 $\sigma_1^2 < 2a_{11}x^*$ 时, 两个正解为

$$x_1 = x^* \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2a_{11}x^*}} \right), \quad x_2 = x^* \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2a_{11}x^*}} \right)$$

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $(x - x^*)^2 < \frac{x^* \sigma_1^2}{2a_{11}}$, 所以 $Lw_x > 0$; 当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $Lw_x < 0$ 。

应用 Dynkin 公式:

$$E[w_x(x(t))] - E[w_x(x(0))] = \int_0^t E[Lw_x(x(s))] ds,$$

结合引理 2.3 的证明过程, 就能得到 x 在区间 (x_1, x_2) 内振荡。

同理, 对于初级捕食者 y , 我们考虑:

$$Lw_y = -\frac{a_{12}}{a_{21}} a_{22} (y - y^*)^2 + \frac{1}{2} B \sigma_2^2,$$

由 $Lw_y = 0$ 可得 $(y - y^*)^2 = \frac{Ba_{21}\sigma_2^2}{2a_{12}a_{22}} = \frac{y^*\sigma_2^2}{2a_{22}}$, 所以当 $\sigma_2^2 < 2a_{22}y^*$ 时, 两个正解为

$$y_1 = y^* \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{2a_{22}y^*}} \right), \quad y_2 = y^* \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{2a_{22}y^*}} \right)$$

同理可得, 我们也可以得到 y 在区间 (y_1, y_2) 振荡, 证毕。

总结引理 2.2 到 2.4 的陈述, 我们可以得到如下定理:

定理 2.2 (系统的持久性与灭绝性)

对于三维捕食 - 食饵模型 (3), 在以下条件下, 系统的长期行为满足如下性质:

(1) 若 $\sigma_1^2 > 2r_1$, 三个物种 $x(t), y(t), z(t)$ 最终均趋于零, 这是整个系统在概率意义下灭绝的充分条件。

(2) 若 $\sigma_2^2 \geq 2r_2$, 且 $\sigma_1^2 < 2r_1$, 则捕食者 $y(t)$ 、 $z(t)$ 在概率意义下灭绝, 食饵 $x(t)$ 是持久的, 这是食饵 $x(t)$ 持续存在的必要条件。

(3) 若 $\sigma_3^2 \geq 2r_3$, $\sigma_1^2 < 2a_{11}x^*$ 且 $\sigma_2^2 < 2a_{22}y^*$ 则顶级 $z(t)$ 在概率意义下灭绝, 初级捕食者 $y(t)$ 和食饵 $x(t)$ 是持久的, 这是初级捕食者 $y(t)$ 持续存在的必要条件。

(4) 若 $\sigma_3^2 < 2r_3$, $\sigma_2^2 < 2r_2$ 且 $\sigma_1^2 < 2r_1$, 则三物种都是持久的, 这是整个系统持续存在的必要条件。

3. 数值模拟

对于系统 (3), 我们采用文献[20]中的 Milstein 高阶方法对其进行数值离散化模拟, 其差分格式为:

$$x_{k+1} = x_k + (r_1 x_k - a_{11} x_k^2 - a_{12} x_k y_k) \Delta t + \sigma_1 x_k \sqrt{\Delta t} \xi_k + \frac{1}{2} \sigma_1^2 x_k^2 (\Delta t \xi_k^2 - \Delta t),$$

$$y_{k+1} = y_k + (-r_2 y_k + a_{21} x_k y_k - a_{22} y_k^2 - a_{23} y_k z_k) \Delta t + \sigma_2 y_k \sqrt{\Delta t} \eta_k + \frac{1}{2} \sigma_2^2 y_k^2 (\Delta t \eta_k^2 - \Delta t),$$

$$z_{k+1} = z_k + (-r_3 z_k + a_{32} y_k z_k - a_{33} z_k^2) \Delta t + \sigma_3 z_k \sqrt{\Delta t} \psi_k + \frac{1}{2} \sigma_3^2 z_k^2 (\Delta t \psi_k^2 - \Delta t).$$

其中 ξ_k 、 η_k 和 ψ_k 为服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的独立高斯随机变量, Δt 表示时间步长。

在下文的数值例 1~4 中, 我们展示了系统 (3) 中不同参数条件下三种物种的持久性与灭绝情况。

例 1 设置系统参数为 $r_1 = 2.5$, $r_2 = 0.01$, $r_3 = 0.1$, $a_{11} = 1.5$, $a_{12} = 0.8$, $a_{21} = 0.3$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 1$, $a_{32} = 0.2$, $a_{33} = 0.55$, $\sigma_1 = 0.45$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0.35$, 以及初始条件 $(x_0, y_0, z_0) = (1.6, 0.5, 0.12)$

该组参数满足以下条件: $\sigma_2^2 \geq 2r_2$, $\sigma_1^2 < 2r_1$, 根据引理 2.3 可知, 初级捕食者 $y(t)$ 与顶级捕食者 $z(t)$ 在概率意义下灭绝, 食饵 $x(t)$ 持久存在, 进一步可计算出 $x(t)$ 的持久区间:

$$x_1 = x^* \left(1 - \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{2r_1}} \right) \approx 1.28, \quad x_2 = x^* \left(1 + \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{2r_1}} \right) \approx 2.88, \quad \text{数值模拟结果见图 1.}$$

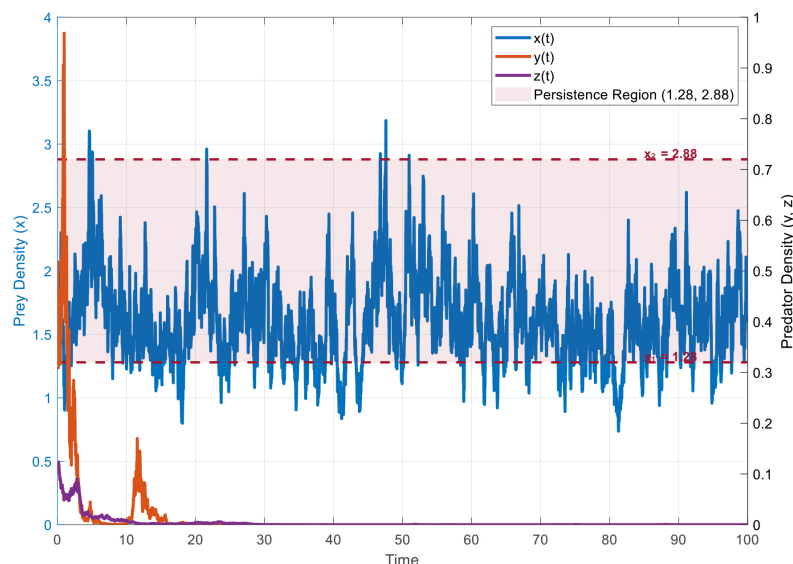


Figure 1. x is persistent, y is extinct, z is extinct

图 1. x 持久, y 灭绝, z 灭绝

例 2 设置系统参数为 $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.01$, $r_3 = 0.1$, $a_{11} = 1.5$, $a_{12} = 0.8$, $a_{21} = 0.3$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 1$, $a_{32} = 0.2$, $a_{33} = 0.5$, $\sigma_1 = 0.45$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0.35$, 以及初始条件 $(x_0, y_0, z_0) = (0.4, 0.6, 0.8)$ 该组参数满足以下条件: 满足条件 $\sigma_1^2 > 2r_1$, 根据引理 2.2 可知, 整个系统灭绝。数值模拟的结果见图 2。

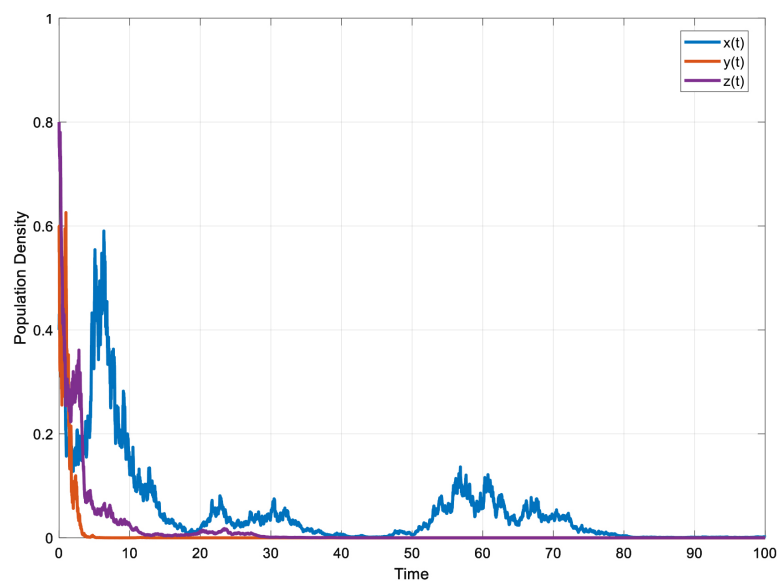


Figure 2. x is extinct, y is extinct, z is extinct

图 2. x 灭绝, y 灭绝, z 灭绝

例 3 设置系统参数为 $r_1 = 2.5$, $r_2 = 0.01$, $r_3 = 0.15$, $a_{11} = 1.5$, $a_{12} = 0.8$, $a_{21} = 0.3$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{32} = 0.2$, $a_{33} = 0.6$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.6$, $\sigma_3 = 0.65$; 以及初始条件 $(x_0, y_0, z_0) = (1.6, 0.48, 0.13)$ 该组参数满足以下条件: $\sigma_3^2 < 2r_3$, $\sigma_1^2 < 2a_{11}x^*$ 且 $\sigma_2^2 < 2a_{22}y^*$, 根据引理 2.4 可知, 顶级捕食者 $z(t)$ 在概率意义下灭绝, 初级捕食者 $y(t)$ 和食饵 $x(t)$ 持久存在, 进一步可以分别计算出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的持久区间:

$$x_1 = x^* \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2a_{11}x^*}} \right) \approx 1.16, \quad x_2 = x^* \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2a_{11}x^*}} \right) \approx 1.71;$$

$$y_1 = y^* \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{2a_{22}y^*}} \right) \approx 0.13, \quad y_2 = y^* \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{2a_{22}y^*}} \right) \approx 0.75.$$

数值模拟的结果见图 3。

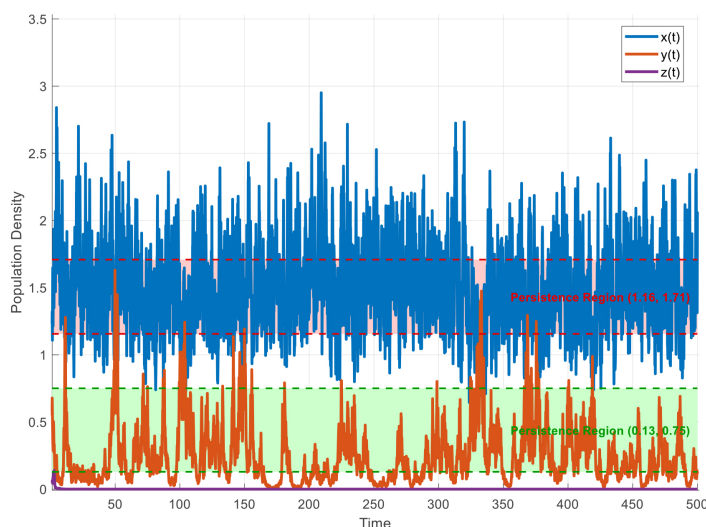


Figure 3. x is persistent, y is persistent, z is extinct

图 3. x 持久, y 持久, z 灭绝

例 4 设置系统参数为 $r_1 = 2.5$, $r_2 = 0.15$, $r_3 = 0.2$, $a_{11} = 1.5$, $a_{12} = 0.7$, $a_{21} = 0.8$, $a_{22} = 0.9$, $a_{23} = 0.8$, $a_{32} = 1.2$, $a_{33} = 0.5$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.3$, $\sigma_3 = 0.4$, 以及初始条件 $(x_0, y_0, z_0) = (1.67, 0.81, 0.92)$ 该组参数满足以下条件: $\sigma_3^2 < 2r_3$, $\sigma_2^2 < 2r_2$ 且 $\sigma_1^2 < 2r_1$, 得到了三物种都持久的情况, 数值模拟结果见图 4。

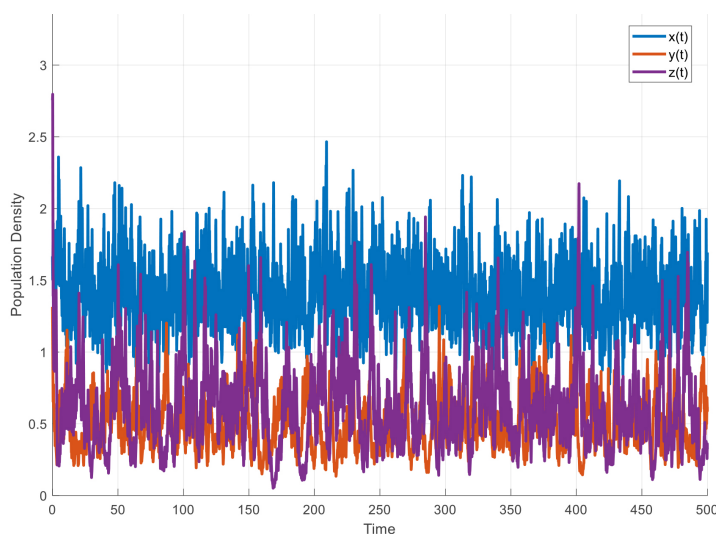


Figure 4. x is persistent, y is persistent, z is persistent

图 4. x 持久, y 持久, z 持久

综合上述数值模拟情况, 我们可以明显的看到: 当噪声强度 σ_i 较小时, 系统能够保持较为稳定的共存状态, 随着 σ_i 的增加, 物种更容易灭绝, 特别是顶级捕食者 $z(t)$ 对噪声更为敏感; 初级捕食者 $x(t)$ 的增长率 r_1 对整个系统的持续具有决定作用, 当 r_1 较大时, 系统更容易持久; 当 a_{21}, a_{32} 较大时, 捕食关系更显著, 系统更容易达到共存状态。

4. 总结

本文研究了一类受环境噪声干扰的三维捕食 - 食饵随机微分动力系统, 基于李雅普诺夫函数法和 Khasminskii 稳定性理论, 分别得到了猎物种群、初级捕食者与顶级捕食者在不同噪声强度下的持久存在或概率灭绝的充分条件和必要条件。特别地, 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 证明了当随机扰动强度超过某一临界阈值时, 系统中各物种将趋于灭绝; 而在扰动较弱的情形下, 系统解则长期保持在有界集合内波动, 呈现出持久共存的特性。并通过数值模拟验证了上述主要理论结果。

现有的大多数相关研究都集中在确定性模型或者二维随机系统, 本文进一步推广到三维层次结构, 能更好地反映复杂生态系统的动力学行为。然而, 本文也存在一定的局限性: 一方面, 模型中噪声项假设为独立的一维布朗运动, 而实际生态系统中环境扰动往往具有相关性甚至突发性(如 Levy 噪声); 另一方面, 本文仅考虑了系统在固定参数下的动力行为。

未来的研究可以推广到 Levy 噪声的情形, 以便更真实地刻画生态系统所受环境扰动; 还可以结合随机时滞方程, 考虑时滞效应对系统动力学的影响。

参考文献

- [1] Volterra, V. (1931) Lessons on the Mathematical Theory of Struggle for Life (Original: Leçons sur la théorie mathématique de la Lutte pour la vie) Gauthier-Villars.
- [2] Goh, B.S. (1976) Global Stability in Two Species Interactions. *Journal of Mathematical Biology*, **3**, 313-318. <https://doi.org/10.1007/bf00275063>
- [3] Jiang, D., Ji, C., Li, X. and O'Regan, D. (2012) Analysis of Autonomous Lotka-Volterra Competition Systems with Random Perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **390**, 582-595. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.12.049>
- [4] Takeuchi, Y. (1996) Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/2942>
- [5] Cai, Y., Jiao, J., Gui, Z., Liu, Y. and Wang, W. (2018) Environmental Variability in a Stochastic Epidemic Model. *Applied Mathematics and Computation*, **329**, 210-226. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.009>
- [6] Vadillo, F. (2019) Comparing Stochastic Lotka-Volterra Predator-Prey Models. *Applied Mathematics and Computation*, **360**, 181-189. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.05.002>
- [7] Rudnicki, R. (2003) Long-Time Behaviour of a Stochastic Prey-Predator Model. *Stochastic Processes and Their Applications*, **108**, 93-107. [https://doi.org/10.1016/s0304-4149\(03\)00090-5](https://doi.org/10.1016/s0304-4149(03)00090-5)
- [8] Liu, M. and Fan, M. (2017) Permanence of Stochastic Lotka-Volterra Systems. *Journal of Nonlinear Science*, **27**, 425-452. <https://doi.org/10.1007/s00332-016-9337-2>
- [9] Wang, L. and Jiang, D. (2018) Ergodic Property of the Chemostat: A Stochastic Model under Regime Switching and with General Response Function. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **27**, 341-352. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2017.10.001>
- [10] Zhao, D. and Yuan, S. (2016) Dynamics of the Stochastic Leslie-Gower Predator-Prey System with Randomized Intrinsic Growth Rate. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **461**, 419-428. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.06.010>
- [11] Zhang, Q.M., Liu, W.A. and Nie, Z.K. (2004) Existence, Uniqueness and Exponential Stability for Stochastic Age-Dependent Population. *Applied Mathematics and Computation*, **154**, 183-201. [https://doi.org/10.1016/s0096-3003\(03\)00702-1](https://doi.org/10.1016/s0096-3003(03)00702-1)
- [12] Mao, X., Marion, G. and Renshaw, E. (2002) Environmental Brownian Noise Suppresses Explosions in Population Dynamics. *Stochastic Processes and their Applications*, **97**, 95-110. [https://doi.org/10.1016/s0304-4149\(01\)00126-0](https://doi.org/10.1016/s0304-4149(01)00126-0)

-
- [13] Deng, F., Luo, Q., Mao, X. and Pang, S. (2008) Noise Suppresses or Expresses Exponential Growth. *Systems & Control Letters*, **57**, 262-270. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2007.09.002>
 - [14] Korobeinikov, A. and Shaikhet, L. (2021) Global Asymptotic Properties of a Stochastic Model of Population Growth. *Applied Mathematics Letters*, **121**, Article 107429. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107429>
 - [15] Shaikhet, L. and Korobeinikov, A. (2024) Asymptotic Properties of the Lotka-Volterra Competition and Mutualism Model under Stochastic Perturbations. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*, **41**, 19-34. <https://doi.org/10.1093/imammb/dqae001>
 - [16] Shaikhet, L. (2013) Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations. Springer Science & Business Media.
 - [17] Khasminskii, R. (2012) Stochastic Stability of Differential Equations. Springer.
 - [18] Butler, G., Freedman, H.I. and Waltman, P. (1986) Uniformly Persistent Systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **96**, 425-430. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1986-0822433-4>
 - [19] Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. (1972) Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag.
 - [20] Higham, D.J. (2001) An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*, **43**, 525-546. <https://doi.org/10.1137/s0036144500378302>