Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(10), 238-249
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1410436

卡尔达诺如何利用“和的法则”列方程

王茹钰[1,2]，**赵继伟**[1,2]

[1]西北大学科学技术史高等研究院，陕西 西安
[2]陕西省文化遗产数字人文重点实验室，陕西 西安

收稿日期：2025年9月14日；录用日期：2025年10月8日；发布日期：2025年10月16日

摘 要

卡尔达诺的《大术》是讨论方程求解的历史名著。在这本书的第35章，他在求解具体问题时利用“和的法则”来列方程。其中，对于10个问题所导致的方程，他并没有给出详细的推导步骤。我们发现，按照现代方法列出的方程与卡尔达诺的方程往往并不相同。那么，他是如何利用“和的法则”列出这些方程的？通过对卡尔达诺列方程的思路进行分析，并利用他已经知道但未予明示的平方和法则和平方差法则，我们复原了这10个方程的推导过程，从而比较圆满地解决了上述问题。

关键词

卡尔达诺，《大术》，和的法则，列方程，复原

How Cardano Use “the Rule for a Sum” to Establish Equations

Ruyu Wang[1,2], **Jiwei Zhao**[1,2]

[1]Institute for Advanced Study in History of Science, Northwest University, Xi’an Shaanxi
[2]Key Laboratory of Cultural Heritage and Digital Humanities of Shaanxi Province, Xi’an Shaanxi

Received: September 14, 2025; accepted: October 8, 2025; published: October 16, 2025

Abstract

Cardano’s “Ars Magna” was a historical masterpiece in discussing the solution of equations. In Chapter 35 of this book, he used “the rule for a sum” to establish equations when solving concrete problems. Among these problems, there were 10 equations which he gave out directly without any detailed steps for deriving them. We find that the equations established according to modern methods are often different from those of Cardano’s. So, how Cardano used the “the rule for a sum” to establish these equations? By analyzing Cardano’s own idea of establishing equations, and using the rules

文章引用: 王茹钰, 赵继伟. 卡尔达诺如何利用“和的法则”列方程[J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 238-249.
DOI: 10.12677/aam.2025.1410436

for sums or difference of squares that he had already known but had not explicitly stated, we have restored the derivation process of these 10 equations and solved the above problem successfully.

Keywords

Cardano, *Ars Magna*, The Rule for a Sum, Establishing the Equation, Restore

1. 引言

意大利数学家卡尔达诺(Girolamo Cardano, 1501~1576)的代数学名著《大术》(Ars Magna, 1545)标志着近代数学的开始[1] [2]。这本书共 40 章，其在数学史上最有名的成就是首次记载了三次方程(第 11~23 章)和四次方程(第 39 章)的解法，首次比较系统地讨论了方程的变换(第 7 章)，首次给出二次方程的虚根(第 37 章)，首次给出近似求解高次方程的线性插值法(第 30 章)。这方面已经有不少研究文献[3]-[7]。除了关于方程的理论研究，卡尔达诺也非常重视将其应用于解决具体问题，例如，他利用“按比例设未知量的法则”来简化平方和的形式(第 33 章) [8]，利用“中间比的法则”来求解齐次方程组(第 34 章) [9]。

在《大术》第 35 章，卡尔达诺利用“和的法则”求解未知量具有一定对称性的二元方程组问题，由于是求两个未知量，他也把这条法则称为“两个量的法则”。他把该法则分为两种形式，一种形式是直接设二量之和为未知量(问题 35.1~35.13 以及 35.17~35.19)，另一种形式是设出两个未知量，其中一个是二量之和(问题 35.14~35.16)。

从现在的观点来看，和的法则至多只能算是一种解题技巧，并且没有普遍适用性，但是在当时的数学背景下，如何有效地解决问题，尤其是如何把问题首先转化成一个方程，是数学家们共同关心的问题。例如，《大术》出版 40 多年后，法国数学家韦达(Francios Vieta, 1540~1604)写有一本著作《列方程五章》(Zeteticum libri quinque)来专论此事[10]，即使在《大术》出版 160 多年后，牛顿(Issac Newton, 1642~1727)在其《广义算术》(Universal arithmetick)中解释如何列方程时仍然不吝笔墨[11]。因此，卡尔达诺的和的法则是有其历史意义的。

卡尔达诺通过具体问题来说明如何使用和的法则，对法则第一种形式他给出 16 个问题，对法则第二种形式他给出 3 个问题，其中第一种形式的问题 35.3~35.4 和第二种形式都受到了意大利著名数学家帕西奥利(Luca Pacioli, 1445~1517)的启发([1], p. 207, 211)。他对法则第二种形式的处理实质上和我们现在解二元方程组的代入解法相同，因此我们不予详细讨论，而是仅列出其问题的类型，以说明他所解决问题中二量的对称性。我们在表 1 中用现代数学公式把卡尔达诺利用和的法则求解的 19 个问题的题设条件展示出来。

Table 1. The problem-setting conditions of the nineteen questions in Chapter 35 of *Ars Magna*
表 1. 《大术》第 35 章 19 个问题的题设条件

问题 1	$a^2+b^2=20$，$ab+a+b=10$	问题 2	$ab=a+b$，$a^2+b^2=20$
问题 3	$ab=a+b$，$a^2+b^2+a+b=20$	问题 4	$ab=a+b$，$\left(\frac{12}{a}\right)^2+\left(\frac{12}{b}\right)^2+a+b=80$

续表

问题 5	$a^2+b^2=20$，$ab=(a-b)^2$	问题 6	$a^2+b^2=10$，$a^3+b^3=30$
问题 7	$a^2+b^2=10$，$a^3-b^3=15$	问题 8	$a^2+b^2=10$，$a^2b+b^2a=20$
问题 9	$a^2+b^2=10$，$a^2b-b^2a=4$	问题 10	$a^2-b^2=10$，$a^3+b^3=100$
问题 11	$a^2-b^2=10$，$a^3-b^3=100$	问题 12	$a^2-b^2=10$，$a^2b+b^2a=100$
问题 13	$a^2-b^2=10$，$a^2b-b^2a=100$	问题 14	$ab=8$，$a^2+b^2+a+b=40$
问题 15	$ab=8$，$a^3+b^3=100$	问题 16	$a^2-b^2=10$，$a+a^2+b^2=40$
问题 17	$a^2=b(a+b)$，$a^2+b^2=10$	问题 18	$a:b=b:c$，$a+b=c$，$a^2+b^2=10$
问题 19	$a:b=b:c$，$ab=10$，$a+b=c$		

对法则第一种形式的 16 个问题，卡尔达诺对其中 6 个问题(即问题 35.1~35.5 以及问题 35.13)给出了详细的过程，说明如何把它们转化成方程；对于其他 10 个问题，即问题 35.6~35.12 以及 35.17~35.19，他直接给出了最后的方程，没有给出中间的推导步骤。我们发现，如果按照现在列方程的习惯做法，所得到的方程可能与卡尔达诺的结果并不相同。对此，《大术》的英译者维特默(Richard Witmer)对某些方程会加上这样的注释：“完全不清楚它是如何由前提得到的。”([1], p. 209)那么，卡尔达诺是如何列出这些方程的？以下我们通过分析卡尔达诺的一个例子来说明其列方程的思路，然后按照古证复原的研究范式探究他如何得出了上述 10 个问题的方程[12] [13]。

2. 卡尔达诺列方程的思路

为了解决上述的复原问题，我们首先要知道卡尔达诺本人列方程的思路。我们以问题 35.13 为例来考察这一点。这个问题为：“求两个数，使它们的平方差为 10，并且每一个数与另一个数的平方所得的乘积之差等于 100。”其解法术文如下。

“设这两个数的和为 x。根据方法的法则，或者根据第四本书中关于运算的那一章可知，我要把这个和分成两部分，并使它们的平方差为 10。用这个差(即 10)除以所分之数的 2 倍(即 $2x$)，商是 $\frac{5}{x}$。用所分之数的一半(即 $\frac{1}{2}x$)加上或减去这个商，即可得到这两部分和它们的平方。如图 1，把后者按照相反的顺序放在其平方根的下面，并用下面的乘以上面的。当我们求两个乘积的差时，只需把不相同的部分(它在一个乘积中为正、在另一个乘积中为负)相乘，就像在求这两个乘积的和时，只需把相似的部分相乘，因为剩下的部分可以互相抵消。因此，用 $\frac{1}{2}x$ 乘以−5，用 $\frac{5}{x}$ 乘以 $\frac{1}{4}x^2+\frac{25}{x^2}$ [1]。在一个乘法中得到正数时，在另一个乘法中会得到负数。用正数减去负数，这相当于把每一个乘积都乘以 2。由此可得，这两个乘积之差为 $2\frac{1}{2}x-\frac{250}{x^3}$，它也等于 100。用各项都除以 $2\frac{1}{2}$，再乘以 x^3，可得 $x^4=40x^3+100$。”([1], pp. 209-210)

[1]拉丁本(284 页)误为“因此，用 $\frac{1}{2}x$ 乘以 $-\frac{5}{x}-5$，并且 $\frac{1}{4}x^2+\frac{25}{x^2}$”(duc igitur $\frac{1}{2}$ position in m. $\frac{5}{1pos.}$ m. 5 & $\frac{1}{4}$ quadrati p. $\frac{25}{1quad.}$)。

$$
\begin{array}{lcc}
 & \dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{x} & \dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{x} \\[2ex]
 & \dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{25}{x^2}-5 & \dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{25}{x^2}+5 \\[1ex]
\hline
 & 2\dfrac{1}{2}x-1\dfrac{1}{4}x-\dfrac{125}{x^3} & 1\dfrac{1}{4}x-2\dfrac{1}{2}x+\dfrac{125}{x^3} \\[1ex]
\hline
\text{差} & \multicolumn{2}{c}{2\dfrac{1}{2}x-\dfrac{250}{x^3}=100} \\[2ex]
 & \multicolumn{2}{c}{x^4=4x^3+100}
\end{array}
$$

Figure 1. Cardano's method for formulating equations
图 1. 卡尔达诺列方程的思路

卡尔达诺要解决的问题是，求两个量 a 和 b，使得 $\begin{cases}a^2-b^2=10\\ a^2b-b^2a=100\end{cases}$。他设二量之和为 x，根据 $\begin{cases}a+b=x\\ a^2-b^2=10\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{x}\\ b=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{x}\end{cases}$，把此结果代入 $a^2b-b^2a=100$ 中，可得

$$
\begin{aligned}
a^2b-b^2a&=\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{x}\right)^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{x}\right)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{x}\right)^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{x}\right)\\
&=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{25}{x^2}+5\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{x}\right)-\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{25}{x^2}-5\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{x}\right)\\
&=2\cdot\frac{x}{2}(-5)+2\cdot\frac{5}{x}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{25}{x^2}\right)\\
&=2\frac{1}{2}x-\frac{250}{x^3}\\
&=100
\end{aligned},
$$

化简最后两行及得他所给出的方程。

这里有两点需要注意。一是卡尔达诺列方程的方法和现在的做法不尽相同。我们现在经常使用简便运算，比如，可以先利用平方差公式得出 $a-b=\dfrac{10}{x}$，然后利用平方恒等式得出

$$
ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{x^2-\left(\frac{10}{x}\right)^2}{4}
$$

代入即得

$$
a^2b-b^2a=ab(a-b)=\frac{x^2-\left(\frac{10}{x}\right)^2}{4}\cdot\frac{10}{x}=100
$$

化简后会得到和卡尔达诺同样的方程，但中间的计算要简略不少。二是卡尔达诺在计算过程中并未详细给出所有中间结果的依据，比如在计算的开始，他要把 x 分成两部分，并且使得其平方差为 100，他

直接给出这两部分为$a,b=\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{x}$，现在我们经常通过解方程或者利用技巧来得到这一点，但他依据的却是“第四本书”。事实上，卡尔达诺曾经计划撰写一个他称之为“完美著作”的数学著作系列，并希望涵盖当时算术、代数与几何的所有领域。这个系列由 14 本书组成，其中第一本为《整数算术》(Artis Arithmeticae Tractatus de Integris)，第二本讨论分数，第三本讨论平方根与立方根，第四本讨论未知量，第五本为《论数的比例》(De Proportionibus Numerorum)，第六本为《论数的性质》(De Numerorum Proprietatibus)，第七本讨论商业问题，第八本讨论本息问题，第九本讨论某些特殊方程，第十本就是《大术》，第十一本讨论平面的度量，第十二本讨论立体的度量，第十三本讨论算术问题，第十四本讨论几何问题。尽管他已完成了其中的相当一部分，但除了《大术》之外，只有第五本书、第六本书以及第一本书的一部分流传下来([1], p. xvii)。他经常在《大术》各种问题的求解中用这个系列的一些法则作为依据来得出中间结果，其中比较常用的是和积法则(已知二量之和与之积，求这两个量)、平方和法则(已知二量之和及其平方和，求这两个量)与平方差法则(已知二量之和及其平方差，求这两个量)。如果用现代公式表示，这三条法则依次如下：

1) 和积法则：若$a+b=m$，$a\cdot b=n$，则

$$a=\frac{m}{2}+\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2-n},\quad b=\frac{m}{2}-\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2-n};$$

2) 平方和法则：若$a+b=m$，$a^2+b^2=n$，则

$$a=\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{n}{2}-\frac{m^2}{4}},\quad b=\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{n}{2}-\frac{m^2}{4}};$$

3) 平方差法则：若$a+b=m$，$a^2-b^2=n$，则$a=\frac{m}{2}+\frac{n}{2m}$，$b=\frac{m}{2}-\frac{n}{2m}$。

3. 卡尔达诺列方程过程的复原

现在，我们已经知道了卡尔达诺列方程的思路以及他经常使用(但未明确说明)的法则，接下来我们就可以对第 1 节中所述的 10 个问题(即问题 35.6~35.12 以及问题 35.17~35.19)的列方程过程展开复原工作([1], pp. 208-209, 213-214)。

3.1. 问题 35.6 的列方程过程复原

现在卡尔达诺对这个问题的全部表述为：“求两个数，使它们的平方和为 10，立方和为 30。设这两个数的和为x，把它分成两部分，使它们的平方和为 10。然后把这两部分的立方相加，可得

$$x^3+60=30x。”$$

我们对此方程的复原如下。设这两个数为a、b ($a>b$)，则它们满足$a^2+b^2=10$，$a^3+b^3=30$。由于，所以结合第一个条件，根据平方和法则可得

$$a=\frac{x}{2}+\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},\quad b=\frac{x}{2}-\sqrt{5-\frac{x^2}{4}}$$

将此结果代入第二个条件可得

$$a^3=\frac{5}{2}x+\sqrt{\frac{5x^4}{4}-\frac{x^6}{16}}+\sqrt{125-\frac{25x^2}{4}}+x\left(5-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$b^3=\frac{5}{2}x-\sqrt{\frac{5x^4}{4}-\frac{x^6}{16}}-\sqrt{125-\frac{25x^2}{4}}+x\left(5-\frac{x^2}{4}\right)$$

因此

$$a^3+b^3=5x+2x\left(5-\frac{x^2}{4}\right)=30$$

化简即得卡尔达诺的方程。

3.2. 问题 35.7 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的全部表述为：“求两个数，使它们的平方和为 10，立方差为 15。如前所述，设这两个数的和为 x，可得

$$x^6=300x^2+1100\text{”}$$

我们对此方程的复原如下。设这两个数为 a、b ($a>b$)，则它们满足 $a^2+b^2=10$，$a^3-b^3=15$。由于 $a+b=x$，所以结合第一个条件，根据平方和法则可得

$$a=\frac{x}{2}+\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},\quad b=\frac{x}{2}-\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},$$

将此结果代入第二个条件可得

$$a^3=\frac{5}{2}x+\sqrt{\frac{5x^4}{4}-\frac{x^6}{16}}+\sqrt{125-\frac{25x^2}{4}}+x\left(5-\frac{x^2}{4}\right),$$

$$b^3=\frac{5}{2}x-\sqrt{\frac{5x^4}{4}-\frac{x^6}{16}}-\sqrt{125-\frac{25x^2}{4}}+x\left(5-\frac{x^2}{4}\right),$$

因此

$$a^3-b^3=\sqrt{5x^4-\frac{x^6}{4}}+\sqrt{500-\frac{100x^2}{4}}=15,$$

两边平方得

$$x^4\left(5-\frac{x^2}{4}\right)+20x^2\left(5-\frac{x^2}{4}\right)+100\left(5-\frac{x^2}{4}\right)=225,$$

化简即得卡尔达诺的方程。

3.3. 问题 35.8 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的全部表述为：“求两个数，使它们的平方和为 10，并且每一个数与另一个数的平方所得的两个乘积之和等于 20。和以前的方法相同，设这两个数的和为 x，可得

$$x^6+300x^2+800x=40x^4+1600\text{。”}$$

我们对此方程的复原如下。设这两个数为 a、b ($a>b$)，则它们满足 $a^2+b^2=10$，$a^2b+ab^2=20$。由于 $a+b=x$，所以结合第一个条件，根据平方和法则可得

$$a=\frac{x}{2}+\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},\quad b=\frac{x}{2}-\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},$$

将此结果代入第二个条件可得

$$a^2b+ab^2=\left(5+\sqrt{5x^2-\frac{x^4}{4}}\right)\left(\frac{x}{2}-\sqrt{5-\frac{x^2}{4}}\right)+\left(\frac{x}{2}+\sqrt{5-\frac{x^2}{4}}\right)\left(5-\sqrt{5x^2-\frac{x^4}{4}}\right)=20,$$

化简得

$$5x-20=\sqrt{100x^2-10x^4+\frac{x^6}{4}},$$

两边平方得

$$25x^2-200x+400=100x^2-10x^4+\frac{x^6}{4},$$

化简即得卡尔达诺的方程。

3.4. 问题 35.9 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的全部表述为：“求两个数，使它们的平方和为 10，并且每一个数与另一个数的平方所得的两个乘积之差等于 4。如前所述，设这两个数的和为 x，可得

$$x^6+500x^2=40x^4+1936\text{。”}$$

我们对此方程的复原如下。设这两个数为 a、b ($a>b$)，则它们满足 $a^2+b^2=10$，$a^2b-ab^2=4$。由于 $a+b=x$，所以结合第一个条件，根据平方和法则可得

$$a=\frac{x}{2}+\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},\quad b=\frac{x}{2}-\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},$$

将此结果代入第二个条件可得

$$a^2b-ab^2=\left(5+\sqrt{5x^2-\frac{x^4}{4}}\right)\left(\frac{x}{2}-\sqrt{5-\frac{x^2}{4}}\right)-\left(\frac{x}{2}+\sqrt{5-\frac{x^2}{4}}\right)\left(5-\sqrt{5x^2-\frac{x^4}{4}}\right)=4,$$

化简可得

$$\sqrt{5x^4-\frac{x^6}{4}}=\sqrt{500-25x^2}+4$$

合并同类项可得

$$\left(x^2-10\right)\sqrt{5-\frac{x^2}{4}}=4$$

两边平方并化简，即得卡尔达诺的方程。

3.5. 问题 35.10 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的全部表述为：“求两个数，使它们的平方差为 10，立方和为 100。把这两部分升幂为它们的立方，可得

$$x^4+300=400x\text{。”}$$

我们对此方程的复原如下。设这两个数为 a、b ($a>b$)，则它们满足 $a^2-b^2=10$，$a^3+b^3=100$。由于 $a+b=x$，所以结合第一个条件，根据平方差法则可得

$$a=\frac{x}{2}+\frac{5}{x}，\quad b=\frac{x}{2}-\frac{5}{x}，$$

将此结果代入第二个条件可得

$$a^3=\frac{x^3}{8}+\frac{15x}{4}+\frac{75}{2x}+\frac{75}{x^3}，\quad b^3=\frac{x^3}{8}-\frac{15x}{4}+\frac{75}{2x}-\frac{75}{x^3}，$$

因此

$$a^3+b^3=\frac{2x^3}{8}+\frac{150}{2x}=100$$

化简即得卡尔达诺的方程。

3.6. 问题 35.11 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的全部表述为："求两个数，使它们的平方差为 10，立方差为 100。如前所述，设这两个数的和为 x，可得

$$x^4+33\frac{1}{3}=13\frac{1}{3}x^3。"$$

我们对此方程的复原如下。设这两个数为 a、b （$a>b$），则它们满足 $a^2-b^2=10$，$a^3-b^3=100$。由于 $a+b=x$，所以结合第一个条件，根据平方差法则可得

$$a=\frac{x}{2}+\frac{5}{x}，\quad b=\frac{x}{2}-\frac{5}{x}，$$

将此结果代入第二个条件可得

$$a^3=\frac{x^3}{8}+\frac{15x}{4}+\frac{75}{2x}+\frac{75}{x^3}，\quad b^3=\frac{x^3}{8}-\frac{15x}{4}+\frac{75}{2x}-\frac{75}{x^3}，$$

因此

$$a^3-b^3=\frac{15x}{2}+\frac{150}{x^3}=100，$$

化简即得卡尔达诺的方程。

3.7. 问题 35.12 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的全部表述为："求两个数，使它们的平方差为 10，并且每一个数与另一个数的平方所得的乘积之和等于 100。如前所述，设这两个数的和为 x，可得

$$x^4=400x+100。"$$

我们对此方程的复原如下。设这两个数为 a、b （$a>b$），则它们满足 $a^2-b^2=10$，$a^2b+ab^2=100$。由于，所以结合第一个条件，根据平方差法则可得

$$a=\frac{x}{2}+\frac{5}{x}，\quad b=\frac{x}{2}-\frac{5}{x}，$$

将此结果代入第二个条件可得

$$a^2b+ab^2=\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{x}\right)^2\left(\frac{x}{2}-\frac{5}{x}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{x}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{5}{x}\right)^2=\frac{x^3}{4}-\frac{25}{x}=100，$$

化简即得卡尔达诺的方程。

3.8. 问题 35.17 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的表述为：“求两个数，使第二个数的平方等于第一个数与这两个数之和的乘积，并且这两个数的平方和为 10。显然，如果 x 被设成它们的和，它会按照黄金分割比分成两部分，它们是 $\sqrt{\frac{5}{4}x^2}-\frac{1}{2}x$ 和 $1\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$，它们的平方和是 $5x^2-\sqrt{20x^4}$，它也等于 10。因此，根据正、负数的加法法则可得

$$5x^2-10=\sqrt{20x^4}$$

因此，这两部分如图 2 所示。”

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{5}}+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{5}}\\ \sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{5}}-\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{5}}\end{array}}$$

Figure 2. Cardano’s way of setting up and solving the equation in Problem 35.17
图 2. 卡尔达诺对问题 35.17 的列方程的解

我们对此方程的复原如下。设这两个数为 a、b （$a>b$），和为 x，则它们满足 $a^2+b^2=10$，$b^2=a(a+b)$。根据黄金分割比

$$a=\sqrt{\frac{5}{4}x^2}-\frac{1}{2}x,\quad b=1\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{5}{4}x^2},$$

将此结果代入第二个条件可得

$$\left(1\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{5}{4}x^2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{5}{4}x^2}-\frac{1}{2}x\right)x,$$

化简即得卡尔达诺的方程

$$5x^2-10=\sqrt{20x^4}\ 。$$

解得

$$x=\sqrt{10+4\sqrt{5}}\ 。$$

代入 a、b 有

$$a=\sqrt{12\frac{1}{2}+5\sqrt{5}}-\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{5}},\quad b=\sqrt{22\frac{1}{2}+9\sqrt{5}}-\sqrt{12\frac{1}{2}+5\sqrt{5}}\ 。$$

需要注意的是，这些结果与卡尔达诺给出的两部分在形式上并不相同，尽管它们在数值上分别是一样的。通过计算会发现，如果我们用平方和法则来表示 a、b，有

$$a=\frac{x}{2}+\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},\quad b=\frac{x}{2}-\sqrt{5-\frac{x^2}{4}}\ 。$$

将 x 代入有

$$a=\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{5}}+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{5}}\text{，}\quad b=\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{5}}-\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{5}}\text{。}$$

此时的 a 、 b 值与卡尔达诺得出的两部分完全相同。

3.9. 问题 35.18 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的表述为："求三个成连比的数，使第一个数加上第二个数等于第三个数，并且第一个数与第二个数的平方和为 10。设第三个数为 x，把它分成两部分，使它们的平方和为 10。这两部分是 $\frac{1}{2}x+\sqrt{5-\frac{1}{4}x^2}$ 和 $\frac{1}{2}x-\sqrt{5-\frac{1}{4}x^2}$ 。用 x 乘以较小的部分，这个乘积等于较大部分的平方。或者，按照黄金分割比把 x 分成两部分，并把这两部分平方，则这两个平方之和为 10。因此，这些数如图 3 所示。"

第一个数	$\sqrt{22\frac{1}{2}+\sqrt{405}}-\sqrt{12\frac{1}{2}+\sqrt{125}}$
第二个数	$\sqrt{12\frac{1}{2}+\sqrt{125}}-\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{5}}$
第三个数	$\sqrt{10+\sqrt{80}}$

Figure 3. Cardano's way of setting up and solving the equation in Problem 35.18

图 3. 卡尔达诺对问题 35.18 的列方程的解

我们对此方程的复原如下。设这三个数为 a 、 b 、 c （$c>a>b$），$c=x$，则有 $a+b=x$，$a^2+b^2=10$，$a^2+b^2=10$，根据平方和法则可得

$$a=\frac{1}{2}x+\sqrt{5-\frac{1}{4}x^2}\text{，}\quad b=\frac{1}{2}x-\sqrt{5-\frac{1}{4}x^2}\text{，}$$

代入第三个条件可得

$$x^4=20x^2-20\text{，}$$

解得

$$x=\sqrt{10+\sqrt{80}}\text{。}$$

代入 a 、 b 有

$$a=\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{5}}+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{5}}\text{，}\quad b=\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{5}}-\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{5}}\text{，}$$

与问题 3.8 的分析类似，这些结果与卡尔达诺的结果在形式上并不相同但是在数值上分别相等。我们通过计算发现，将 x 代入由黄金分割比得到的结果，即可得到卡尔达诺计算所得的两部分。

3.10. 问题 35.19 的列方程过程复原

卡尔达诺对这个问题的表述为："类似地，如果有人说：求三个成连比的数，使第一个数与第二个

数的乘积为 10，并且第一个数与第二个数之和等于第三个数。根据与前面相同的方法，可得如图 4 所示的这些量。”

第一个数	$\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}+5}-\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}-5}$
第二个数	$\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}+5}+\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}-5}$
第三个数	$\sqrt{\sqrt{500}+20}$

Figure 4. Cardano's way of setting up and solving the equation in Problem 35.19
图 4. 卡尔达诺对问题 35.19 的列方程的解

我们对此方程的复原如下。设这三个数为 a、b、c（$c>a>b$），$c=x$，则有 $a+b=x$，$ab=10$，$b^2=ac$，根据和积法则可得

$$a=\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-10}\text{，}\quad b=\frac{x}{2}-\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-10}\text{，}$$

代入第三个条件可得

$$x^4=40x^2+100\text{，}$$

解得

$$x=\sqrt{\sqrt{500}+20}\text{。}$$

代入 a、b 有

$$a=\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{5}+5}+\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{5}-5}\text{，}\quad b=\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{5}+5}-\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{5}-5}\text{，}$$

与 35.9 的分析类似，利用和积法则得到的结果与卡尔达诺的结果在形式上差别很大但是在数值上分别相等。我们通过进一步计算发现，将 x 代入由黄金分割比得到的结果，即可得到卡尔达诺计算所得的两部分。

至此，我们就完成了对卡尔达诺的上述 10 个方程的复原工作。

4. 结语

卡尔达诺显然是为了节省篇幅而略去了上述 10 个问题中方程的推导过程，但我们第 3 节的分析表明，这个过程并非一目了然，因此现代读者自然会关心他的具体步骤到底是什么。不过，由于《大术》距今已有 480 年，接受现代数学教育的读者很难适应卡尔达诺当时的独特做法，尤其是，他对很多基本法则并未在这本书中明示，例如我们在第 2 节列出的和积法则、平方和法则、平方差法则等。这种做法的独特性无疑来自当时特殊的数学背景。在 16 世纪中期，即《大术》的写作年代，代数学的理论研究才刚刚起步，这门学科甚至直到一百年以后还主要表现为代数法则的汇编；此外，代数符号的发展还处于缩略代数阶段，这种现状使得当时的数学家无法像现在这样进行合并同类项、因式分解等代数操作。卡尔达诺的独特做法导致很多读者按照现代方法列出的方程与他给出的方程往往并不相同，如前所述，即使

是像《大术》英译者维特默这样的专家也会遇到同样的问题。

比如，对于问题 35.8，如果我们同样设 $x=a+b$，并结合第一个条件，但不是利用卡尔达诺的平方和法则，而是利用现在常用的平方恒等式，我们可以得到

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{x^2-10}{2},$$

然后将此结果代入第二个条件，并利用常用的因式分解技巧，我们将得到

$$a^2b+b^2a=ab(a+b)=\frac{x^2-10}{2}\cdot x=20\text{，即 }x^3=10x+40\text{，}$$

而卡尔达诺的方程则是

$$x^6+300x^2+800x=40x^4+1600\text{。}$$

也就是说，我们用现代技巧得出的方程与卡尔达诺本人的方程并不一致。事实上，这个方程按照现代书写可以分解为

$$(x^3-10x-40)(x^3-30x+40)=0,$$

也就是说，卡尔达诺在列方程的过程中由于两边平方而添加了三个增根。这种不一致性反过来也印证了我们上述复原工作的合理性。

通过本文的工作，我们比较圆满地解决了上述历史谜题，即卡尔达诺是如何利用“和的法则”列出这些方程的。另一方面，通过对卡尔达诺原始数学思想的复原和分析，我们也可以为现代初等代数学中相关问题的解决提供一些不同的思路。卡尔达诺的这种解法与现在相比虽然略显笨重，但是它更强调结构性的法则，并且更重视代数运算的统一性。这种做法可以帮助学生更好地理解代数恒等变形的本质，而不是仅仅将其作为机械的符号操作。

基金项目

国家社会科学基金一般项目“文艺复兴时期代数学经典文献译注与研究(25BKX075)”。

参考文献

[1] Cardano, G. (1993) Ars Magna. Dover publications.
[2] Cardano, G. (1663) Artis magnae sive de regulis algebraicis. Huguetan & Ravaud.
[3] 赵继伟. 卡尔达诺关于三次方程的特殊法则[J]. 自然科学史研究, 2010, 29(2): 197-215.
[4] 赵继伟. 卡尔达诺关于四次方程特殊法则的构造原理——兼论数学史的研究范式[J]. 自然科学史研究, 2008, 27(3): 325-336.
[5] 赵继伟. 卡尔达诺关于方程变换的一条错误法则[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2009, 39(1): 165-168.
[6] Derbyshire, J. (2006) The Unknown Quantity: A Real and Imaginary History of Algebra. Joseph Henry Press.
[7] 赵继伟, 杨宝山. 卡尔达诺的“黄金法则” [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2005, 35(3): 370-372.
[8] 赵继伟, 李刚. 卡尔达诺按比例设未知量的法则[J]. 内蒙古示范大学学报(自然科学版), 2019, 48(6): 567-571.
[9] 赵继伟. 卡尔达诺的 5 个成连比量的法则[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2009, 37(5): 14-19.
[10] Viète, F. (1646) Zeteticum libri quinque in Opera Mathematica. Lugdini Batavorum.
[11] Newton, I. (1769) Universal Arithmetick: Or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. W. Johnston.
[12] 吴文俊. 吴文俊文集[M]. 济南: 山东教育出版社, 1986: 54-73.
[13] 曲安京. 中国数学史研究范式的转换[J]. 中国科技史杂志, 2005, 26(1): 50-58.