

# 关于逆距圆包装的曲面分支组合 $p$ 次Ricci流

吴隆祥, 林爱津\*

国防科技大学理学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2025年9月14日; 录用日期: 2025年10月8日; 发布日期: 2025年10月16日

## 摘要

本文研究了曲面上逆距圆包装情形的分支组合 $p$ 次Ricci流。对于逆距圆包装, 流方程的解在有限时间内可能会发展出三类边界奇点, 分别是“零边界”、“无穷边界”、“三角形爆破边界”。我们运用延拓技巧以及分支组合Ricci势的凸性, 在二维欧氏空间和二维双曲空间中, 给出了逆距圆包装中延拓的分支组合 $p$ 次Ricci流的解长时间存在性以及部分收敛结果。

## 关键词

逆距, 分支结构, 组合Ricci势, 组合Ricci流

# Branched Combinatorial $p$ -th Ricci Flows on Surfaces for Inversive Distance Circle Packings

Longxiang Wu, Aijin Lin\*

College of Science, National University of Defence Technology, Changsha Hunan

Received: September 14, 2025; accepted: October 8, 2025; published: October 16, 2025

## Abstract

In this paper, we study branched combinatorial  $p$ -th Ricci flows for inversive distance circle packings. Due to the inversive distance condition  $I > -1$ , the solutions to the flow equations may develop three distinct types of boundary singularities, namely “zero boundary”, “infinity boundary” and “triangle inequality invalid boundary” in finite time. Adopting the extension techniques and the convex property of the branched combinatorial Ricci potential, we establish the long time existence and convergence of the solutions to the branched combinatorial  $p$ -th Ricci flows for inversive distance

\*通讯作者。

文章引用: 吴隆祥, 林爱津. 关于逆距圆包装的曲面分支组合  $p$  次 Ricci 流[J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 250-261.  
DOI: 10.12677/aam.2025.1410437

circle packing in Euclidean (resp., hyperbolic) background geometry.

## Keywords

Inversive Distance, Branched Structure, Combinatorial Ricci Potential, Combinatorial Ricci Flow

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

圆包装(circle packing)理论作为复分析与离散几何交叉领域的研究方向, 在近几十年间取得快速发展。Koebe 和 Andreev 率先研究了两两相切的圆包装, Thurston 将其推广到两圆以锐角或直角相交的圆堆积(circle pattern)。在[1]中, Chow 与 Luo 提出了表面上的组合 Ricci 流, 作为光滑 Ricci 流的离散对应。他们证明了组合 Ricci 流的解始终存在, 并且当且仅当在二维欧氏空间  $\mathbb{R}^2$  和二维双曲空间  $\mathbb{H}^2$  中存在常曲率的圆包装度量时, 该解会以指数速度收敛到表面上 Thurston 型圆包装。组合曲率流和圆堆积为研究三维流形的几何与拓扑提供了有用的工具。

在 Thurston 给出常曲率圆包装度量的存在性判断准则之后, Bowers 与 Stephenson 推广了两类圆包装。Dubejko 首先在[2]中提出分支圆包装, 给出了闭曲面上恒定权重的分支圆包装存在性的充分必要条件。随后, Bowers 与 Stephenson 在[3]中, 并且证明了分支情形下的 Andreev-Thurston 定理。Lan 与 Dai 在[4]中研究了分支圆包装下的组合 Ricci 流, 通过运用分支组合 Ricci 势的凸性, 证明了分支圆包装下的组合 Ricci 流的长时间存在性以及收敛性, 给出了闭曲面上锐角权重的分支圆包装存在性的充分必要条件。

Bowers John 与 Bowers Philip 在[5]中通过反演距离来度量不相交的相邻圆, 推广了 Thurston 型圆包装至逆距圆包装, 同时他们推测逆距圆包装具有刚性。基于 Zhou 的工作[6], Xu 在[7]中证明了逆距圆包装的刚性。受 Chow 与 Luo 的启发, Ge 与 Jiang 在[8]-[10]中研究了逆距圆包装下的组合 Ricci 流, 结合 Luo 在[11]中引入的延拓三角形的定义, 证明了逆距圆包装下的延拓组合 Ricci 流的长时间存在性以及收敛性。

自 Chow 与 Luo 提出表面上组合 Ricci 流以来, 组合曲率流在几何拓扑与实际应用中均有广泛应用。目前已被广泛研究的组合曲率流包括但不限于: Chow 与 Luo 提出的组合 Ricci 流[1]、Luo 提出的组合 Yamabe 流[12]、Ge 提出的离散共形结构的组合 Calabi 流[13][14]、Lin 与 Zhang 提出的组合  $p$  次 Ricci 流以及组合  $p$  次 Calabi 流[15][16]、Ge 等人提出的测地曲率下的组合曲率流[17]-[19]。Lin 与 Zhang 通过考虑离散  $p$  次 Laplace 算子, 把组合 Ricci 流、组合 Yamabe 流、组合 Calabi 流等视为组合  $p$  次曲率流在  $p=2$  时的特殊情形, 为组合曲率流提供了更广泛的研究框架。

在本文中, 我们在 Ge 与 Jiang 关于逆距圆包装组合 Ricci 流的研究启发下, 研究了逆距圆包装下分支组合  $p$  次 Ricci 流, 证明其长时间存在性以及收敛性。下面是我们的主要结果。

**定理 1.1:** 在  $\mathbb{R}^2$  和  $\mathbb{H}^2$  中, 设  $(M, T, I)$  是具有逆距  $I > -1$  的三角剖分闭曲面。给定任意初始逆距圆包装度量  $r(0) \in \mathbb{R}_{>0}^N$ , 延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流的解  $r(t)$  长时间存在。

**定理 1.2:** 给定带有逆距  $I > -1$  且满足  $I_{ij} + I_{ik} I_{jk} \geq 0, I_{ik} + I_{ij} I_{jk} \geq 0, I_{jk} + I_{ij} I_{ik} \geq 0, \forall \Delta_{ijk} \in F$  的三角剖分曲面  $(M, T, I)$ 。假设  $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$  是逆距圆包装下延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流的长时间解, 那么

- (1) 在  $\mathbb{H}^2$  中,  $\{r(t)|t \in [0, +\infty)\}$  收敛当且仅当存在分支圆包装度量  $r_b \in \Omega$ 。  
 (2) 在  $\mathbb{E}^2$  中, 若存在分支圆包装度量  $r_b \in \Omega$ , 则延拓离散 Gauss 曲率  $\tilde{K}_t$  沿着解  $r(t)$  收敛, 且  $\{\tilde{K}(t)|t \in [0, +\infty)\}$  收敛至  $(-2\beta_1\pi, \dots, -2\beta_N\pi)$ 。若  $\{r(t)|t \in [0, +\infty)\}$  收敛, 则存在分支圆包装度量  $r_b \in \mathbb{R}^N$ 。

## 2. 预备知识

### 2.1. 圆包装

设  $M$  是一个闭三角剖分曲面, 记号其三角剖分为  $T$ 。分别用  $V = V(T)$ ,  $bd(T)$ ,  $int(T)$  表示所有顶点、边界顶点和内部顶点的集合。 $T$  中所有边和面的集合分别记为  $E = \{e_{ij}\}$  以及  $F = \{\Delta_{ijk}\}$ 。三角剖分上的权重是一个函数  $\Phi: E \rightarrow [0, \pi/2]$ 。我们称  $(T, \Phi)$  为  $M$  的加权三角剖分, 且  $(M, T, \Phi)$  为一个加权三角剖分曲面。将三角剖分的顶点排序为  $v_1, \dots, v_N$ , 其中  $N = |V|$  表示顶点的数量。任意函数  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  对应列向量  $(f_1, \dots, f_N)^T \in \mathbb{R}^N$ , 这里  $f_i$  表示值  $f(v_i)$ 。设  $c_i$  为与顶点  $v_i \in V$  相关联的圆, 且  $r_i \in (0, +\infty)$  为圆  $c_i$  的半径。我们称半径函数  $r: V \rightarrow (0, +\infty)^N := \mathbb{R}_{>0}^N$  为圆包装度量。给定  $(M, T, \Phi)$  以及圆包装度量  $r$ , 我们为每条边  $e_{ij} \in E$  赋予长度

$$\begin{aligned} l_{ij}^\Phi &= \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos \Phi_{ij}}, & \text{in } \mathbb{E}^2, \\ l_{ij}^\Phi &= \cosh^{-1}(\cosh r_i \cosh r_j + \sinh r_i \sinh r_j \cos(\Phi(e_{ij}))), & \text{in } \mathbb{H}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\mathbb{E}^2$  表示欧氏背景几何,  $\mathbb{H}^2$  表示双曲背景几何。对于任意边长由(1)给出的三角形面, Thurston 证明了其边长满足三角不等式。然而, Thurston 考虑的圆包装要求相邻的圆彼此相交, 这一限制条件过于严格。因此, Bowers 和 Stephenson 引入了逆距圆包装, 该圆包装允许相邻的圆不相交, 并通过逆距来度量它们的相对位置。考虑两个圆  $c_1$  和  $c_2$ , 其半径分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 且假设  $c_1$  与  $c_2$  互相不包含。若它们的圆心距离为  $l_{12}$ , 则两圆之间的逆距由下式给出:

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{(l_{12})^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} & \text{in } \mathbb{E}^2, \\ I_{12} &= \frac{\cosh l_{12} - \cosh r_1 \cosh r_2}{\sinh r_1 \sinh r_2} & \text{in } \mathbb{H}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

这两个公式可通过球极投影相关联[5]。逆距推广了两圆相交角。若  $l_{12} > |r_1 - r_2|$ , 可知  $-1 < I_{12} < +\infty$ 。逆距描述了两圆的相对位置。若  $I_{12} \in (-1, 0)$ , 则两圆相交, 且相交角  $\arccos I_{12} \in (\pi/2, \pi)$ ; 若  $I_{12} \in [0, 1]$ , 则两圆相交, 且相交角  $\arccos I_{12} \in [0, \pi/2]$ ; 若  $I_{12} \in (1, +\infty)$ , 则两圆是分离的。下面我们重新表述 Bowers 和 Stephenson 关于在三角剖分曲面  $(M, T)$  上具有给定逆距  $I$  的逆距圆包装的构造。将  $I$  视为定义在所有边上的函数, 即  $I: E \rightarrow (-1, +\infty)$ , 我们称为逆距。在具有逆距的三角剖分曲面上, 每个  $r: V \rightarrow (0, +\infty)^N = \mathbb{R}_{>0}^N$  被称为逆距圆包装度量, 且我们为每条边  $e_{ij} \in E$  赋予长度

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j I_{ij}}, & \text{in } \mathbb{E}^2, \\ l_{ij} &= \cosh^{-1}(\cosh r_i \cosh r_j + I_{ij} \sinh r_i \sinh r_j), & \text{in } \mathbb{H}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

需要注意的是, 逆距圆包装下, 对于一个三角形面  $\Delta_{ijk} \in F$ , 其边长  $l_{ij}, l_{ik}, l_{jk}$  可能不再满足三角不等式, 这与 Thurston 的结论有很大的不同。记号容许空间为

$$\Omega = \left\{ r \in \mathbb{R}_{>0}^N \mid l_{ij} + l_{jk} > l_{ik}, l_{ij} + l_{ik} > l_{jk}, l_{ik} + l_{jk} > l_{ij}, \forall \Delta_{ijk} \in F \right\}. \quad (4)$$

我们称每一个  $r \in \Omega$  为实逆距圆包装度量, 而  $r \in \mathbb{R}_{>0}^N / \Omega$  为虚逆距圆包装度量。设  $\theta_i^{jk}$  为三角形  $\Delta_{ijk}$  在

顶点  $v_i$  处的内角, 则顶点  $v_i$  处的离散 Gauss 曲率可表示为

$$K_i = 2\pi - \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \theta_i^{jk}. \quad (5)$$

对于加权三角剖分曲面  $(M, T, \Phi)$  上的圆包装度量, Thurston 证明了下述组合 Gauss-Bonnet 公式

$$\sum_{i=1}^N K_i = 2\pi\chi(X) - \lambda \text{Area}(M), \quad (6)$$

而对于逆距圆包装, 运用 Thurston 的证明方法, 我们可以证明对于实逆距圆包装组合 Gauss-Bonnet 公式仍然成立。

Andreev-Thurston 定理证明了存在圆包装为极大圆包装(该术语参照文献[20]), 且在其承载复形能三角剖分二维球面的条件下, 此极大圆包装在共形自同构意义下具有唯一性。然而, 若去除这一条件, 则可能存在其他的圆包装。这类圆包装会包含某种分支结构: 具体来说, 若圆包装中某一圆  $C_v$  的邻接圆围绕  $C_v$  共  $n+1$  圈(其中  $n \geq 1$ ), 则称顶点  $v$  为圆包装的  $n$  阶分支点(branched point)。圆包装的分支集记号为  $br(P) = \{(v_1, \beta_1), (v_2, \beta_2), \dots, (v_m, \beta_m)\}$ , 其中  $\beta_i$  表示顶点  $v_i$  的分支阶数。从拓扑角度分析可知, 带有分支集的圆包装的承载复形是球面的分支覆盖, 且其所有分支点的分支阶数之和为偶数。

为便于理解, 我们在图 1 左侧呈现权重恒为 0 的 Thurston 型圆包装, 图 1 右侧呈现权重恒为 0 的带有两个分支点的圆包装。图 1 右侧中的两个分支点, 一个位于阴影圆的中心(称为北极点), 另一个位于南极点处的圆的中心(未显示)。观察与阴影圆相切的那些圆, 会发现它们围绕阴影圆两圈。该分支圆包装诱导出球面的一个二重覆盖, 在北极和南极点处局部为二对一, 而在其他顶点局部为一一对应。

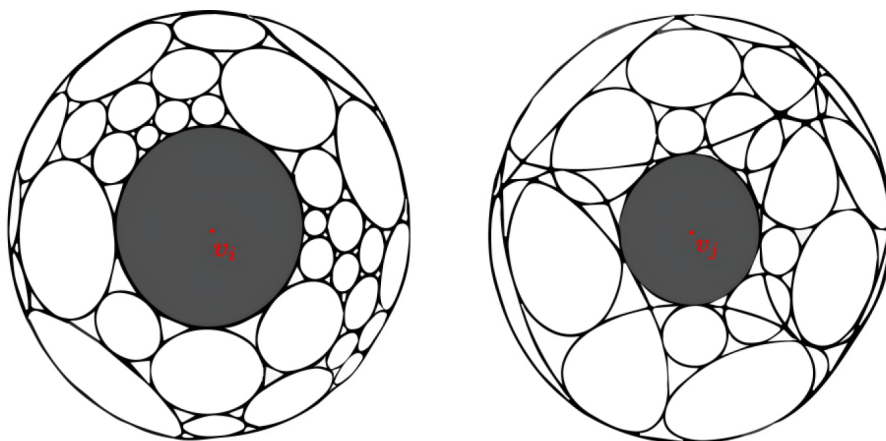


Figure 1. Circle packing and Branched Circle packing with weight = 0

图 1. 权重恒为 0 的圆包装与分支圆包装

在分析带有分支集的圆包装时, 与 Andreev-Thurston 中寻找的极大圆包装所对应的是分支圆包装。

给定一个具有逆距  $I$  的三角剖分曲面  $(M, T)$ , 假设  $P$  是对应三角剖分  $T$  的一个圆包装, 且

$br(P) = \{(v_1, \beta_1), (v_2, \beta_2), \dots, (v_m, \beta_m)\}$  是  $P$  的分支集。一个圆包装度量  $r_b: V \rightarrow (0, +\infty)^N$  被称为分支圆包装度量当且仅当对于任意顶点  $v_i \in V$ , 其离散 Gauss 曲率满足

$$K_i(r_b) + 2\beta_i\pi = 0. \quad (7)$$

若顶点  $v_i$  不是分支点, 设定其分支阶数  $\beta_i = 0$ 。我们将分支圆包装度量对应的圆包装称为分支圆包装。

## 2.2. 延拓三角形以及延拓曲率

给定具有逆距  $I > -1$  的闭三角剖分曲面  $(M, T, I)$ , 对于给定的逆距圆包装度量  $r \in \mathbb{R}_{>0}^N$ , 每个三角形  $\Delta_{ijk} \in F$  被赋予边长  $l_{ij}, l_{ik}, l_{jk}$ 。注意离散 Gauss 曲率的定义要求逆距圆包装度量  $r$  限制在允许空间  $\Omega$  上, 也就是要求其为实逆距圆包装度量。如文献[8]所述, 我们可将内角与离散 Gauss 曲率的定义域延拓至  $\mathbb{R}_{>0}^N$  上。我们聚焦到一个三角形面  $\Delta_{ijk} \in F$ , 记号

$$\Omega_{ijk} = \left\{ (r_i, r_j, r_k) \in \mathbb{R}_{>0}^3 \mid l_{ij} + l_{ik} > l_{jk}, l_{ij} + l_{jk} > l_{ik}, l_{ik} + l_{jk} > l_{ij} \right\} \quad (8)$$

表示  $v_i, v_j, v_k$  的容许空间。Zhou 在[6]中建立了下述关于逆距的限制条件

$$I_{ij} + I_{ik} I_{jk} \geq 0, I_{ik} + I_{ij} I_{jk} \geq 0, I_{jk} + I_{ij} I_{ik} \geq 0, \forall \Delta_{ijk} \in F. \quad (9)$$

在该条件下, Xu 在[7]中证明了 Bower 与 Stephenson 的刚性猜想, 并且证明了  $\Omega_{ijk}$  是单连通且开的。若没有该条件, 仅限制逆距满足  $I > -1$ , 我们只能得到  $\Omega_{ijk}$  是  $\mathbb{R}_{>0}^3$  的真子集。

我们现在介绍延拓三角形。记号  $\tilde{\theta}_i^{jk}(r_i, r_j, r_k)$  表示顶点  $v_i$  处的延拓内角, 按如下规则定义: 若  $l_{ij}, l_{ik}, l_{jk}$  的任意组合都满足三角不等式, 则  $\tilde{\theta}_i^{jk}$  是边长为  $l_{ij}, l_{ik}, l_{jk}$  的三角形中的内角  $\theta_i^{jk}$ ; 若  $l_{ij} \geq l_{ik} + l_{jk}$ , 则顶点  $v_k$  处的延拓内角  $\tilde{\theta}_k^{ij} = \pi$ , 顶点  $v_i$  以及  $v_j$  处的延拓内角  $\tilde{\theta}_i^{jk} = \tilde{\theta}_j^{ik} = 0$ 。

为方便理解, 设定在  $\mathbb{R}^2$  中, 我们在图 2 中给出了三个圆, 其圆心分别为  $v_i, v_j, v_k$ , 且设置三条边的逆距分别为  $I_{ij} = 1, I_{ik} = 1, I_{jk} = 3$ 。图 2 左侧中, 每个圆的半径均为 1, 且  $e_{ij}$  与  $e_{ik}$  相互垂直, 此时可通过简单验算得  $I_{jk} = 3$ 。在图 2 右侧中, 设置圆半径分别为  $r_i = 1, r_j = 2, r_k = 3$ , 且圆心均在同一直线上, 此时可知  $l_{jk} = \sqrt{r_j^2 + r_k^2 + 2r_j r_k I_{jk}} = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 = r_k + 2r_i + r_j$ , 而此时三角不等式不再满足, 三角形退化为直线, 延拓内角在这种情形下设置为  $\pi, 0$ 。

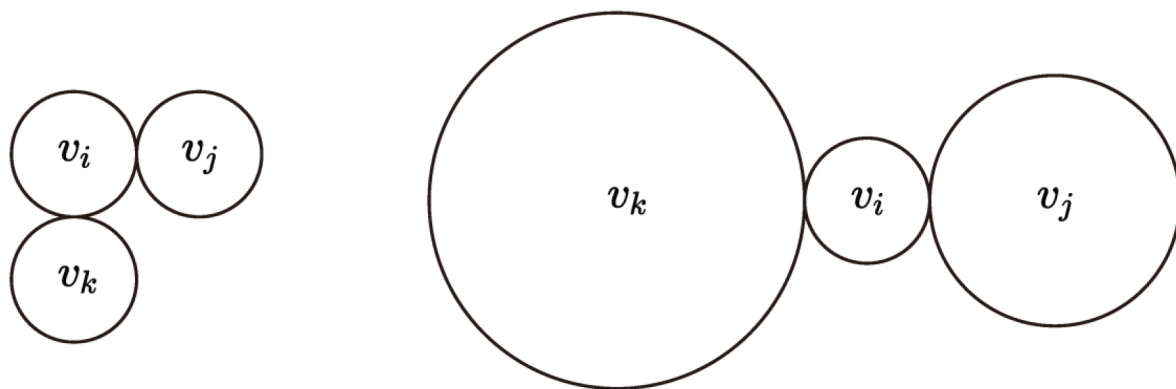


Figure 2. Three circles with inversive distance  $I_{ij} = 1, I_{ik} = 1, I_{jk} = 3$

图 2. 逆距分别为  $I_{ij} = 1, I_{ik} = 1, I_{jk} = 3$  的三个圆

延拓内角函数  $\tilde{\theta}: \mathbb{R}_{>0}^3 \rightarrow [0, \pi]$  由 Ge 与 Jiang 在[8]中明确构造并证明是连续的。首先引入辅助函数  $\Lambda: \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi]$  如下:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \pi, & x \leq -1, \\ \arccos x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

$\Lambda$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且对每个  $x \in \mathbb{R}$ , 有  $\Lambda(-x) = \pi - \Lambda(x)$ 。综上, 可得

$$\tilde{\theta}_i^{jk}(l_{jk}, l_{ik}, l_{ij}) = \begin{cases} \Lambda \left( \frac{x_{ik}^2 + x_{ij}^2 - x_{jk}^2}{2x_{ik}x_{ij}} \right), & \text{in } \mathbb{E}^2, \\ \Lambda \left( \frac{\cosh x_{ik} \cosh x_{ij} - \cosh x_{jk}}{\sinh x_{ik} \sinh x_{ij}} \right), & \text{in } \mathbb{H}^2, \end{cases} \quad (10)$$

可得  $\tilde{\theta}_i^{jk} \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}^3)$ 。因此, 离散 Gauss 曲率  $K(r): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  可连续延拓为  $\tilde{K}(r): \mathbb{R}_{\geq 0}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , 其中顶点  $v_i$  处的曲率定义为

$$\tilde{K}_i(r) = 2\pi - \sum_{\Delta ijk \in F} \tilde{\theta}_i^{jk}. \quad (11)$$

在延拓离散 Gauss 曲率  $\tilde{K}$  的框架下, 组合 Gauss-Bonnet 定理已被推广(命题 3.11, 文献[8]), 表明在延拓情形下延拓内角函数的可用性:

$$\sum_{i=1}^N \tilde{K}_i = \begin{cases} 2\pi\chi(M) - \text{Area}(M), & \text{in } \mathbb{H}^2, \\ 2\pi\chi(M), & \text{in } \mathbb{E}^2. \end{cases} \quad (12)$$

### 2.3. 分支组合 $p$ 次 Ricci 流

给定加权三角剖分曲面  $(M, T, \Phi)$ , 假设  $P$  是对应三角剖分  $T$  的一个圆包装,  $r$  为其上的一个圆包装度量。Chow 与 Lou 在[1]中首次在组合意义下引入了 Hamilton 的 Ricci 流, 即组合 Ricci 流。其定义为

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} &= -K_i r_i, & \text{in } \mathbb{E}^2, \\ \frac{dr_i}{dt} &= -K_i \sinh r_i, & \text{in } \mathbb{H}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Chow 与 Luo 证明了组合 Ricci 流的长时间存在性, 且会以指数速度收敛到 Thurston 型圆包装。Lin 与 Zhang 在[16]中将组合 Ricci 流推广至组合  $p$  次 Ricci 流, 其中  $p=2$  时, 组合  $p$  次 Ricci 流即为组合 Ricci 流。Lan 与 Dai 在圆包装  $P$  的基础上引入了分支集  $br(P) = \{(v_1, \beta_1), (v_2, \beta_2), \dots, (v_m, \beta_m)\}$ , 推广组合 Ricci 流到分支组合 Ricci 流, 如下:

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} &= -(K_i + 2\pi\beta_i) r_i, & \text{in } \mathbb{E}^2 \\ \frac{dr_i}{dt} &= -(K_i + 2\pi\beta_i) \sinh r_i. & \text{in } \mathbb{H}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Lan 与 Dai 运用分支组合 Ricci 流得到了分支圆包装度量的存在性准则。Gao 与 Lin 在[21]研究了分支组合 Calabi 流, 并且在[22]提出了分支组合  $p$  次 Ricci 流, 如下:

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} &= -|K_i + 2\pi\beta_i|^{p-2} (K_i + 2\pi\beta_i) r_i, & \text{in } \mathbb{E}^2, \\ \frac{dr_i}{dt} &= -|K_i + 2\pi\beta_i|^{p-2} (K_i + 2\pi\beta_i) \sinh r_i, & \text{in } \mathbb{H}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

坐标变换  $r \mapsto u$  在  $\mathbb{E}^2$  中定义为  $u_i = \ln r_i$ , 在  $\mathbb{H}^2$  中定义为  $u_i = \ln \tanh(r_i/2)$ , 该变换为同胚映射, 故而在后续小节中既能使用  $u$  坐标, 也可使用  $r$  坐标。运用该变换, 分支组合  $p$  次 Ricci 流方程可转换为如下自治常微分方程组:

$$\begin{cases} u_i'(t) = -|K_i + 2\pi\beta_i|^{p-2} (K_i + 2\pi\beta_i), \\ u(0) \in \Omega. \end{cases} \quad (16)$$

然而, 在 Gao 与 Lin 所考虑的情形中, 权重  $\Phi \in [0, \pi/2]$  (即  $I = \cos \Phi \in [0, 1]$ ), 此时  $p$  次流方程的解在容许空间  $\Omega = \mathbb{R}_{>0}^N$  中仅涉及两种不同类型的边界。然而, 在逆距  $I > -1$  的情形下, 涉及三种不同类型的边界。给定  $I > -1$  的条件, 我们将流方程在  $\Omega$  中的有限时间边界区分为三类: 第一类是零边界, 即若  $r(t)$  触及零边界, 意味着存在时间序列  $t_n \rightarrow T$  和顶点  $v_i \in V$ , 使得  $r_i(t_n) \rightarrow 0$ ; 第二类是无穷远边界, 即若  $r(t)$  触及无穷远边界, 表现为存在  $t_n \rightarrow T$  和顶点  $v_i \in V$ , 使得  $r_i(t_n) \rightarrow +\infty$ ; 第三类是三角形爆破边界, 即对于某一三角形  $\Delta_{ijk} \in F$  和序列  $t_n \rightarrow T$ , 使得  $\Delta_{ijk}$  的三角不等式不再成立。

对于这一情形, 我们采用 Ge 与 Jiang 的开创性方法, 考虑逆距圆包装下的延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流。给定具有逆距  $I > -1$  的三角剖分曲面  $(M, T, I)$ , 考虑对应三角剖分  $T$  的圆包装  $P$  以及其分支集  $br(P) = \{(v_1, \beta_1), (v_2, \beta_2), \dots, (v_m, \beta_m)\}$ , 延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流定义如下:

$$\begin{cases} u_i'(t) = -|\tilde{K}_i + 2\pi\beta_i|^{p-2}(\tilde{K}_i + 2\pi\beta_i), \\ u(0) \in \Omega. \end{cases} \quad (17)$$

### 3. 长时间存在性

在本节中, 我们研究延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流, 证明其长时间存在性。首先, 我们给出双曲背景几何中的一个引理。

**引理 3.1.** 在  $\mathbb{H}^2$  中, 考虑由三个具有固定逆距  $I_{ij}, I_{ik}, I_{jk} > -1$  的圆所构成的双曲三角形  $\Delta_{ijk}$ 。对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $l > 0$ , 使得当  $r_i > l$  时, 有  $\tilde{\theta}_i^{jk} < \varepsilon$ 。

**证明:** 我们分为两部分。首先考虑若三边边长满足三角不等式的情形。此时有  $\tilde{\theta}_i^{jk} = \theta_i^{jk}$ 。此时, 要证明的结论可通过下述极限形式重新表述:

$$\lim_{r_i \rightarrow +\infty} \theta_i^{jk} = 0.$$

我们首先证明当  $r_i \rightarrow +\infty$  时,  $l_{ij}, l_{ik} \rightarrow +\infty$ 。根据边长的定义, 有

$$\begin{aligned} \cosh l_{ij} &= \cosh r_i \cosh r_j + I_{ij} \sinh r_i \sinh r_j \\ &= (\sinh r_i + e^{-r_i}) \cosh r_j + I_{ij} \sinh r_i \sinh r_j \\ &= \sinh r_i (\cosh r_j + I_{ij} \sinh r_j) + e^{-r_i} \cosh r_j. \end{aligned} \quad (18)$$

我们断言, 项  $\cosh r_j + I_{ij} \sinh r_j$  存在仅依赖于  $I_{ij}$  的正下界。当  $I_{ij} \geq 0$  时, 因  $r_j > 0$ , 可得  $\cosh r_j + I_{ij} \sinh r_j > 1$ ; 当  $-1 < I_{ij} < 0$  时, 有

$$\cosh r_j + I_{ij} \sinh r_j = \cosh r_j + I_{ij} (\cosh r_j - e^{-r_j}) \geq (1 + I_{ij}) \cosh r_j - I_{ij} e^{-r_j} > 1 + I_{ij} > 0,$$

这证明了我们的断言。因此, 当  $r_i \rightarrow +\infty$  时, 由式(18)可知  $\cosh l_{ij} \rightarrow +\infty$ , 同理  $\cosh l_{ik} \rightarrow +\infty$ 。由于  $\cosh x$  在  $x \geq 0$  时严格递增, 故  $l_{ij} \rightarrow +\infty$  且  $l_{ik} \rightarrow +\infty$ 。直接计算可得:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i^{jk} &= \frac{\cosh l_{ij} \cosh l_{ik} - \cosh l_{jk}}{\sinh l_{ij} \sinh l_{ik}} \\ &= \frac{\cosh l_{ij} \cosh l_{ik}}{\sinh l_{ij} \sinh l_{ik}} \left( 1 - \frac{\cosh l_{jk}}{\cosh l_{ij} \cosh l_{ik}} \right) \\ &= \frac{\cosh l_{ij} \cosh l_{ik}}{\sinh l_{ij} \sinh l_{ik}} \left( 1 - \frac{1 + I_{jk} \tanh r_j \tanh r_k}{(\cosh r_i + I_{ij} \sinh r_i \tanh r_j)(\cosh r_i + I_{ik} \sinh r_i \tanh r_k)} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

考虑式(19)中括号外的部分, 根据双曲正弦、双曲余弦的连续性, 以及已证得的  $l_{ij}, l_{ik} \rightarrow +\infty$ , 可知:

$$\lim_{r_i \rightarrow +\infty} \frac{\cosh l_{ij} \cosh l_{ik}}{\sinh l_{ij} \sinh l_{ik}} = \lim_{l_{ij}, l_{ik} \rightarrow +\infty} \frac{\cosh l_{ij} \cosh l_{ik}}{\sinh l_{ij} \sinh l_{ik}} = 1, \quad (20)$$

对于式(19)中括号内的分母部分  $\cosh r_i + I_{ij} \sinh r_i \tanh r_j = \sinh r_i (1 + I_{ij} \tanh r_j) + e^{-r_i}$ , 根据  $r_j, r_k > 0$ , 可知  $\tanh r_j, \tanh r_k \in (0, 1)$ ; 结合  $I_{ij} > -1$ , 可得  $1 + I_{ij} \tanh r_j > \min\{1, 1 + I_{ij}\} > 0$ , 进一步有

$\lim_{r_i \rightarrow +\infty} \cosh r_i + I_{ij} \sinh r_i \tanh r_j = +\infty$ 。于是有

$$\lim_{r_i \rightarrow +\infty} \frac{1 + I_{jk} \tanh r_j \tanh r_k}{(\cosh r_i + I_{ij} \sinh r_i \tanh r_j)(\cosh r_i + I_{ik} \sinh r_i \tanh r_k)} = 0. \quad (21)$$

由式(19)、(20)与(21), 可得  $\lim_{r_i \rightarrow +\infty} \cos \theta_i^{jk} = 1$ 。故而在边长满足三角不等式的情形引理得证。下面我们证明边长不满足三角不等式的情形, 经计算, 我们有

$$\begin{aligned} \cosh(l_{ij} + l_{ik}) - \cosh l_{jk} &= \cosh l_{ij} \cosh l_{ik} + \sinh l_{ij} \sinh l_{ik} - \cosh l_{jk} \\ &> \cosh l_{ij} \cosh l_{ik} - \cosh l_{jk}, \end{aligned} \quad (22)$$

根据  $\lim_{r_i \rightarrow +\infty} \cosh l_{ij} = +\infty$  和  $\lim_{r_i \rightarrow +\infty} \cosh l_{ik} = +\infty$ , 可知对于足够大的  $r_i$ , 有

$$\cosh(l_{ij} + l_{ik}) - \cosh l_{jk} > 0,$$

从而  $l_{ij} + l_{ik} > l_{jk}$ 。因此, 对于足够大的  $r_i$ , 若  $\Delta_{ijk}$  的边长不满足三角不等式, 那么必然有  $l_{ij} + l_{jk} \leq l_{ik}$  或者  $l_{ik} + l_{jk} \leq l_{ij}$ , 这意味着  $\tilde{\theta}_i^{jk} = 0$  且  $\tilde{\theta}_i^{jk} < \varepsilon$ 。至此, 引理中两种情况的证明均已完成。证毕。

现在我们可以证明延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流的长时间存在性。

**定理 3.2:** 在  $\mathbb{B}^2$  和  $\mathbb{H}^2$  中, 设  $(M, T, I)$  是具有逆距  $I > -1$  的三角剖分闭曲面。给定任意初始逆距圆包装度量  $r(0) \in \mathbb{R}_{>0}^N$ , 延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流的解  $r(t)$  长时间存在。

**证明:** 设  $d$  为三角剖分  $T$  中顶点的最大度。根据延拓离散 Gauss 曲率的定义, 有

$$\|\tilde{K}_i + 2\pi\beta_i\|^{p-2} (\tilde{K}_i + 2\pi\beta_i) = \|\tilde{K}_i + 2\pi\beta_i\|^{p-1} \leq (d + 2 + 2\max_{v_i \in V} \{\beta_i\})^{p-1} \pi^{p-1}, \forall i \in V.$$

令  $c_1 = (d + 2 + 2\max_{v_i \in V} \{\beta_i\})^{p-1} \pi^{p-1}$ , 其仅依赖于三角剖分。那么在  $\mathbb{B}^2$  中, 可得

$$c_0 e^{-c_1 t} \leq r_i(t) \leq c_0 e^{c_1 t}, c_0 = c(r(0)),$$

这表明延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流的解  $r(t)$  不会触及零边界和无穷边界。在  $\mathbb{H}^2$  中, 有

$$c_2 e^{-c_1 t} \leq \coth(r_i(t)/2) \leq c_2 e^{c_1 t},$$

其中  $c_2 = \coth(r_i(0)/2)$  且  $c_2 > 1$ 。进而有

$$r_i(t) \geq \ln \frac{c_2 e^{c_1 t} + 1}{c_2 e^{c_1 t} - 1} > 0.$$

因此, 在任意有限时间区间  $[0, a)$  ( $a < +\infty$ ) 内,  $r_i(t)$  都存在正的下界  $L > 0$ 。根据流方程

$$u'_i(t) = -\|\tilde{K}_i + 2\pi\beta_i\|^{p-2} (\tilde{K}_i + 2\pi\beta_i).$$

由引理 3.1, 存在  $l > 0$ , 使得当  $r_i > l$  时, 有  $\tilde{\theta}_i^{jk} < \pi/d$ , 进而  $\tilde{K}_i > \pi$  以及  $\tilde{K}_i + 2\pi\beta_i > \pi$ 。在此情形下, 流方程表明当  $r_i > l$  时,  $r_i(t)$  严格递减。因此, 所有  $r_i(t)$  一致地以  $\max\{l, \max_{v \in V} r_i(0)\}$  为上界, 且以  $L > 0$  为下界。证毕。

## 4. 长时间收敛性

在本节中, 我们研究延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流的收敛性。我们首先引入延拓分支组合 Ricci 势泛函。

#### 4.1. 延拓分支组合 Ricci 势

考虑带有加权三角剖分的闭曲面, 记为  $(M, T, \Phi)$ , 其中权重函数  $\Phi: E \rightarrow [0, \pi/2]$  对应逆距  $0 \leq I \leq 1$ 。回顾雅可比矩阵  $(\partial K_i / \partial u_j)$  的对称性(见[1]中的引理 2.3), 则下述泛函是良定义的:

$$F(u) = \int_{u_0}^u \sum_{i=1}^N K_i du_i.$$

在  $\mathbb{H}^2$  和  $\mathbb{E}^2$  中, 当  $u \in \mathbb{R}_{\leq 0}^N$  和  $u \in \mathbb{R}^N$  时, 泛函  $F(u)$  称为组合 Ricci 势, 它最初由 Colin de Verdière 引入。随后, Chow 和 Luo 证明了组合 Ricci 流是组合 Ricci 势的负梯度流。利用  $F(u)$  沿组合 Ricci 流的凸性与真性, 他们给出了 Andreev-Thurston 定理的新的证明。

当约束条件为  $I > -1$  时, 容许空间  $\Omega' \neq \mathbb{R}_{\geq 0}^N$ , 并且此时容许空间的单连通性未被建立, 这使得不能确定  $F(u)$  是否为良定义的。为克服这一困难, Ge 与 Jiang [8] [9] 以及 Xu [7] 对每个三角面  $\Delta_{ijk} \in F$  进行了分析, 得到了下述引理。

**引理 4.1:** 给定带有逆距  $I > -1$  且满足条件(9)的三角剖分曲面  $(M, T, I)$ , 设  $\theta_i$  为  $\Delta_{ijk} \in F$  在顶点  $v_i$  处的内角, 则有:

(1) 将对应于  $\Delta_{ijk}$  的顶点的  $u$ -坐标下的容许空间记为

$$\Omega_{ijk}^u = \left\{ (u_i, u_j, u_k)^T \mid l_{ij} + l_{ik} > l_{jk}, l_{ij} + l_{jk} > l_{ik}, l_{ik} + l_{jk} > l_{ij} \right\},$$

则  $\Omega_{ijk}^u$  是  $\mathbb{R}^3$  中的单连通开子集。

(2) 对任意  $u_0 \in \Omega_{ijk}^u$ , 泛函

$$F_{ijk}(u) = \int_{u_0}^u \theta_i du_i + \theta_j du_j + \theta_k du_k$$

满足在容许空间  $\Omega_{ijk}^u$  中是良定义的。在  $\mathbb{E}^2$  中,  $F_{ijk}(u)$  在  $\Omega_{ijk}^u$  上是凹的, 且在  $\Omega_{ijk}^u \cap \{u_i + u_j + u_k = 0\}$  上是严格凹的; 在  $\mathbb{H}^2$  中,  $F_{ijk}(u)$  在  $\Omega_{ijk}^u$  上是严格凹的。

(3) 泛函  $F_{ijk}(u)$  可延拓为  $C^1$  光滑凹泛函

$$\tilde{F}_{ijk}(u) = \int_{u_0}^u \tilde{\theta}_i du_i + \tilde{\theta}_j du_j + \tilde{\theta}_k du_k,$$

其中延拓后的内角  $\tilde{\theta}_i$  依 2.2 子节中定义。

现在, 我们引入逆距圆包装下的延拓分支组合 Ricci 势的定义。在  $\mathbb{E}^2$  和  $\mathbb{H}^2$  中, 任取  $u_0 \in \Omega$ , 定义势泛函为

$$\tilde{F}(u) \triangleq \sum_{i=1}^N (2\pi + 2\beta_i \pi) (u_i - u_{0,i}) - \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \tilde{F}_{ijk}(u_i, u_j, u_k).$$

其中,  $u_{0,i}$  表示初始度量向量  $u_0$  的第  $i$  个分量。通过计算, 我们得到  $(\nabla_u \tilde{F})_i = \tilde{K}_i + 2\beta_i \pi$ 。引理 4.1 表明在  $\mathbb{E}^2$  中,  $\Lambda_{ijk} = \partial(\theta_i, \theta_j, \theta_k) / \partial(u_i, u_j, u_k)$  是半负定的, 且在  $\Omega_{ijk}^u \cap \{u_i + u_j + u_k = 0\}$  上是负定的; 在  $\mathbb{H}^2$  中,  $\Lambda_{ijk} = \partial(\theta_i, \theta_j, \theta_k) / \partial(u_i, u_j, u_k)$  是负定的。我们可将  $\Lambda_{ijk} = \partial(\theta_i, \theta_j, \theta_k) / \partial(u_i, u_j, u_k)$  补零至  $N \times N$  的矩阵, 根据  $(\nabla_u \tilde{F})_i = K_i + 2\beta_i \pi$ , 我们可知

$$\text{Hess } F = \frac{\partial(K_1, \dots, K_N)}{\partial(u_1, \dots, u_N)} = - \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \Lambda_{ijk}.$$

此时可知泛函  $F_{ijk}(u)$  的 Hess 矩阵是正定的, 对应着其的凸性。这与 Xu 在[7]中运用的方法一致, 根据引理 4.1, 我们可以得到延拓分支组合 Ricci 势的凸性。

**引理 4.2:** 给定带有逆距  $I > -1$  且满足条件(9)的三角剖分曲面  $(M, T, I)$ , 则延拓分支组合 Ricci 势具有以下性质

(1) 在  $\mathbb{H}^2$  中  $\tilde{F}(u) \in C^1(\mathbb{R}_{<0}^N) \cap C^\infty(\Omega)$ , 且  $\tilde{F}(u)$  是  $\mathbb{R}_{<0}^N$  上的凸函数。此外,  $\tilde{F}$  的 Hessian 在  $\Omega$  上是正定的。

(2) 在  $\mathbb{E}^2$  中  $\tilde{F}(u) \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\Omega)$ , 且  $\tilde{F}(u)$  是  $\mathbb{R}^N$  上的凸函数。此外,  $\tilde{F}$  的 Hessian 在  $\Omega$  上是半正定的, 且在  $\Omega \cap \left\{ \sum_{v_i \in V} u_i = 0 \right\}$  上是正定的。

## 4.2. 收敛性的证明

现在我们证明收敛性定理。

**定理 4.3:** 给定带有逆距  $I > -1$  且满足条件(9)的三角剖分曲面  $(M, T, I)$ 。假设  $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$  是逆距圆包装下延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流的长时间解, 那么

(1) 在  $\mathbb{H}^2$  中,  $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$  收敛当且仅当存在分支圆包装度量  $r_b \in \Omega$ 。

(2) 在  $\mathbb{E}^2$  中, 若存在分支圆包装度量  $r_b \in \Omega$ , 则延拓离散 Gauss 曲率  $\tilde{K}_i$  沿着解  $r(t)$  收敛, 且  $\{\tilde{K}(t) | t \in [0, +\infty)\}$  收敛至  $(-2\beta_1\pi, \dots, -2\beta_N\pi)$ 。若  $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$  收敛, 则存在分支圆包装度量  $r_b \in \mathbb{R}^N$ 。

**证明:** 我们首先讨论  $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$  收敛的情形, 即极限

$$\hat{r} = \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t), \quad \hat{r}_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{r}_i(t)$$

存在, 由坐标变换是同胚映射, 故可知极限

$$\hat{u} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t), \quad \hat{u}_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} u_i(t)$$

存在。根据中值定理, 存在时间序列  $t_n \in (n, n+1)$ , 满足

$$u_i(n+1) - u_i(n) = u'_i(t_n) \quad (23)$$

由于  $u(t)$  的极限存在, 故而  $n \rightarrow +\infty$  时, 等式(23)的左侧趋近于零。由延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流以及延拓离散 Gauss 曲率  $\tilde{K}_i$  的连续性可知:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{K}_i - K_{av} \right|^{p-2} (\tilde{K}_i + 2\beta_i\pi) \Big|_{u=\hat{u}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \tilde{K}_i + 2\beta_i\pi \right|^{p-2} (\tilde{K}_i + 2\beta_i\pi) \Big|_{u=u(t_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u'_i(t_n) = 0. \end{aligned}$$

因此  $\left| \tilde{K}_i + 2\beta_i\pi \right|^{p-2} (\tilde{K}_i + 2\beta_i\pi) \Big|_{u=\hat{u}} = 0$ , 这意味着

$$\tilde{K}_i(\hat{u}) + 2\beta_i\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{K}_i(t_n) + 2\beta_i\pi = 0.$$

上述等式表明  $\hat{u}$  是一个分支圆包装度量。

现在我们讨论存在分支圆包装度量  $r_b \in \Omega$  的情形。我们首先给出  $\mathbb{E}^2$  中结论的证明。记号  $u_b$  为  $r_b$  的坐标变换。不失一般性, 我们令  $\tilde{F}(u)$  中的  $u_0 = u_b$ , 即

$$\tilde{F}(u) = \sum_{i=1}^N (2\pi + 2\beta_i\pi)(u_i - u_{b,i}) - \sum_{\substack{\triangle_{ijk} \in F \\ i,j,k \in \{1, \dots, N\}}} \int_{u_b}^u \tilde{\theta}_i^{jk} du_i + \tilde{\theta}_j^{ik} du_j + \tilde{\theta}_k^{ij} du_k.$$

由于  $u_b$  是  $\Omega$  中的分支圆包装, 故有  $\partial \tilde{F}(u) / \partial u_i |_{u=u_b} = 0$ 。由引理 4.2,  $\tilde{F}(u)$  在  $\mathbb{R}^N$  中是凸的, 且对任意固定的  $c \in \mathbb{R}$ , 在集合  $\Omega^u \cap \left\{ u \mid \sum_{i=1}^N u_i = c \right\}$  中是严格凸的。因此,  $\tilde{F}(u_b) = 0$  是  $\tilde{F}(u(t))$  的一个下界。沿延拓

分支组合  $p$  次 Ricci 流方程, 计算  $\tilde{F}(u(t))$  关于时间  $t$  的导数得

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{F}(u(t))}{dt} &= \sum_{i=1}^N (2\pi + 2\beta_i \pi) \frac{du_i}{dt} - \sum_{\Delta ijk \in F} \left( \tilde{\theta}_i^{jk} \frac{du_i}{dt} + \tilde{\theta}_j^{ik} \frac{du_j}{dt} + \tilde{\theta}_k^{ij} \frac{du_k}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N (\tilde{K}_i + 2\beta_i \pi) \frac{du_i}{dt} \\ &= - \sum_{i=1}^N |\tilde{K}_i + 2\beta_i \pi|^p \leq 0,\end{aligned}$$

第三个等式代入了延拓分支组合  $p$  次 Ricci 流方程。因此, 可得出  $\tilde{F}(u(t))$  在  $\mathbb{R}^2$  以及  $\mathbb{H}^2$  中关于时间  $t$  是递减的。故我们有

$$0 \leq \tilde{F}(u(t)) \leq \tilde{F}(u(0)),$$

进一步可知  $\tilde{F}(u(t))$  收敛。结合  $\tilde{F}(u(t))$  是  $C^1$  连续的, 故可知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} - \sum_{i=1}^N |\tilde{K}_i + 2\beta_i \pi|^p = 0,$$

也就是

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{K}_i + 2\beta_i \pi = 0, \forall v_i \in V. \quad (24)$$

此时  $\mathbb{R}^2$  中结论得证。在  $\mathbb{H}^2$  中, 根据引理 4.2, 可知  $\tilde{F}$  在  $\Omega$  上是严格凸的, 且在  $\mathbb{R}_{<0}^N / \Omega$  上是凸的, 故而其奇点是唯一的。根据  $(\nabla_u \tilde{F})|_{u_b} = (K_i + 2\beta_i \pi)|_{u_b} = 0$ , 由(24)可知  $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$  收敛至  $r_b$ 。证毕。

## 5. 结论与展望

本文研究了曲面上逆距圆包装的分支组合  $p$  次 Ricci 流, 运用 Ge 与 Jiang 创造的延拓技巧处理了流方程的解在有限时间内或出现“零边界”、“无穷边界”、“三角形爆破边界”三类边界奇点的情形, 根据分支组合 Ricci 势的凸性, 在二维欧氏空间和双曲空间中, 给出解的长时间存在性及部分收敛结果。

关于流的收敛速度, 我们已知当  $p > 3$  时,  $|K_i + 2\beta_i \pi|^{p-2} (K_i + 2\beta_i \pi)$  是关于圆包装度量  $u$  的可微函数, 此时流方程右侧的雅可比矩阵可表示为:

$$\frac{\partial |K_i + 2\beta_i \pi|^{p-2} (K_i + 2\beta_i \pi)}{\partial u_j} = (p-1) |K_i + 2\beta_i \pi|^{p-2} \frac{\partial (K_i + 2\beta_i \pi)}{\partial u_j}.$$

当  $p = 2$  时, 该矩阵的正定性与 Xu 的结论一致; 但对于  $p > 2$  的情形, 目前尚未开展有效研究。我们尚不清楚组合  $p$  次 Ricci 流是否具备组合 Ricci 流的指数收敛性质。

关于带边曲面上的分支组合  $p$  次 Ricci 流, 离散 Gauss 曲率的定义将发生改变, 需要对分支组合 Ricci 势进行更为详细的分析以得到其长时间存在性与收敛性。

## 基金项目

国家自然科学基金面上项目(12171480), 湖南省杰出青年基金项目(2022JJ10059), 国防科技大学基石基金计划项目(JS2023-01)资助。

## 参考文献

- [1] Chow, B. and Luo, F. (2003) Combinatorial Ricci Flows on Surfaces. *Journal of Differential Geometry*, **63**, 97-129. <https://doi.org/10.4310/jdg/1080835659>

- [2] Dubejko, T. (1995) Branched Circle Packings and Discrete Blaschke Products. *Transactions of the American Mathematical Society*, **347**, 4073-4103. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1995-1308008-1>
- [3] Bowers, P. and Stephenson, K. (1996) A Branched Andreiev-Thurston Theorem for Circle Packings of the Sphere. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 185-215. <https://doi.org/10.1112/plms/s3-73.1.185>
- [4] Lan, S. and Dai, D. (2007) Variational Principles for Branched Circle Patterns. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **67**, 498-511. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.06.008>
- [5] Bowers, J.C., Bowers, P.L. and Pratt, K. (2018) Rigidity of Circle Polyhedra in the 2-Sphere and of Hyperideal Polyhedra in Hyperbolic 3-Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **371**, 4215-4249. <https://doi.org/10.1090/tran/7483>
- [6] Zhou, Z. (2019) Circle Patterns with Obtuse Exterior Intersection Angles. arXiv:1703.01768.
- [7] Xu, X. (2018) Rigidity of Inversive Distance Circle Packings Revisited. *Advances in Mathematics*, **332**, 476-509. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.05.026>
- [8] Ge, H. and Jiang, W. (2019) On the Deformation of Inversive Distance Circle Packings, I. *Transactions of the American Mathematical Society*, **372**, 6231-6261. <https://doi.org/10.1090/tran/7768>
- [9] Ge, H. and Jiang, W. (2017) On the Deformation of Inversive Distance Circle Packings, II. *Journal of Functional Analysis*, **272**, 3573-3595. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.12.021>
- [10] Ge, H. and Jiang, W. (2017) On the Deformation of Inversive Distance Circle Packings, III. *Journal of Functional Analysis*, **272**, 3596-3609. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.12.020>
- [11] Luo, F. (2011) Rigidity of Polyhedral Surfaces, III. *Geometry & Topology*, **15**, 2299-2319. <https://doi.org/10.2140/gt.2011.15.2299>
- [12] Luo, F. (2004) Combinatorial Yamabe Flow on Surfaces. *Communications in Contemporary Mathematics*, **6**, 765-780. <https://doi.org/10.1142/s0219199704001501>
- [13] Ge, H. and Xu, X. (2016) 2-Dimensional Combinatorial Calabi Flow in Hyperbolic Background Geometry. *Differential Geometry and its Applications*, **47**, 86-98. <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2016.03.011>
- [14] Ge, H. and Hua, B. (2018) On Combinatorial Calabi Flow with Hyperbolic Circle Patterns. *Advances in Mathematics*, **333**, 523-538. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.05.039>
- [15] Lin, A. and Zhang, X. (2019) Combinatorial P-Th Calabi Flows on Surfaces. *Advances in Mathematics*, **346**, 1067-1090. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.02.011>
- [16] Lin, A. and Zhang, X. (2021) Combinatorial p-Th Ricci Flows on Surfaces. *Nonlinear Analysis*, **211**, Article 112417. <https://doi.org/10.1016/j.na.2021.112417>
- [17] Liu, B., Li, L. and Qi, Y. (2025) Combinatorial pth Calabi Flows for Total Geodesic Curvatures in Spherical Background Geometry. *Advances in Nonlinear Analysis*, **14**, Article 20250067. <https://doi.org/10.1515/anona-2025-0067>
- [18] Ge, H., Hua, B. and Zhou, P. (2024) A Combinatorial Curvature Flow in Spherical Background Geometry. *Journal of Functional Analysis*, **286**, Article 110335. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2024.110335>
- [19] Hu, G., Qi, Y., Sun, Y. and Zhou, P. (2025) Hyperbolic Circle Packings and Total Geodesic Curvatures on Surfaces with Boundary. *Nonlinear Analysis*, **253**, Article 113735. <https://doi.org/10.1016/j.na.2024.113735>
- [20] Beardon, A. and Stephenson, K. (1990) The Uniformization Theorem for Circle Packings. *Indiana University Mathematics Journal*, **39**, 1383-1425. <https://doi.org/10.1512/iumj.1990.39.39062>
- [21] Gao, K. and Lin, A. (2022) Branched Combinatorial Calabi Flows on Surfaces. *Advances in Applied Mathematics*, **11**, 7451-7463. <https://doi.org/10.12677/aam.2022.1110791>
- [22] Gao, K. and Lin, A. (2023) Branched Combinatorial P-Th Ricci Flows on Surfaces. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, **72**, 3363-3375. <https://doi.org/10.1007/s12215-022-00830-y>