Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(10), 227-237
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1410435

Hans汉斯

移动环境下格点–反应扩散系统的动力学分析

石欣欣

湖南省工程数学建模与分析重点实验室，长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2025年9月14日；录用日期：2025年10月8日；发布日期：2025年10月15日

摘 要

本文研究了一类格点反应–扩散方程，其中非线性项 $f(u)$ 表示受种群密度影响的死亡率。该类模型常用于研究变化栖息地中物种可持续性与空间传播的相互作用机制。现有的种群动力学研究表明：当 $c^*(\infty)<c$ 时种群面临灭绝，而当 $c^*(\infty)>c$ 时种群可持续生存。通过结合解析方法与半群理论，我们在仅要求增长函数 $r(\cdot)$ 具有弱符号不变性的条件下，建立了更具普适性的结论。

关键词

变化环境，格点反应–扩散方程，渐近传播速度，半群理论

Dynamic Analysis of Lattice Reaction-Diffusion Systems with Shifting Environments

Xinxin Shi

Hunan Provincial Key Laboratory for Engineering Mathematical Modeling and Analysis, School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: September 14, 2025; accepted: October 8, 2025; published: October 15, 2025

Abstract

In this paper, we study a class of lattice reaction-diffusion equations, in which the term $f(u)$ represents mortality influenced by population density. These models are used to study the interplay between species sustainability and spatial propagation in shifting habitats. Current research in population dynamics indicates that a population faces extinction if $c^*(\infty)<c$, but persists when $c^*(\infty)>c$. Through a combination of analytical techniques and semigroup methods, we establish

文章引用: 石欣欣. 移动环境下格点-反应扩散系统的动力学分析[J]. 应用数学进展, 2025, 14(10): 227-237.
DOI: 10.12677/aam.2025.1410435

extended results requiring only weak sign-constancy assumption on the growth function $r(\cdot)$.

Keywords

Shifting Environments, Lattice Reaction-Diffusion Equation, Asymptotic Spreading Speed, Semigroup

1. 引言

本文研究具有以下结构的格点反应－扩散方程：

$$u_t(t,x)=d\left[u(t,x+1)-2u(t,x)+u(t,x-1)\right]+r(x-ct)u(t,x)-f\left(u(t,x)\right). \tag{1}$$

其中，种群在时刻t和位置x的密度记为$u(t,x)$，d表示扩散系数，函数$r(\cdot)$描述变化环境中的物种出生率，而函数$f(u)$表征密度依赖性死亡。显然，$r(x-ct)$描述了一个以速度$c>0$传播的行波。近期大多数的研究采用更一般的模型(1)探讨移动栖息地中的种群空间动态。

在$r(x-ct)=r$，(r是常数)，且$f(u)=u^2$的特殊情形下，模型(1)可化为空间种群动力学中的基础非线性格点微分方程。基于所考虑的格点微分方程，初值问题的渐近传播速度由以下公式给出：

$$c^*=\inf_{\eta>0}\frac{d\left(\mathrm{e}^{\eta}+\mathrm{e}^{-\eta}-2\right)+r}{\eta}.$$

c^*表示连接平衡点0与r的行波解的最小波速(参见文献[1] [2] [3])。陈、卡尔、方和张等学者已在多种时空系统中建立了关于传播速度与行波的基础性理论成果[3]-[7]。

气候变化、污染及人为活动导致大范围的栖息地退化，对生态系统和生物多样性构成严重威胁。变化的栖息地可以通过函数$r(x-ct)$进行描述。胡与李[8]研究了$f(u)=u^2$特殊情形下的格点微分方程，推导出该模型的传播速度为$c^*(\infty)$，

$$c^*(\infty)=\inf_{\eta>0}\frac{d\left(\mathrm{e}^{\eta}+\mathrm{e}^{-\eta}-2\right)+r(+\infty)}{\eta},$$

胡与李在[8]中给出了种群持续扩散与灭绝的精确条件。此外，针对具有不同增长函数的格点微分系统，学界已在最小波速、强迫行波解等方面取得了深入的研究成果[9]-[17]。

在函数$r(\cdot)$与$f(u)$满足下列条件的框架下，胡等人深入探讨了方程(1)的时空动力学特性：

(H1)：$r(\cdot)$是定义于$(-\infty,+\infty)$上的连续、有界、非减的分段连续可微函数，且满足$-\infty<r(-\infty)<0<r(+\infty)<+\infty$。

(H2)：函数$f(u)$是定义在$[0,+\infty)$上的连续非负函数，满足$f(0)=f_+'(0)=0$。方程$f(u)=r(\infty)u$存在唯一正解u^*，且$f(u)$在区间$\left[0,u^*\right]$上满足Lipschitz条件，即对于$0\le u_1<u_2\le u^*$存在正常数L使得：

$$\left|f(u_1)-f(u_2)\right|\le L\left|u_1-u_2\right|.$$

在条件**(H1)**与**(H2)**成立的前提下，胡等学者推广了胡与李[8]中的结论，得到了以下结论：

定理 1.1. 设条件**(H1)**与**(H2)**成立，且 $c^*(\infty)<c$。若初值函数 $\phi(x)$ 满足 $0\le\phi(x)\le u^*$，且当 x 充分大时 $\phi(x)\equiv 0$，则

$$\lim_{t\to\infty}\left\|u(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}=0.$$

定理 1.2. 设条件**(H1)**与**(H2)**成立，且 $c^*(\infty)>c\ge 0$，则下列结论成立：

(I) 若初值函数 $\phi(x)$ 满足 $0\le\phi(x)\le u^*$，则对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\le t(c-\varepsilon)}u(t,x)\right]=0;$$

(II) 若初值函数 $\phi(x)$ 满足 $0\le\phi(x)\le u^*$，且当 x 充分大时 $\phi(x)\equiv 0$，则对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\ge t\left(c^*(\infty)+\varepsilon\right)}u(t,x)\right]=0;$$

(III) 若初值函数 $\phi(x)$ 满足 $0\le\phi(x)\le u^*$，且在某个闭区间上 $\phi(x)>0$，则对任意满足 $0<\varepsilon<\left(c^*(\infty)-c\right)/2$ 的 ε，

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{t(c+\varepsilon)\le x\le t\left(c^*(\infty)-\varepsilon\right)}\left|u^*-u(t,x)\right|\right]=0.$$

需要注意的是，**(H1)**要求 $r(\cdot)$ 同时具有单调性和变号性。现有研究大多基于**(H1)**条件中的变号性假设。这一条件在技术层面至关重要，因为它确保了在构造上下解时，系统在负无穷远处的线性化特征方程存在两个实特征根，从而能够显式构造指数型的上下解。然而，当考虑 $r(-\infty)=0$ 的临界情况时，这一技术路径遭遇了本质性障碍：特征方程在负无穷远处退化为单根或复根情况，导致无法直接构造满足拟单调条件的指数型上下解。具体而言，当 $r(-\infty)=0$ 时，线性化算子谱分析表明，在负无穷远处系统失去双曲性，传统的行波存在性证明方法(如上下解结合单调迭代方法)无法直接应用。这一技术瓶颈正是本文引入半群理论新方法的根本原因。

从生态学角度而言，$r(\cdot)$ 的非减特性意味着环境条件正以恒定速率持续恶化。此外，变号条件 $r(-\infty)<0<r(+\infty)$ 突显了这种恶化的严重性，由于该变号特性，在任意固定位置 x 处，当时间 t 充分大时，$r(x-ct)$ 必将变为负值。这表明栖息地将最终退化为不利于物种生存的环境。

本文主要目标是通过消除变号性条件，推广(胡等，2025，筹备中)对系统(1)的研究结果。具体而言，我们将用以下更弱的条件替代**(H1)**中对 $r(\cdot)$ 的限制：

(H1*)：$r(\cdot)$ 是定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续、有界、非减的分段连续可微函数，且满足 $-\infty<r(-\infty)\le 0<r(+\infty)<+\infty$。

由于对 $r(\cdot)$ 约束条件的放宽，(胡等，2025，筹备中)与文献[8]中核心论证技术(其本质上依赖于变号条件 $r(-\infty)<0$)不再直接适用。因此，我们必须采用文献[18]-[20]中半群理论的新方法，通过这一创新策略，我们推导出了在条件**(H1*)**下系统(1)时空动力学的若干重要结论。

2. 预备结果

在本节中，我们将介绍系统(1)的时空动力学所涉及的相关记号与基本性质。设系统(1)的解为 $u^\psi(t,x;r(\cdot))$，其中 $r(\cdot)$ 为出生率函数，$\psi(x)$ 表示初始函数。根据文献[8]可得

$$\begin{aligned}u^\psi(t,x;r(\cdot))=&\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)t}\mathbf{I}_j(2dt)\psi(x+j)+\int_0^t\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)(t-y)}\mathbf{I}_j\left(2d(t-y)\right)\\&\cdot\left[u^\psi(y,x+j;r(\cdot))\left(\gamma+r(x+j-cy)\right)-f\left(u^\psi(y,x+j;r(\cdot))\right)\right]\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{2}$$

解(2)的构造使得比较原理对系统(1)是成立的。我们得到了**引理 2.1**。

引理 2.1. 假设条件**(H1*)**与**(H2)**成立，且函数 $r(\cdot),\tilde{r}(\cdot)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 为非减函数，满足 $\tilde{r}(\cdot)\le r(\cdot)$。若 $0\le\phi\le\psi\le u^*$，则有以下结论对系统(1)是成立的。

I) 对任意 $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$，均有 $0\le u^{\phi}(t,x;\tilde{r}(\cdot))\le u^{\psi}(t,x;r(\cdot))\le u^{\psi}(t,x;r(\infty))$。

II) $0\le u^{\psi}(t,x;r(\cdot))\le u^*$。

引理 2.2. 假设条件**(H2)**成立。设 $\tilde{r}$ 为正常数，且定义 $\tilde{c}=\inf\limits_{\eta>0}\dfrac{d\left(e^{\eta}+e^{-\eta}-2\right)+\tilde{r}}{\eta}$。则下列结论成立：

I) 若函数 ψ 满足 $0\le\psi\le u^*$，且当 x 充分大时 $\psi=0$，则对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\ge t(\tilde{c}+\varepsilon)}u^{\psi}(t,x;\tilde{r})\right]=0;$$

II) 若 $0\le\psi\le u^*$ 且在某个闭区间上 $\psi>0$，则对任意满足 $0<\varepsilon<\tilde{c}$ 的 ε，

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{|x|\le t(\tilde{c}-\varepsilon)}\left|u^*-u^{\psi}(t,x;\tilde{r})\right|\right]=0.$$

证明. (I) 显然(参见文献[8] [21]及 Hu 等 2025 年待发表工作)，当 $r(x-ct)$ 为正常数 $\tilde{r}$ 时，**引理 2.2 (I)**成立。

(II) 易证当 $r(x-ct)$ 为正常数 $\tilde{r}$ 时，**定理 1.2 (III)**成立。因此对任意满足 $0<\varepsilon<(\tilde{c}-c)/2$ 的 ε，以及满足 $0\le\psi\le u^*$ 且在闭区间上 $\psi>0$，可得

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{t(c+\varepsilon)\le x\le t(\tilde{c}-\varepsilon)}\left|u^*-u^{\psi}(t,x;\tilde{r})\right|\right]=0.$$

由于将 $r(x-ct)$ 替换为正常数 $\tilde{r}$ 后，c 可为任意常数。取 $c=-\tilde{c}$，即完成证明。

3. 主要结果

下述定理表明：当栖息地边界移动速率低于该临界速度 $c^*(\infty)>c$ 时，物种将能够持续生存并以渐近传播速度 $c^*(\infty)$ 向右传播。

定理 3.1. 假设条件**(H1*)**与**(H2)**成立。设 $c^*(\infty)>c>0$，则下列结论成立：

(I) 对任意 $\varepsilon>0$ 以及满足 $0\le\psi\le u^*$ 且对充分大的 x 有 $\psi=0$，有

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\ge t\left(c^*(\infty)+\varepsilon\right)}u^{\psi}(t,x;r(\cdot))\right]=0;$$

(II) 对任意满足 $0<\varepsilon<\left(c^*(\infty)-c\right)/2$ 的 ε，以及满足 $0\le\psi\le u^*$ 且在闭区间上 $\psi>0$，则有

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{t(c+\varepsilon)\le x\le t\left(c^*(\infty)-\varepsilon\right)}\left|u^*-u^{\psi}(t,x;r(\cdot))\right|\right]=0.$$

证明. (I) 由**引理 2.2 (I)**可知，$r(\infty)$ 为正常数，故有

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\ge t\left(c^*(\infty)+\varepsilon\right)}u^{\psi}(t,x;r(\infty))\right]=0.$$

引理 2.1 (I)表明：对任意 $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$，有 $0\le u^{\psi}(t,x;r(\cdot))\le u^{\psi}(t,x;r(\infty))$。由此可得

$$0 \le \sup_{x \ge t(c^*(\infty)+\varepsilon)} u^{\psi}(t,x;r(\cdot)) \le \sup_{x \ge t(c^*(\infty)+\varepsilon)} u^{\psi}\left(t,x;r(\infty)\right).$$

因此，

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x \ge t(c^*(\infty)+\varepsilon)} u^{\psi}\left(t,x;r(\cdot)\right)\right]=0.$$

(II) 取非减函数 $\underline{r}(\cdot)$ 及满足 $0 \le \phi \le u^*$ 且在闭区间上 $\phi > 0$ 的 ϕ，其中 $\underline{r}(\cdot) \le r(\cdot)$， $\underline{r}(\infty) \le r(\infty)$， $\underline{r}(-\infty) = \min\{-r(\infty), r(-\infty)\}$ 且 $\phi \le \psi$ 。由**定理 1.2 (III)**可得

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{t(c+\varepsilon)\le x \le t(c^*(\infty)-\varepsilon)} \left|u^* - u^{\phi}\left(t,x;\underline{r}(\cdot)\right)\right|\right]=0.$$

引理 2.2 (II)表明：

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{t(c+\varepsilon)\le x \le t(c^*(\infty)-\varepsilon)} \left|u^* - u^{\psi}\left(t,x;r(\infty)\right)\right|\right]=0.$$

由**引理 2.1 (I)**可知，对任意 $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ，有 $u^{\phi}\left(t,x;\underline{r}(\cdot)\right) \le u^{\psi}\left(t,x;r(\cdot)\right) \le u^{\psi}\left(t,x;r(\infty)\right)$ 。于是

$$\begin{aligned}&\sup_{t(c+\varepsilon)\le x \le t(c^*(\infty)-\varepsilon)} \left|u^* - u^{\psi}\left(t,x;r(\infty)\right)\right| \\ &\le \max\left\{\sup_{t(c+\varepsilon)\le x \le t(c^*(\infty)-\varepsilon)} \left|u^* - u^{\psi}\left(t,x;r(\infty)\right)\right|, \sup_{t(c+\varepsilon)\le x \le t(c^*(\infty)-\varepsilon)} \left|u^* - u^{\phi}\left(t,x;\underline{r}(\cdot)\right)\right|\right\}.\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{t(c+\varepsilon)\le x \le t(c^*(\infty)-\varepsilon)} \left|u^* - u^{\psi}\left(t,x;r(\cdot)\right)\right|\right]=0.$$

证毕。

为完善**定理 3.1** 的结论，我们假设**(H2*)**成立，该条件要求在**(H2)**基础上， $f(u)$ 在 0 的右邻域内具有二阶连续导数，且满足 $f(u)/u^2 \ge \frac{1}{4}$ 。

(H2*)：函数 $f(u)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续非负函数，且满足 $f(0) = f'_+(0) = 0$ 。 $f(u)$ 在 0 的右邻域内具有二阶连续导数，且满足 $f(u)/u^2 \ge \frac{1}{4}$ ，方程 $f(u) = r(\infty)u$ 存在唯一正解 u^* ，且 $f(u)$ 在区间 $[0,u^*]$ 上满足 Lipschitz 条件，即对于 $0 \le u_1 < u_2 \le u^*$ ，存在正常数 L 使得：

$$\left|f(u_1) - f(u_2)\right| \le L\left|u_1 - u_2\right|.$$

设 $\Gamma_{\gamma}(t)$ 表示下述系统的解半群

$$\begin{cases} u_t(t,x) = d\left[u(t,x+1) - 2u(t,x) + u(t,x-1)\right] - \gamma u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(t,0) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

显然，对任意 $(x,\psi) \in \mathbb{R} \times C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ，成立

$$\begin{cases}\Gamma_\gamma(0)[\psi](x)=\psi(x),\\ \Gamma_\gamma(t)[\psi](x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)t}\mathbf{I}_j(2dt)\psi(x+j),\ t>0.\end{cases}$$

利用该半群，我们可以针对$c>0$的情形证明以下定理。

定理 3.2. 假设**(H1*)**与**(H2*)**成立，且$c>0$为任意常数。则对任意$0\le\psi\le u^*$及$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\le t(c-\varepsilon)}u^\psi(t,x;r(\cdot))\right]=0.$$

证明. 固定$\psi\in[0,u^*]$和$\varepsilon>0$。由**引理 2.1(II)**可知，对任意$(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$，均有$0\le u^\psi(t,x;r(\cdot))\le u^*$。定义

$$U(s)=\limsup_{t\to\infty}\left[\sup_{x\le t(c-s)}u^\psi(t,x;r(\cdot))\right].$$

其中$s\in(0,\varepsilon]$。则$U(s)$在$(0,\varepsilon]$上为非增函数，且由引理 2.1(II)可得，对任意$s\in(0,\varepsilon]$，有$0\le U(s)\le u^*$。为完成证明，只需验证$U(\varepsilon)=0$。若此结论不成立，由$U(s)$的单调性可知：存在$s_0\in(0,\varepsilon)$使得$U(s_0)$连续，且$\gamma:=\dfrac{U(s_0)}{2}>0$。

设$u(t,x):=u^\psi(t,x;r(\cdot))$。由**(H2*)**可知，对任意$u\in[0,u^*]$，有$f(u)=\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)$。若$u=0$，则显然有$U(\varepsilon)=0$，故不再赘述。令$g(u)=\dfrac{f''(0)}{2}+o(1)$，对$u\in(0,u^*]$，易得$g(u)\ge\dfrac{1}{4}$。由$r(-\infty)\le0$可知，存在$\beta_0>0$，使得对任意$\beta\le-\beta_0$，有$r(\beta)\le\left(2\sqrt{g(u)}-1\right)\gamma$。根据(2)式可得：对任意满足$t>t_0\ge\dfrac{\beta_0}{s_0}$的$(t_0,t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\Gamma_\gamma(t-t_0)[u(t_0,\cdot)](x)+\int_{t_0}^t\Gamma_\gamma(t-y)\left[(\gamma+r(\cdot-cy))u(y,\cdot)-g(u(y,\cdot))u^2(y,\cdot)\right](x)\mathrm{d}y\\
&=u^*\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}+\gamma\int_{t_0}^t\Gamma_\gamma(t-y)[\gamma](x)\mathrm{d}y-\int_{t_0}^t\Gamma_\gamma(t-y)\left[\left(\sqrt{g(u(y,\cdot))}u(y,\cdot)-\gamma\right)^2\right](x)\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_{t_0}^t\Gamma_\gamma(t-y)\left[\left(r(\cdot-cy)-\left(2\sqrt{g(u(y,\cdot))}-1\right)\gamma\right)u(y,\cdot)\right](x)\mathrm{d}y\\
&\le u^*\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}+\gamma\left[1-\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}\right]+\int_{t_0}^t\Gamma_\gamma(t-y)\left[\left(r(\cdot-cy)-\left(2\sqrt{g(u(y,\cdot))}-1\right)\gamma\right)u(y,\cdot)\right](x)\mathrm{d}y\\
&\le\gamma+\left(u^*-\gamma\right)\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}\\
&\quad+\int_{t_0}^t\sum_{j=y(c-s_0)-x}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)(t-y)}\mathbf{I}_j(2d(t-y))u(y,x+j)\left(r(x+j-cy)-\left(2\sqrt{g(u(y,\cdot))}-1\right)\gamma\right)\mathrm{d}y\\
&\le\gamma+\left(u^*-\gamma\right)\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}+u^*r(\infty)\int_{t_0}^t\sum_{j=y(c-s_0)-x}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)(t-y)}\mathbf{I}_j(2d(t-y))\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

固定$s\in(s_0,\varepsilon)$。令

$$\lambda:=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 若\ s_0=c,\\ \max\left\{\dfrac{1}{3},1-\dfrac{2(s-s_0)}{3|s_0-c|}\right\}, & 其他.\end{cases}$$

显然有 $\frac{1}{3} \le \lambda < 1$，故当 $t > 0$ 时 $\lambda t < t$。易证对 $x \le (c-s)t$ 且 $t \ge \frac{\beta_0}{\lambda s_0}$ 的情形，我们已知有

$$u(t,x) \le \gamma + (u^* - \gamma)\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)} + u^* r(\infty)\int_0^{t-\lambda t} \sum_{j=(t-y)(c-s_0)-x}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_j(2dy)\mathrm{d}y.$$

因此

$$\begin{aligned}(t-y)(c-s_0)-x &= (c-s)t - x + t(s-s_0) + y(s_0-c)\\ &\ge t(s-s_0) - t(1-\lambda)|s_0-c| \ge \frac{(s-s_0)t}{3}.\end{aligned}$$

故有

$$u(t,x) \le \gamma + (u^* - \gamma)\mathrm{e}^{-\gamma(t-\lambda t)} + u^* r(\infty)\int_0^{t-\lambda t} \sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_j(2dy)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

根据文献[8]可知：当 $j \ne 0$ 时 $\mathbf{I}_j(0) = 0$，而 $\mathbf{I}_0(0) = 1$，由 $s - s_0 > 0$ 得 $(s-s_0)t > 0$，且满足 $\mathbf{I}_{-j}(t) = \mathbf{I}_j(t)$ 以及

$$e^{-t}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{I}_j(t) = 1, \quad \mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_0(2dy) \le \frac{C}{2\sqrt{\pi d}}\mathrm{e}^{-\gamma y}y^{-\frac{1}{2}}.$$

此处 C 为绝对常数，因此

$$\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_j(2dy)\mathrm{d}y = \frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_0(2dy)\mathrm{d}y \le \frac{1}{2\gamma} + \frac{C}{4\sqrt{\pi d}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\gamma y}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y.$$

我们可进一步证明：

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\gamma y}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y &= 2\left[\mathrm{e}^{-\gamma y}y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\gamma\mathrm{e}^{-\gamma y}y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\right]\\ &= 2\left[\mathrm{e}^{-\gamma y}y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\infty} + \gamma\left[\left(-\frac{1}{\gamma}\right)\mathrm{e}^{-\gamma y}y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\gamma y}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\right]\right] = 0.\end{aligned}$$

易知

$$\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_j(2dy)\mathrm{d}y \le \frac{1}{2\gamma}.$$

当 $t \to \infty$ 时，应用反常积分的比较判别法(单调性性质)，可得存在常数 A 使得

$$A = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t-\lambda t}\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_j(2dy)\mathrm{d}y.$$

对 A 进行运算可知：

$$\begin{aligned}A &= \lim_{t\to\infty}\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\left(-\frac{1}{\gamma+2d}\right)\int_0^{t-\lambda t}\mathbf{I}_j(2dy)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\\ &= \lim_{t\to\infty}\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\left(-\frac{1}{\gamma+2d}\right)\left[\mathbf{I}_j(2dy)\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\Big|_0^{t-\lambda t} - 2d\int_0^{t-\lambda t}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_j'(2dy)\mathrm{d}y\right]\end{aligned}$$

$$=\left(-\frac{1}{\gamma+2d}\right)\lim_{t\to\infty}\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\left[\mathbf{I}_j\left(2d\left(t-\lambda t\right)\right)\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)(t-\lambda t)}-\mathbf{I}_j\left(0\right)\right.$$
$$\left.-d\int_0^{t-\lambda t}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\left(\mathbf{I}_{j-1}\left(2dy\right)+\mathbf{I}_{j+1}\left(2dy\right)\right)\mathrm{d}y\right].$$

我们已知

$$\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\mathbf{I}_j\left(0\right)=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\mathbf{I}_j\left(2d\left(t-\lambda t\right)\right)\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)(t-\lambda t)}<\lim_{t\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{I}_j\left(2d\left(t-\lambda t\right)\right)\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)(t-\lambda t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\gamma(t-\lambda t)}+\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)(t-\lambda t)}\mathbf{I}_0\left(2d\left(t-\lambda t\right)\right)\right)=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{t-\lambda t}\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_{j-1}\left(2dy\right)\mathrm{d}y=\lim_{t\to\infty}\int_0^{t-\lambda t}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\left[\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\mathbf{I}_j\left(2dy\right)+\mathbf{I}_{\frac{s-s_0}{3}t-1}\left(2dy\right)\right]\mathrm{d}y$$
$$=A+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_{\infty}\left(2dy\right)\mathrm{d}y,$$
$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{t-\lambda t}\sum_{j=\frac{s-s_0}{3}t}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_{j+1}\left(2dy\right)\mathrm{d}y=A-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(\gamma+2d)y}\mathbf{I}_{\infty}\left(2dy\right)\mathrm{d}y.$$

由上述结果可得 $A=0$。根据(3)式即有

$$\lim_{t\to\infty}u\left(t,x\right)\le\gamma.$$

由此可得，对任意 $s\in\left(s_0,\varepsilon\right)$，有 $U\left(s\right)\le\gamma$。令 $s\to s_0$ 取极限，得 $U\left(s_0\right)\le\gamma=\frac{U\left(s_0\right)}{2}$，这显然矛盾。因此，

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\le t(c-\varepsilon)}u^{\psi}\left(t,x;r\left(\cdot\right)\right)\right]=0.$$

证明完成。

若退化速率超过系统(1)的渐近传播速度，则在相当一般的初始数据 ψ 假设下，种群在整个空间域中将最终消亡。

定理 3.3. 假设**(H1*)**与**(H2*)**成立。设 $c^*\left(\infty\right)<c$，且 $0\le\psi\le u^*$，且对所有充分大的 x 有 $\psi\left(x\right)\equiv0$，则

$$\lim_{t\to\infty}\left\|u^{\psi}\left(t,x;r\left(\cdot\right)\right)\right\|_{L^{\infty}}=0.$$

证明. 对任意 $\varepsilon>0$，由**定理 3.2** 可得

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\le t(c-\varepsilon)}u^{\psi}\left(t,x;r\left(\cdot\right)\right)\right]=0.$$

同时，由**引理 2.2(I)**可知：对任意 $\varepsilon\in\left(0,c-c^*\left(\infty\right)\right)$，有

$$0\le\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\ge t(c-\varepsilon)}u^{\psi}\left(t,x;r\left(\cdot\right)\right)\right]\le\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\ge t(c-\varepsilon)}u^{\psi}\left(t,x;r\left(\infty\right)\right)\right]=0.$$

结合以上结果即完成证明。

4. 数值模拟与讨论

为验证理论结果并直观展示系统动力学行为，我们对方程(1)进行了数值模拟。选取参数：扩散系数 $d=0.5$，死亡率函数 $f(u)=0.3u^2/(1+u^2)$，出生率函数 $r(x-ct)=r_{\max}\cdot(1+\tanh(-0.1(x-ct)))/2$，其中 $r_{\max}=1.5$。通过有限差分法数值求解，分别考察环境移动速度 c 小于和大于临界速度 $c^*(\infty)$ 的两种情况。

图 1 展示了 $c=0.8c^*(\infty)$ 情况下的时空演化图。可以观察到，尽管环境持续恶化并以速度 c 向右移动，种群仍能维持生存并以渐近传播速度 $c^*(\infty)$ 向右扩展。种群密度在波前区域形成稳定的行波结构，波后区域趋于一个正平衡态，表明物种成功适宜栖息地。

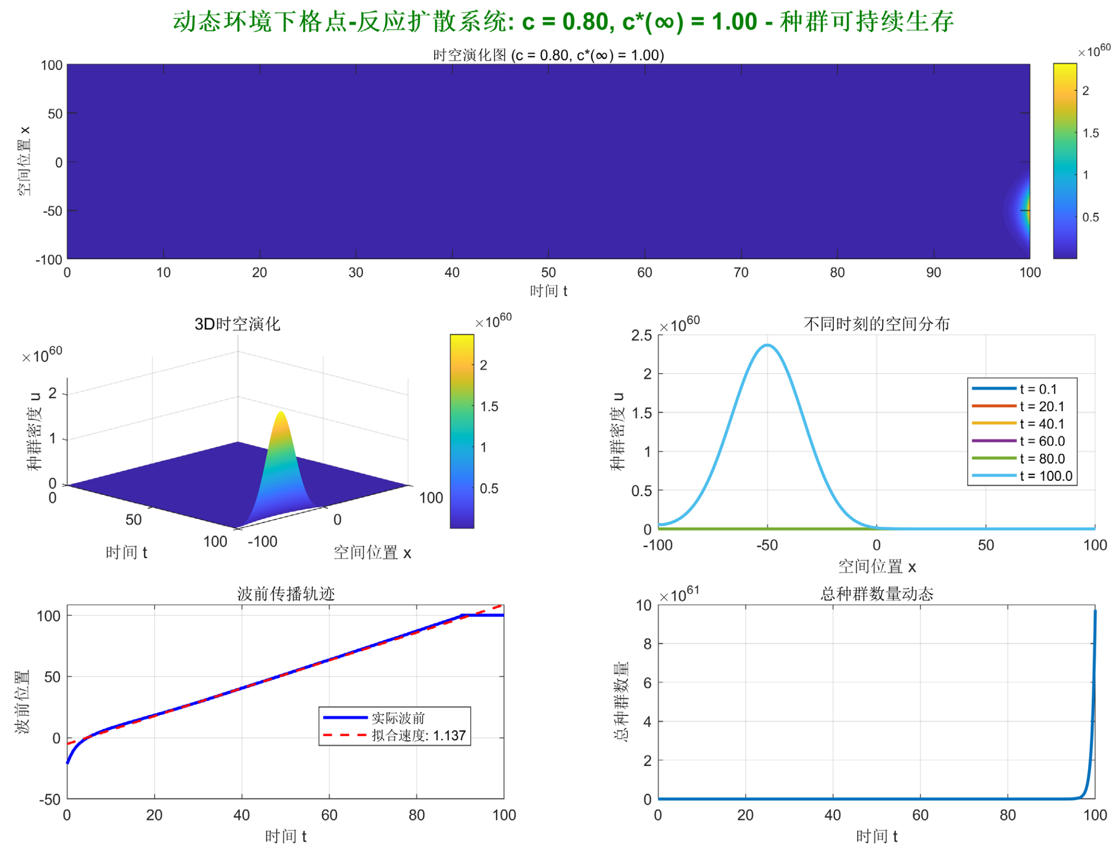

Figure 1. Spatiotemporal evolution when $c<c^*(\infty)$

图 1. $c<c^*(\infty)$ 时的时空演化图

图 2 展示了 $c=1.2c^*(\infty)$ 情况下的演化过程。此时环境恶化速度超过种群扩展能力，种群无法跟上适宜环境的移动。波前传播被抑制，整体种群密度随时间衰减，最终在整个空间域趋于零，表明物种走向灭绝。

特别地，对于 $r(-\infty)=0$ 的临界情况，数值模拟揭示了深刻的生态学意义：当环境在负无穷远处趋于完全退化($r(-\infty)=0$)时，物种生存面临极大挑战。这种情况下，种群扩展不再依赖于远前方的“源”环境，而是完全取决于当前波前区域的局部增长能力。这暗示了物种生存策略的根本转变——从依赖源汇结构的空间避难所策略，转向依赖快速扩散和局部适应能力的先锋策略。在气候变化背景下，这一结果预示：对于栖息地持续恶化的物种，仅依靠向极地或高海拔迁移可能不足以保证生存，进化出更高的扩

散能力或对恶劣环境的耐受性变得至关重要。

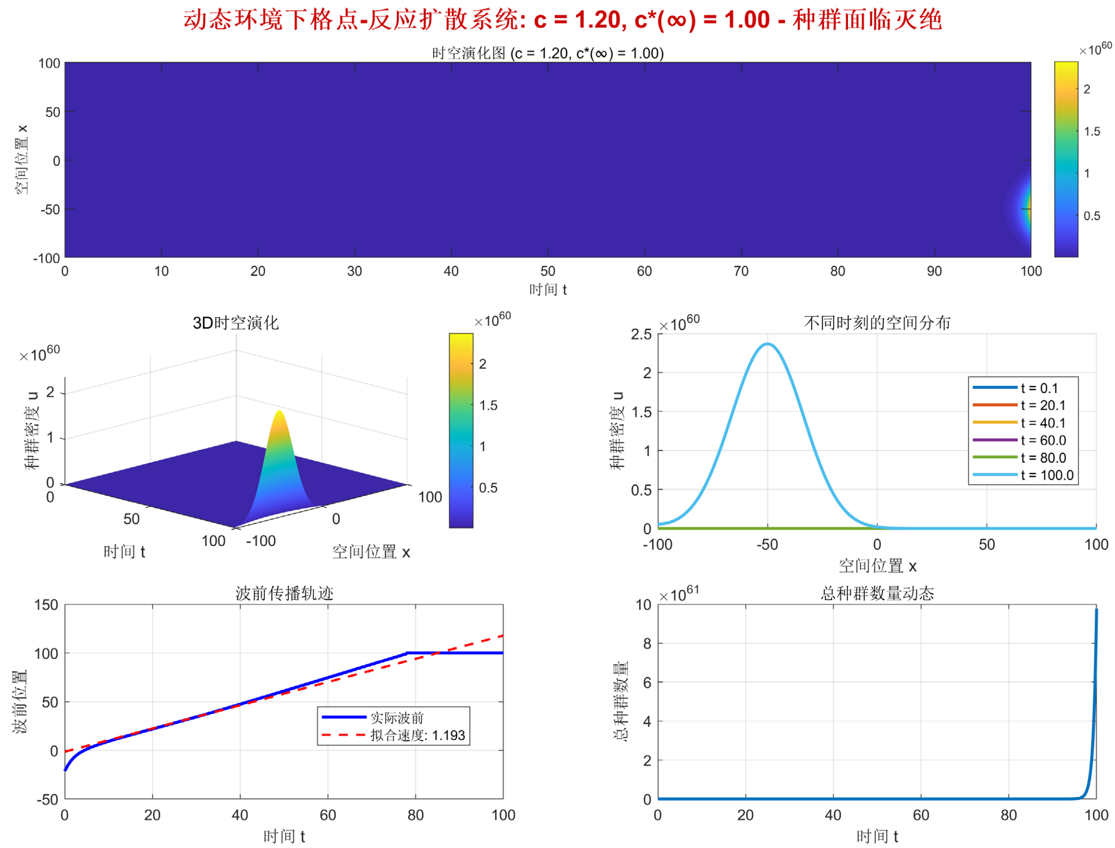

Figure 2. Spatiotemporal evolution when $c > c^*(\infty)$

图 2. $c > c^*(\infty)$ 时的时空演化图

本研究通过松弛 $r(-\infty)$ 的变号性条件，拓展了变化环境中种群扩散理论的应用范围。数值结果表明，即使环境在无穷远处完全退化，只要种群扩展速度超过环境恶化速度，物种仍有可能持续生存。这一发现为生物多样性保护提供了新的理论依据：保护措施不应仅限于当前适宜栖息地，而应关注物种扩散路径，帮助物种跟踪气候变化。关于 $r(\cdot)$ 不变号的假设，本文重点研究了临界情形 $r(-\infty)=0$，由于其退化特性需要特殊处理。然而，其他“不变号”的情形同样值得关注。例如，我们可以考虑非临界情形 $r(-\infty)>0$ 以及非单调函数。Hu 和 Li 在文献[20]中针对 Fisher-KPP 方程研究了 $r(-\infty)>0$ 和 $r(-\infty)\le 0$ 两种情况。在 $r(-\infty)>0$ 的情形下，系统(1)存在两个不同的 Fisher-KPP 型极限方程，每个方程表征一个独立的传播速度。这两个传播速度与时间尺度参数 t 之间的相互作用，可能导致系统(1)产生复杂的时空现象。对这一现象的全面分析将留待未来工作解决。

需要说明的是，本研究拓展了[Hu 等，2025 年待发表]建立的理论框架，并建立在文献[20]的基础性成果之上。

参考文献

[1] Huang, H., Weng, P. and Wu, J. (2003) Asymptotic Speed of Propagation of Wave Fronts in a Lattice Delay Differential Equation with Global Interaction. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **68**, 409-439.

https://doi.org/10.1093/imamat/68.4.409

[2] Liang, X. and Zhao, X. (2006) Asymptotic Speeds of Spread and Traveling Waves for Monotone Semiflows with Applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **60**, 1-40. https://doi.org/10.1002/cpa.20154

[3] Fang, J., Wei, J. and Zhao, X. (2010) Spreading Speeds and Travelling Waves for Non-Monotone Time-Delayed Lattice Equations. *Proceedings of the Royal Society A*: *Mathematical*, *Physical and Engineering Sciences*, **466**, 1919-1934. https://doi.org/10.1098/rspa.2009.0577

[4] Chen, X. and Guo, J. (2002) Existence and Asymptotic Stability of Traveling Waves of Discrete Quasilinear Monostable Equations. *Journal of Differential Equations*, **184**, 549-569. https://doi.org/10.1006/jdeq.2001.4153

[5] Carr, J. and Chmaj, A. (2004) Uniqueness of Travelling Waves for Nonlocal Monostable Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **132**, 2433-2439. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-04-07432-5

[6] Zhang, L. and Guo, S. (2022) Existence and Multiplicity of Wave Trains in a 2D Diatomic Face-Centered Lattice. *Journal of Nonlinear Science*, **32**, Article No. 54. https://doi.org/10.1007/s00332-022-09813-w

[7] Li, B., Bewick, S., Shang, J. and Fagan, W.F. (2014) Persistence and Spread of a Species with a Shifting Habitat Edge. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **74**, 1397-1417. https://doi.org/10.1137/130938463

[8] Hu, C. and Li, B. (2015) Spatial Dynamics for Lattice Differential Equations with a Shifting Habitat. *Journal of Differential Equations*, **259**, 1967-1989. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.025

[9] Yang, Z. and Zhang, G. (2018) Stability of Non-Monotone Traveling Waves for a Discrete Diffusion Equation with Monostable Convolution Type Nonlinearity. *Science China Mathematics*, **61**, 1789-1806. https://doi.org/10.1007/s11425-017-9175-2

[10] Su, T. and Zhang, G. (2020) Global Stability of Non-Monotone Noncritical Traveling Waves for a Discrete Diffusion Equation with a Convolution Type Nonlinearity. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **24**, 937-957. https://doi.org/10.11650/tjm/190901

[11] Pang, L. and Wu, S. (2021) Propagation Dynamics for Lattice Differential Equations in a Time-Periodic Shifting Habitat. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **72**, Article No. 93. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01522-w

[12] Zhu, J., Wang, J. and Dong, F. (2022) Spatial Propagation for the Lattice Competition System in Moving Habitats. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **73**, Article No. 92. https://doi.org/10.1007/s00033-022-01735-7

[13] Pan, Y. (2021) Pulsating Waves for a Non-Monotone Time-Delayed Lattice Equation in Discrete Periodic Habitat. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **35**, 641-662. https://doi.org/10.1007/s10884-021-10029-x

[14] Liu, T. and Zhang, G. (2021) Global Stability of Traveling Waves for a Spatially Discrete Diffusion System with Time Delay. *Electronic Research Archive*, **29**, 2599-2618. https://doi.org/10.3934/era.2021003

[15] Huang, B. and Dai, B. (2024) Spatial Dynamics of a Lattice Lotka-Volterra Competition Model with a Shifting Habitat. *Journal of Nonlinear Model and Analysis*, **6**, 1-25.

[16] Yang, F. and Zhao, Q. (2025) Propagation Dynamics of the Lattice Leslie-Gower Predator-Prey System in Shifting Habitats. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **544**, Article ID: 129075. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.129075

[17] Pao, C.V. (1992) Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Springer Science & Business Media.

[18] Yi, T., Chen, Y. and Wu, J. (2012) Global Dynamics of Delayed Reaction-Diffusion Equations in Unbounded Domains. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **63**, 793-812. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0224-x

[19] Hu, H., Yi, T. and Zou, X. (2019) On Spatial-Temporal Dynamics of a Fisher-KPP Equation with a Shifting Environment. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148**, 213-221. https://doi.org/10.1090/proc/14659

[20] Hu, C., Shang, J. and Li, B. (2019) Spreading Speeds for Reaction-Diffusion Equations with a Shifting Habitat. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32**, 1941-1964. https://doi.org/10.1007/s10884-019-09796-5

[21] Slavík, A., Stehlík, P. and Volek, J. (2017) Well-Posedness and Maximum Principles for Lattice Reaction-Diffusion Equations. *Advances in Nonlinear Analysis*, **8**, 303-322. https://doi.org/10.1515/anona-2016-0116