

双孔介质二维箱形水平井渗流模型的解

夏虹霖, 李 伟

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年10月4日; 录用日期: 2025年10月28日; 发布日期: 2025年11月6日

摘 要

本文针对双孔介质二维箱形水平井渗流模型, 分两种情况建立数学模型: 不考虑井筒储集和表皮因子; 考虑井筒储集和表皮因子。在此基础上, 综合运用Laplace变换、Fourier变换、Duhamel原理, 并结合相似构造法, 系统求解顶底四种边界条件(顶底定压、顶底封闭、顶部定压底部封闭、顶部封闭底部定压)下的模型, 获得无因次井底压力分布在Laplace空间解的相似结构。该成果清晰揭示了顶底四种边界条件下解的表达式之间的内在关联。本文拓展了相似结构理论的应用范围, 为深入研究双孔介质水平井油藏渗流规律, 提供了新理论基础与创新方法。

关键词

二维箱形水平井, 双孔介质, 相似构造法, 核函数

Solution to Two Dimensional Box Shaped Horizontal Well Seepage Model in Dual Porosity Media

Honglin Xia, Wei Li

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: October 4, 2025; accepted: October 28, 2025; published: November 6, 2025

Abstract

Targeting the two dimensional box shaped horizontal well seepage model in dual porosity media, this paper develops mathematical models for two cases: excluding wellbore storage and skin factor; incorporating wellbore storage and skin factor. On this premise, through the comprehensive utilization of Laplace transform, Fourier transform, Duhamel's principle, and in combination with the similar construction method, the models under four top bottom boundary conditions (top-bottom

constant pressure, top bottom closed, top constant pressure with bottom closed, top closed with bottom constant pressure) are systematically solved. The similar structure of the dimensionless bottom hole pressure distribution in the Laplace space solution is derived. This outcome clearly uncovers the internal correlation among the solution expressions under the four top bottom boundary conditions. This paper extends the application scope of the similar structure theory and offers a novel theoretical foundation and innovative approach for in depth investigation into the seepage law of dual-porosity medium horizontal well reservoirs.

Keywords

Two Dimensional Box Shaped Horizontal Well, Dual Porosity Medium, Similar Construction Method, Kernel Function

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

由于水平井开采技术日趋成熟, 双孔介质水平井成为了研究的热点; 该油藏由基质和裂缝构成, 渗流行为比传统单孔油藏复杂得多。国内外也有许多对双孔介质水平井模型的研究。1960 年, Barenblatt 和 Zheltov [1] 针对双孔介质的特点, 建立了在双重介质中弱可压缩液体不定常渗流的数学模型; 1963 年, Warren 和 Root [2] 假设流体在岩块到裂缝中因压力不同产生的窜流, 提出了单层油藏双孔渗流的油藏模型。1965 年, Odeh [3] 在双重介质模型中考虑了表皮的影响, 分析了压力降落和压力恢复曲线。1981 年, 栾志安 [4] 在国外石油工作者的基础上首次提出带窜流作用和表皮因子的双重介质渗流问题, 并建立了考虑窜流作用和表皮因子的双重介质渗流数学模型。1998 年, 王晓冬、刘慈群 [5] 研究了盒状边界油藏中水平井压力动态分析问题, 建立了箱形边界下考虑井筒储集和表皮因子的双孔介质水平井渗流数学模型, 运用 Laplace 变换和有限傅里叶余弦变换求解模型, 通过级数加速收敛和典型曲线分析计算结果。2002 年李顺初 [6] 针对分形双孔介质储层, 引入分形维数和分形指数, 建立外边界无穷大且考虑井筒储存与表皮效应的变流率试井分析数学模型, 通过 Laplace 变换求得无因次储层压力和井底压力的 Laplace 空间解的通用公式。

2006 年, 李顺初和张建军 [7] 建立了分形双孔介质油藏, 构建了试井分析模型。该模型充分考虑了井筒储集、表皮因子, 以及无穷大、定压、封闭这三种外边界条件。通过运用 Laplace 变换法, 在 Laplace 空间中获取了储层压力和井底压力分布的精确解; 2008 年, 郑鹏社, 李顺初和朱维兵 [8] 建立了复合双孔介质油藏在考虑井筒储集和表皮因子条件下的试井分析模型, 利用 Laplace 变换, 求得了在 Laplace 空间中的地层压力和井底压力分布的精确解; 经分析其解式的特征, 发现了它们在三种外边界条件下的解式具有相似结构。

2009 年, 李顺初 [9] 通过对二阶齐次线性微分方程边值问题解的整理和简化, 得到了解的相似结构形式; 2012 年, 许丽 [10] 建立了考虑井筒储集、表皮因子及有效井径等内边界条件和无穷大、定压、封闭等外边界条件的分形双孔油藏球向渗流数学模型, 运用 Laplace 变换和相似构造法求得 Laplace 空间下无因次地层压力和井底压力分布的 Laplace 空间解的相似结构; 2023 年, 杨雨 [11] 通过引入弹性边界条件, 构建并求解了分形双孔油藏球向渗流模型, 分析模型解的相似结构及参数影响, 为油藏渗流研究提供了新视角与方法。

目前在双孔介质油藏中考虑最多的是直井模型, 也有一部分的水平井模型, 为求得井底压力所用的方法有: 积分变换法、有限元法等。但尚未见到将相似构造法用于求解双孔介质箱形水平井中。本文在引入无因次变量后, 运用 Fourier 变换和 Laplace 变换将其转换为二阶常微分方程的边值问题, 再利用相似构造法得到水平方向三种边界(无穷大、封闭、定压)与顶底方向四种边界(顶底定压、顶底封闭、顶部定压底部封闭、顶部封闭底部定压)两两结合共 12 情况下井底压力分布的 Laplace 空间解的相似结构, 再利用 Duhamel 原理将 Laplace 空间下的井底压力解化为统一的连分式形式。

2. 求解一类二阶线性齐次常微分方程边值问题解的相似结构法

讨论如下的一类二阶线性齐次常微分方程边值问题:

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \\ [Ey + (1 + EF)y']_{x=a} = D \\ [Gy + Hy']_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 D, E, F, G, H, a, b 均为已知的实常数, 且 $D \neq 0$, $G^2 + H^2 \neq 0$, $a < b$; 已知函数 $P(x) \in C^1[a, b]$, $q(x) \in C^2[a, b]$

假设 $y_1(x), y_2(x)$ 是边值(2.1)式中的定解方程的两个线性无关的解, 引入二元函数:

$$\varphi_{0,0}(\zeta, x) = y_1(\zeta)y_2(x) - y_2(\zeta)y_1(x) \quad (2.2)$$

并记:

$$\varphi_{1,0}(\zeta, x) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi_{0,0}(\zeta, x) = y_1'(\zeta)y_2(x) - y_2'(\zeta)y_1(x) \quad (2.3)$$

$$\varphi_{0,1}(\zeta, x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,0}(\zeta, x) = y_1(\zeta)y_2'(x) - y_2(\zeta)y_1'(x) \quad (2.4)$$

$$\varphi_{1,1}(\zeta, x) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} \varphi_{0,0}(\zeta, x) = y_1'(\zeta)y_2'(x) - y_2'(\zeta)y_1'(x) \quad (2.5)$$

以上定义的二元函数具有重要的作用, 这里我们把它称为引解函数。

定理: 若边值问题(2.1)有唯一解, 则其解可以表示为如下连分式形式:

$$y(x) = D \cdot \frac{1}{E + \frac{1}{F + \phi(a)}} \cdot \phi(x) \quad (2.6)$$

其中 $\phi(x)$ 称为相似核函数具体式子如下:

$$\phi(x) = \frac{G\varphi_{0,0}(x, b) + H\varphi_{0,1}(x, b)}{G\varphi_{1,0}(a, b) + H\varphi_{1,1}(a, b)} \quad (2.7)$$

例如: 考虑线性封闭地层中流体的稳定渗流, 一端有恒定流量供给、另一端封闭的情况:

$$\begin{cases} y'' + xy' = 0, 0 \leq x \leq L \\ y(0) + y'(0) = 1 \\ y'(L) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

假设 $y_1(x), y_2(x)$ 是边值(2.8)式中的定解方程的两个线性无关的解, 由相似构造法的知识不难得出其引解函数为:

$$\varphi_{0,0}(\zeta, x) = y_1(\zeta)y_2(x) - y_2(\zeta)y_1(x) \quad (2.9)$$

$$\varphi_{1,0}(\zeta, x) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi_{0,0}(\zeta, x) = y_1'(\zeta)y_2(x) - y_2'(\zeta)y_1(x) \quad (2.10)$$

$$\varphi_{0,1}(\zeta, x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,0}(\zeta, x) = y_1(\zeta)y_2'(x) - y_2(\zeta)y_1'(x) \quad (2.11)$$

$$\varphi_{1,1}(\zeta, x) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} \varphi_{0,0}(\zeta, x) = y_1'(\zeta)y_2'(x) - y_2'(\zeta)y_1'(x) \quad (2.12)$$

相似核函数为:

$$\phi(x) = \frac{\varphi_{0,1}(x, L)}{\varphi_{1,1}(0, L)} \quad (2.13)$$

边值问题(2.8)的解可表示为如下的连分式形式:

$$y(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi(0)}} \cdot \frac{1}{1 + \phi(0)} \cdot \phi(x) \quad (2.14)$$

3. 二维双孔介质箱形水平井模型

3.1. 物理模型

不考虑井筒储集和表皮效应影响下的油藏储层二维箱式水平井不稳定渗流模型, 并做如下假设:

- 1) 流体流动为达西渗流。
- 2) 地层由均匀分布的基质和裂缝构成双重孔隙结构。
- 3) 流动方式为平面单向流。
- 4) 忽略重力、毛细管力的影响。
- 5) 流体满足达西定律。

3.2. 无因次数学模型

不考虑井筒储集和表皮因子的二维双孔介质箱型水平井的无因次数学模型(其中下标 f 表示裂缝, m 表示基质)如下:

$$\frac{\partial^2 P_{fD}}{\partial x_D^2} + \rho^2 \frac{\partial^2 P_{fD}}{\partial y_D^2} = \omega \frac{\partial P_{fD}}{\partial t_D} + \lambda (P_{fD} - P_{mD}) \quad (3.2.1)$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial P_{mD}}{\partial t_D} = \lambda (P_{fD} - P_{mD}) \quad (3.2.2)$$

$$P_{fD}|_{t_D=0} = P_{mD}|_{t_D=0} = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\left. \frac{\partial P_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = -\frac{\pi}{2} q_{fD}, y_{1D} \leq y_D \leq y_{2D} \quad (3.2.4)$$

$$P_{fD}|_{x_D \rightarrow \infty} = P_{mD}|_{x_D \rightarrow \infty} = 0, \quad (3.2.5)$$

$$P_{fD}|_{x_D=R_D} = P_{mD}|_{x_D=R_D} = 0, \quad (3.2.6)$$

$$\left. \frac{\partial P_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=R_D} = \left. \frac{\partial P_{mD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=R_D} = 0, \quad (3.2.7)$$

$$\left. \frac{\partial P_{fD}}{\partial y_D} \right|_{y_D=0,1} = \left. \frac{\partial P_{mD}}{\partial y_D} \right|_{y_D=0,1} = 0 \text{ 或 } P_{fD}|_{y_D=0,1} = P_{mD}|_{y_D=0,1} = 0 \quad (3.2.8)$$

$$\begin{cases} C_D \frac{\partial P_{fD}}{\partial t_D} + q_{fD} = 1 \\ P_{fD} = P_{fD}^* + S q_{fD} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$$P_{fD}^* = \frac{1}{y_{2D} - y_{1D}} \int_{y_{1D}}^{y_{2D}} P_{fD}(x_D, y_D, t_D) dy_D \quad (3.2.10)$$

式中: P_{fD} 为无量纲裂缝压力, $P_{fD} = \frac{K_{fh}(P_f - P_0)L}{1.842qBu}$, K_{fh} 为裂缝水平渗透率, P_f 为裂缝压力, P_0 为初始

压力, q 为井产量, B 为体积系数, u 流体的黏度, L 为井长; P_{mD} 为无量纲基质压力, $P_{mD} = \frac{K_{fv}(P_m - P_0)L}{1.842qBu}$,

P_m 为基质压力; ρ 为各向异性系数, $\rho = \sqrt{\frac{K_{fv}}{K_{fh}}} \frac{r_w}{h}$, K_{fv} 为裂缝垂向渗透率, r_w 井筒半径, h 为井的高度;

ω 为弹性储容比 $\omega = \frac{(\phi C)_f}{(\phi C)_f + (\phi C)_m}$, ϕ_f 为裂缝孔隙度, ϕ_m 基质孔隙度, C_f 为裂缝综合压缩系数, C_m 为

基质综合压缩系数; λ 为双孔介质系统窜流系数, $\lambda = \frac{\alpha r_w^2}{K_m + K_f} K_m$, α 为窜流因子; t_D 为无量纲时间,

$t_D = \frac{3.6 \times 10^{-3} K_{fh} t}{u(\phi C)_f r_w^2}$; x_D 、 y_D 为无量纲方向坐标; q_{fD} 为无量纲井壁速度, $q_{fD} = \frac{2\pi r_w L q_f}{q}$, q 为井壁速度。

3.3. 模型求解

不考虑井储和表皮的影响, 对(3.2.1)~(3.2.8)式中的做 Laplace 变换如下:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{fD}}{\partial x_D^2} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_{fD}}{\partial y_D^2} = s \omega \bar{P}_{fD} + \lambda (\bar{P}_{fD} - \bar{P}_{mD}) \quad (3.3.1)$$

$$(1 - \omega) \bar{P}_{mD} = \lambda (\bar{P}_{fD} - \bar{P}_{mD}) \quad (3.3.2)$$

$$\bar{P}_{fD}|_{t_D=0} = \bar{P}_{mD}|_{t_D=0} = 0 \quad (3.3.3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{P}_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = -\frac{\pi}{2} \bar{q}_{fD}, y_{1D} \leq y_D \leq y_{2D} \quad (3.3.4)$$

$$\bar{P}_{fD}|_{x_D \rightarrow \infty} = \bar{P}_{mD}|_{x_D \rightarrow \infty} = 0, \quad (3.3.5)$$

$$\bar{P}_{fD}|_{x_D=R_D} = \bar{P}_{mD}|_{x_D=R_D} = 0, \quad (3.3.6)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{P}_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=R_D} = \left. \frac{\partial \bar{P}_{mD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=R_D} = 0, \quad (3.3.7)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{P}_{fD}}{\partial y_D} \right|_{y_D=0,1} = \left. \frac{\partial \bar{P}_{mD}}{\partial y_D} \right|_{y_D=0,1} = 0 \text{ 或 } P_{fD}|_{y_D=0,1} = P_{mD}|_{y_D=0,1} = 0 \quad (3.3.8)$$

由(3.3.2)式可得:

$$\bar{P}_{mD} = \frac{\lambda}{\lambda + s(1-\omega)} \bar{P}_{fD} \quad (3.3.9)$$

现将(3.3.9)式代入(3.3.1)式中可得:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{fD}}{\partial x_D^2} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_{fD}}{\partial y_D^2} - s \left[\frac{\lambda + s\omega(1-\omega)}{\lambda + s(1-\omega)} \right] \bar{P}_{fD} = 0 \quad (3.3.10)$$

现今:

$$f(s) = \frac{\lambda + s\omega(1-\omega)}{\lambda + s(1-\omega)} \quad (3.3.11)$$

则有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{P}_{fD}}{\partial x_D^2} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_{fD}}{\partial y_D^2} - sf(s) \bar{P}_{fD} = 0 \\ \left. \frac{\partial \bar{P}_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = -\frac{\pi}{2} \bar{q}_{fD}, y_{1D} \leq y_D \leq y_{2D} \\ \bar{P}_{fD}|_{x_D \rightarrow \infty} = 0, \bar{P}_{fD}|_{x_D=R_D} = 0, \left. \frac{\partial \bar{P}_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=R_D} = 0 \\ \left. \frac{\partial \bar{P}_{fD}}{\partial y_D} \right|_{y_D=0,1} = 0, P_{fD}|_{y_D=0,1} = 0 \end{array} \right. \quad (3.3.12)$$

由于有三种垂直于井筒处的边界和四种顶底边界, 将各种边界情况组合起来讨论的话共有 12 种边界的组合情况, 现对这 12 种情况运用相似构造法求解:

以下是四种不同的顶底边界情况(下标数字 1 表示顶底定压情况, 数字 2 表示顶底封闭情况, 数字 3 表示顶部封闭底部定压情况, 数字 4 表示顶部定压底部封闭情况)。

1': 顶底定压边界, 则 y_D 方向所对应的特征值和特征函数分别为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1k} = k\pi \\ \lambda_{1k} = \sin(k\pi y_D) \end{array} \right. \quad (3.3.13)$$

首先对(3.3.12)式中的 y_D 作有限 Fourier 变换则可化为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{\bar{P}}_{fD}}{\partial x_D^2} - [(\rho \alpha_{1k})^2 + sf(s)] \tilde{\bar{P}}_{fD} = 0 \\ \left. \frac{\partial \tilde{\bar{P}}_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = \frac{\pi}{2} \bar{q}_{fD} \frac{1}{\alpha_{1k}} [\cos(\alpha_{1k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{1k} y_{1D})] \\ \tilde{\bar{P}}_{fD}|_{x_D \rightarrow \infty} = 0, \tilde{\bar{P}}_{fD}|_{x_D=R_D} = 0, \left. \frac{\partial \tilde{\bar{P}}_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=R_D} = 0 \end{array} \right. \quad (3.3.14)$$

2': 顶底封闭边界, 则 y_D 方向所对应的特征值和特征函数分别为:

$$\begin{cases} \alpha_{2k} = k\pi \\ \lambda_{2k} = \cos(k\pi y_D) \end{cases} \quad (3.3.15)$$

3': 顶部封闭底部定压边界, 则 y_D 方向所对应的特征值和特征函数分别为:

$$\begin{cases} \alpha_{3k} = \frac{(2k-1)\pi}{2} \\ \lambda_{3k} = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} y_D\right) \end{cases} \quad (3.3.16)$$

4': 顶部定压底部封闭边界, 则 y_D 方向所对应的特征值和特征函数分别为:

$$\begin{cases} \alpha_{4k} = \frac{(2k-1)\pi}{2} \\ \lambda_{4k} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} y_D\right) \end{cases} \quad (3.3.17)$$

① 现令(3.3.14)式中

$$F_{1k}(s) = \sqrt{(\rho\alpha_{1k})^2 + sf(s)} \quad (3.3.14)$$

则有:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{JD}}{\partial x_D^2} - F_{1k}^2(s) \tilde{P}_{JD} = 0 \\ \left. \frac{\partial \tilde{P}_{JD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = \frac{\pi}{2} \bar{q}_{JD} \frac{1}{\alpha_{1k}} [\cos(\alpha_{1k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{1k} y_{1D})] \\ \left. \tilde{P}_{JD} \right|_{x_D \rightarrow \infty} = 0, \left. \tilde{P}_{JD} \right|_{x_D=R_D} = 0, \left. \frac{\partial \tilde{P}_{JD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=R_D} = 0 \end{cases} \quad (3.3.15)$$

则(3.3.15)式为常微分方程的边值问题, 根据相似构造理论, 不难求得定解方程的两个线性无关的解分别为 $e^{-F_{1k}(s)x_D}$ 和 $e^{F_{1k}(s)x_D}$ 于是构造二元引解函数:

$$\varphi_{0,0}(x_D, R_D) = e^{-F_{1k}(s)x_D} e^{F_{1k}(s)R_D} - e^{-F_{1k}(s)R_D} e^{F_{1k}(s)x_D} \quad (3.3.16)$$

$$\varphi_{1,0}(x_D, R_D) = \frac{\partial \varphi_{0,0}(x_D, R_D)}{\partial x_D} = -F_{1k}(s) [e^{F_{1k}(s)(R_D-x_D)} - e^{F_{1k}(s)(x_D-R_D)}] \quad (3.3.17)$$

$$\varphi_{0,1}(x_D, R_D) = \frac{\partial \varphi_{0,0}(x_D, R_D)}{\partial R_D} = F_{1k}(s) [e^{F_{1k}(s)(R_D-x_D)} - e^{F_{1k}(s)(x_D-R_D)}] \quad (3.3.18)$$

$$\varphi_{1,1}(x_D, R_D) = \frac{\partial^2 \varphi_{0,0}(x_D, R_D)}{\partial x_D \partial R_D} = -F_{1k}^2(s) [e^{F_{1k}(s)(R_D-x_D)} - e^{F_{1k}(s)(x_D-R_D)}] \quad (3.3.19)$$

根据相似构造理论和 y_D 的三种外边界条件构造相似核函数:

$$\phi(x_D, s) = \frac{G\varphi_{0,0}(x_D, R_D) + H\varphi_{1,0}(x_D, R_D)}{G\varphi_{0,1}(1, R_D) + H\varphi_{1,1}(1, R_D)} \quad (3.3.20)$$

对应于不同外边界核函数依次为:

$$\phi_1(x_D, s) = \begin{cases} \frac{e^{-F_{1k}(s)x_D}}{-F_{1k}(s)e^{-F_{1k}(s)}}, & \text{外边界无穷大} \\ \frac{e^{F_{1k}(s)(R_D-x_D)} + e^{F_{1k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{1k}(s)[e^{F_{1k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{1k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界封闭} \\ \frac{e^{F_{1k}(s)(R_D-x_D)} - e^{F_{1k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{1k}^2(s)[e^{F_{1k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{1k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界定压} \end{cases} \quad (3.3.21)$$

则(3.3.15)式对于 x_D 方向三种外边界条件下 Fourier 变换像空间的解为:

$$\tilde{\bar{P}}_{jD} = \frac{\pi}{2} \bar{q}_{jD} \phi_1(x_D, s) \frac{1}{\alpha_{1k}} [\cos(\alpha_{1k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{1k} y_{1D})] \quad (3.3.22)$$

② 同理可得, 考虑顶底封闭边界, x_D 方向三种外边界条件下 Fourier 变换像空间的解为:

$$\tilde{\bar{P}}_{jD} = -\frac{\pi}{2} \bar{q}_{jD} \phi_2(x_D, s) \frac{1}{\alpha_{2k}} [\sin(\alpha_{2k} y_{2D}) - \sin(\alpha_{2k} y_{1D})] \quad (3.3.23)$$

③ 考虑顶部封闭底部定压边界, x_D 方向三种外边界条件下 Fourier 变换像空间的解为:

$$\tilde{\bar{P}}_{jD} = \frac{\pi}{2} \bar{q}_{jD} \phi_3(x_D, s) \frac{1}{\alpha_{3k}} [\cos(\alpha_{3k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{3k} y_{1D})] \quad (3.3.24)$$

④ 考虑顶部定压底部封闭边界, x_D 方向三种外边界条件下 Fourier 变换像空间的解为:

$$\tilde{\bar{P}}_{jD} = -\frac{\pi}{2} \bar{q}_{jD} \phi_4(x_D, s) \frac{1}{\alpha_{4k}} [\sin(\alpha_{4k} y_{2D}) - \sin(\alpha_{4k} y_{1D})] \quad (3.3.25)$$

现对(3.3.22)式作关于 y_D 的 Fourier 逆变换就得到第一种情况地层压力的 Laplace 空间解:

$$\bar{P}_{1jD}(x_D, y_D, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_1(x_D, s) \bar{q}_{jD} \pi}{\alpha_{1k}} [\cos(\alpha_{1k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{1k} y_{1D})] \sin(\alpha_{1k} y_D) \quad (3.3.26)$$

若考虑井筒储集系数和表皮因子的影响, 对(3.2.9)~(3.2.10)作 Laplace 变换得:

$$\begin{cases} sC_D \bar{P}_{1wD} + \bar{q}_{jD} = \frac{1}{s} \\ \bar{P}_{1wD} = \bar{P}_{1wD}^* + S \bar{q}_{jD} \end{cases} \quad (3.3.27)$$

$$\bar{P}_{1wD}^* = \frac{1}{y_{2D} - y_{1D}} \int_{y_{1D}}^{y_{2D}} \bar{P}_{1wD}(x_D, y_D, s) dy_D \quad (3.3.28)$$

其中: $y_{2D} - y_{1D} = \frac{1}{h}(L_{y_2} - L_{y_1}), y_{2D} = \frac{L_{y_2}}{h}, y_{1D} = \frac{L_{y_1}}{h}$

现将(3.3.26)代入(3.3.28)中可得水平井平均压力的 Laplace 空间解:

①': 第一种情况下平均压力的 Laplace 空间解为:

$$\bar{P}_{1wD}^*(s) = \frac{\pi h \bar{q}_{jD}}{2r_w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_1(x_D, s)}{\alpha_{1k}^2} [\cos(\alpha_{1k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{1k} y_{1D})]^2 \quad (3.3.29)$$

②': 与第一种情况的做法相同, 可得第二种情况下平均压力的 Laplace 空间解:

$$\bar{P}_{2wD}^*(s) = -\frac{\pi h \bar{q}_{jD}}{2r_w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_2(x_D, s)}{\alpha_{2k}^2} [\sin(\alpha_{2k} y_{2D}) - \sin(\alpha_{2k} y_{1D})]^2 \quad (3.3.30)$$

③': 与第一种情况的做法相同, 可得第三种情况下平均压力的 Laplace 空间解:

$$\bar{P}_{3wD}^*(s) = -\frac{\pi h \bar{q}_{fD}}{2r_w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_3(x_D, s)}{\alpha_{3k}^2} [\cos(\alpha_{3k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{3k} y_{1D})]^2 \quad (3.3.31)$$

④': 与第一种情况的做法相同, 可得第四种情况下平均压力的 Laplace 空间解:

$$\bar{P}_{4wD}^*(s) = -\frac{\pi h \bar{q}_{fD}}{2r_w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_4(x_D, s)}{\alpha_{4k}^2} [\sin(\alpha_{4k} y_{2D}) - \sin(\alpha_{4k} y_{1D})]^2 \quad (3.3.32)$$

针对上述四种情况若记:

$$G_{ik}(s) = \begin{cases} \frac{\pi h}{2r_w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_1(x_D, s)}{\alpha_{1k}^2} [\cos(\alpha_{1k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{1k} y_{1D})]^2 \\ -\frac{\pi h}{2r_w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_2(x_D, s)}{\alpha_{2k}^2} [\sin(\alpha_{2k} y_{2D}) - \sin(\alpha_{2k} y_{1D})]^2 \\ -\frac{\pi h}{2r_w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_3(x_D, s)}{\alpha_{3k}^2} [\cos(\alpha_{3k} y_{2D}) - \cos(\alpha_{3k} y_{1D})]^2 \\ -\frac{\pi h}{2r_w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_4(x_D, s)}{\alpha_{4k}^2} [\sin(\alpha_{4k} y_{2D}) - \sin(\alpha_{4k} y_{1D})]^2 \end{cases}, i=1, 2, 3, 4 \quad (3.3.33)$$

将(3.3.29)~(3.3.32)代入(3.3.27)中并进行整理, 不难求得考虑井筒储集和表皮效应的井底压力的 Laplace 解为(见表 1):

$$\bar{P}_{iWD} = \frac{1}{s} \frac{1}{C_D s + \frac{1}{G_{ik}(s) + S}}, i=1, 2, 3, 4 \quad (3.3.34)$$

4. 试井分析典型曲线及参数分析

借助 Stehfest 数值反演算法以及 MATLAB 编程, 绘制了二维箱式水平井油藏井底压力及压力导数的试井分析典型曲线影响井底压力的主要因素有井筒储集系数和表皮因子、窜流系数、弹性储容比等。

4.1. 双重介质油藏典型曲线

1) 储容比 ω 对压力的动态影响

从图 1 可以看出, 在其他参数不变的情况下, 储容比越小, 裂缝系统流动段时间越短, 无因次压力导数曲线的下凹越深, 窜流段就越长, 后期水平径向流持续时间越长, 边界段出现时间越晚。

2) 从图 2 可以看出, 在其他参数不变的情况下, 窜流系数越小, 无因次压力导数曲线中的下凹部分越靠左, 基质向裂缝窜流发生的时间越早, 裂缝线性流动段持续时间越短。

4.2. 参数对比分析

本文重点在于相似构造法理论研究, 即依据油气层渗流理论建立双孔介质二维箱型水平井模型, 现给出理想状态下和现实情况中窜流系数的影响。

图 3 为本文模型中窜流系数对水平井底压力影响与理想化模型中窜流系数对井底压力影响的对比, 从图中可以看出受窜流系数 λ 取值的影响, ①和②的压力和压力导数曲线均存在着显著差异, 主要表现在早期裂缝线性流动段、基质裂缝窜流段和地层线性流动段, 并且 λ 越大谷值的宽度越长, 窜流阶段越

长。对于本文模型的谷值“模糊”的情况可能有以下两个原因:

- 1) 储层非均质: 实际储层中基质 - 裂缝分布不均匀, 部分窜流系数高, 另一部分窜流系数低等。
- 2) 井筒污染(表皮因子 $S > 0$): 污染会增加流体入井阻力, 导致前期(井筒储集 + 线性流动阶段)导数偏高, 窜流阶段的谷值被拉高。

因此在双孔介质中窜流系数应该更加重视起来, 应更考虑符合实际的渗流模型。

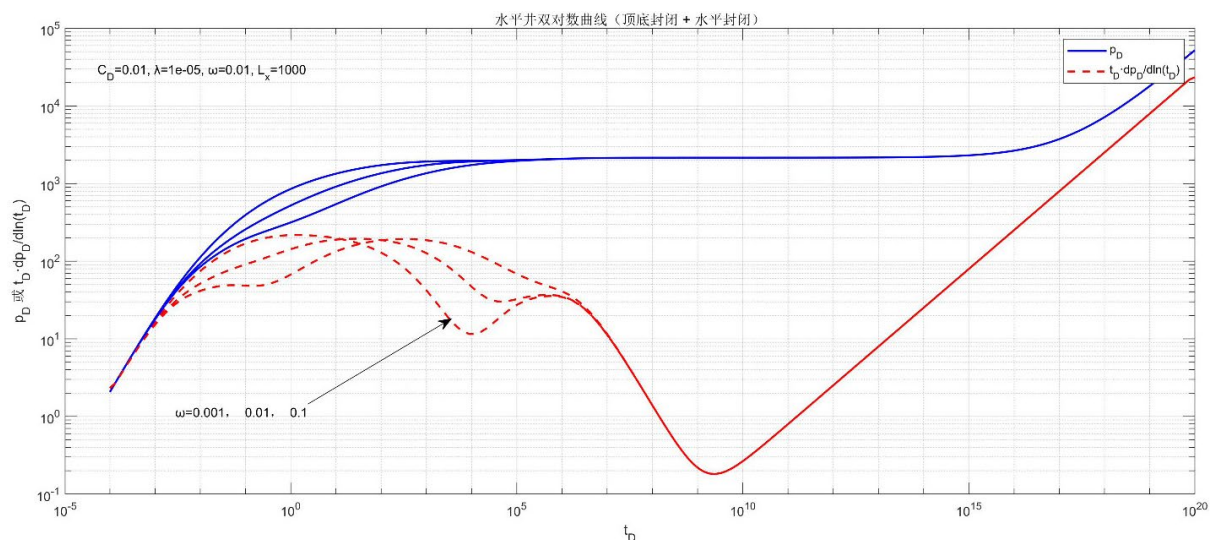


Figure 1. Influence of storage ratio on typical bottom-hole pressure curves of horizontal wells with top-bottom closed boundaries
图 1. 储容比 ω 对顶底封闭边界水平井底压力典型曲线的影响

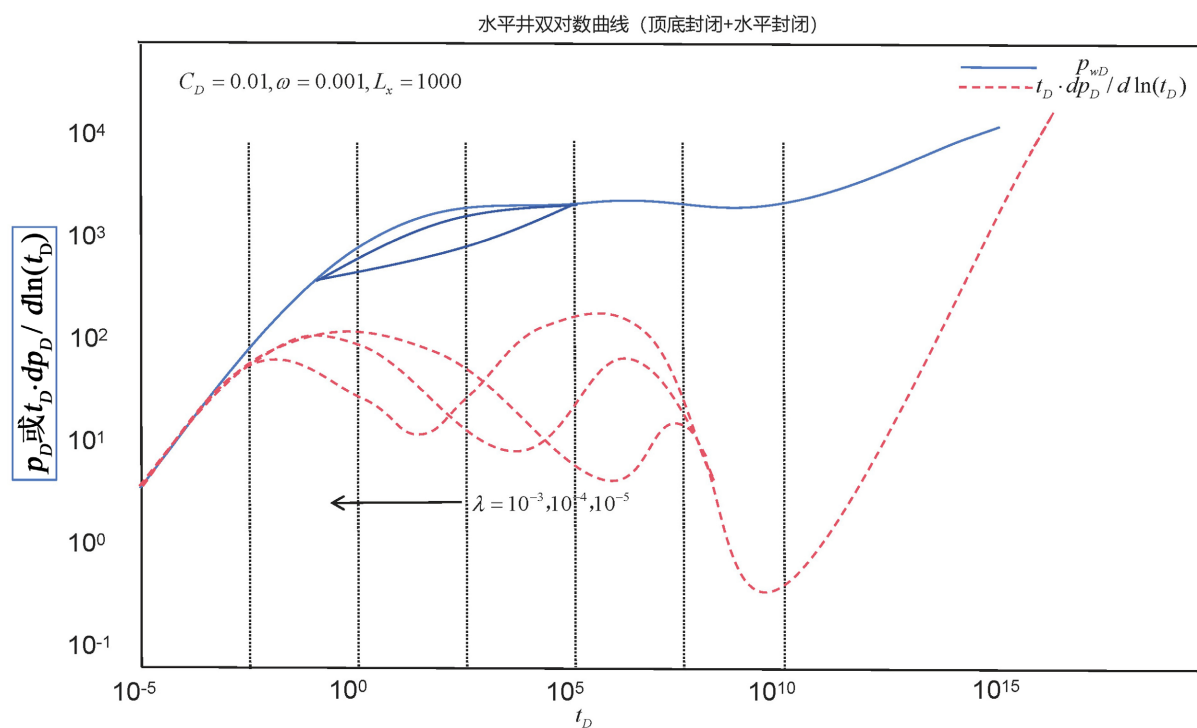


Figure 2. Influence of interporosity coefficient on typical bottom-hole pressure curves of horizontal wells with top-bottom closed boundaries
图 2. 窜流系数 λ 对顶底封闭边界水平井底压力典型曲线的影响

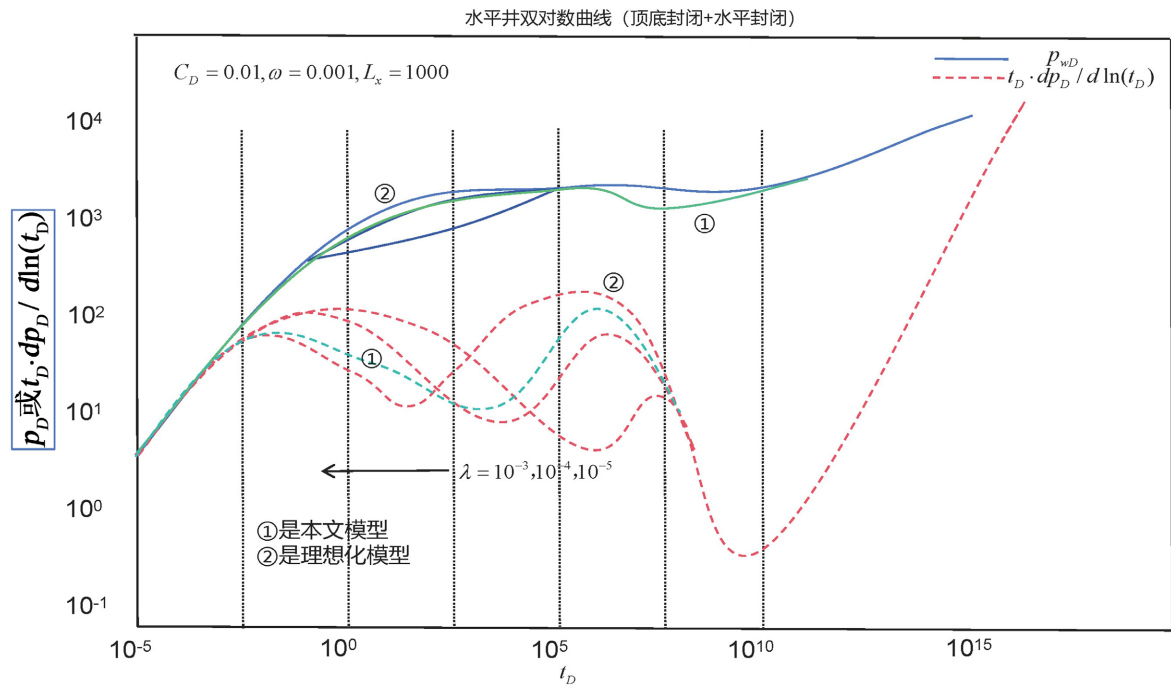


Figure 3. The influence of the crossflow coefficient on the typical curve of bottomhole pressure in horizontal wells with top and bottom sealed boundaries in the model of this paper and the idealized model
图 3. 本文模型与理想化模型中窜流系数对顶底封闭边界水平井底压力典型曲线的影响

Table 1. Eigenvalues, eigenfunctions, and similar kernel functions under different boundary conditions
表 1. 不同边界条件下的特征值、特征函数、相似核函数

顶底边界条件	特征值	特征函数	相似核函数
顶底定压(i = 1)	$\alpha_{1k} = k\pi$	$\lambda_{1k} = \sin(k\pi y_D)$	$\phi_1(x_D, s) = \begin{cases} \frac{e^{-F_{1k}(s)x_D}}{-F_{1k}(s)e^{-F_{1k}(s)}}, & \text{外边界无穷大} \\ \frac{e^{F_{1k}(s)(R_D-x_D)} + e^{F_{1k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{1k}(s)[e^{F_{1k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{1k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界封闭} \\ \frac{e^{F_{1k}(s)(R_D-x_D)} - e^{F_{1k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{1k}^2(s)[e^{F_{1k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{1k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界定压} \end{cases}$
顶底封闭(i = 2)	$\alpha_{2k} = k\pi$	$\lambda_{2k} = \cos(k\pi y_D)$	$\phi_2(x_D, s) = \begin{cases} \frac{e^{-F_{2k}(s)x_D}}{-F_{2k}(s)e^{-F_{2k}(s)}}, & \text{外边界无穷大} \\ \frac{e^{F_{2k}(s)(R_D-x_D)} + e^{F_{2k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{2k}(s)[e^{F_{2k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{2k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界封闭} \\ \frac{e^{F_{2k}(s)(R_D-x_D)} - e^{F_{2k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{2k}^2(s)[e^{F_{2k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{2k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界定压} \end{cases}$
顶部封闭底部定压(i = 3)	$\alpha_{3k} = \frac{(2k-1)\pi}{2}$	$\lambda_{3k} = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}y_D\right)$	$\phi_3(x_D, s) = \begin{cases} \frac{e^{-F_{3k}(s)x_D}}{-F_{3k}(s)e^{-F_{3k}(s)}}, & \text{外边界无穷大} \\ \frac{e^{F_{3k}(s)(R_D-x_D)} + e^{F_{3k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{3k}(s)[e^{F_{3k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{3k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界封闭} \\ \frac{e^{F_{3k}(s)(R_D-x_D)} - e^{F_{3k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{3k}^2(s)[e^{F_{3k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{3k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界定压} \end{cases}$

续表

$$\begin{array}{l}
 \text{顶部定压底部} \\
 \text{封闭}(i=4)
 \end{array}
 \alpha_{4k} = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad \lambda_{4k} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} y_D\right) \quad \phi_4(x_D, s) = \begin{cases} \frac{e^{-F_{4k}(s)x_D}}{-F_{4k}(s)e^{-F_{4k}(s)}}, & \text{外边界无穷大} \\ \frac{e^{F_{4k}(s)(R_D-x_D)} + e^{F_{4k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{4k}(s)[e^{F_{4k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{4k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界封闭} \\ \frac{e^{F_{4k}(s)(R_D-x_D)} - e^{F_{4k}(s)(x_D-R_D)}}{-F_{4k}^2(s)[e^{F_{4k}(s)(R_D-1)} - e^{F_{4k}(s)(1-R_D)}]}, & \text{外边界定压} \end{cases}$$

5. 总结

1) 本文考虑双孔介质二维箱式水平井渗流数学模型的井底压力解,建立了 x 方向的三种不同边界(无穷大、封闭、定压)和 y 方向的四种不同边界(顶底定压、顶底封闭、顶部定压底部封闭、顶部封闭底部定压)两两组合共 12 种不同的边界情况,并结合积分变换法和相似构造法构造出其解。其解的相似结构式由边界条件中的系数确定,相似核函数可以由二阶常微分方程的两个线性无关解和边界条件中的系数来构造。

2) 结合 Duhamel 原理,在双孔介质箱型水平井模型中也得到了连分式形解。相比于直井中的连分式形解,两者在形式上完全一样,区别在于核函数的不同。直井中的核函数 $\phi(x_D, s)$ 可以直接构造得出,而水平井中的核函数 $G_i(k)$ 中则包含直井的核函数 $\phi(x_D, s)$ 。

参考文献

- [1] Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N. (1960) Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks [Strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1286-1303. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(60\)90107-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6)
- [2] Warren, J.E. and Root, P.J. (1963) The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, **3**, 245-255. <https://doi.org/10.2118/426-pa>
- [3] Odeh, A.S. and Jones, L.G. (1965) Pressure Drawdown Analysis, Variable-Rate Case. *Journal of Petroleum Technology*, **17**, 960-964. <https://doi.org/10.2118/1084-pa>
- [4] 栾志安. 带窜流作用和表皮因子的双重介质渗流问题研究[J]. 石油学报, 1981, 2(3): 10-20
- [5] 王晓冬, 刘慈群. 箱式封闭油藏中水平井压力分析[J]. 应用数学和力学, 1998(4): 15-20.
- [6] 李顺初. 分形双孔介质油气藏的试井分析模型解[J]. 勘探地球物理进展, 2002(5): 60-62.
- [7] 李顺初, 张建军. 分形双孔介质油藏试井分析解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2006, 25(1): 40-43.
- [8] 郑鹏社, 李顺初, 朱维兵. 复合双孔介质油藏中压力分布的相似结构[J]. 钻采工艺, 2008(4): 80-81, 3.
- [9] 李顺初. 二阶齐次线性微分方程的边值问题的解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2009, 28(5): 40-41, 90.
- [10] 许丽. 基于相似结构的分形双孔油藏球向渗流模型分析[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2012.
- [11] 杨雨. 弹性外边界下的分形双孔油藏球向渗流模型解的相似结构[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2023.