Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(11), 22-29
Published Online November 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1411457

Hans汉斯

最大度至多为5的平面图的Injective边染色

郭瑜倩

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2025年9月29日；录用日期：2025年10月23日；发布日期：2025年10月31日

摘 要

图的 **injective** 边染色是指图中的任意两条距离为 **2** 的边或在同一个三角形的边不能染相同的颜色。称使得图具有 **injective** 边染色的最小正整数为图的 **injective** 边色数。本文运用权转移方法证明了以下结论：对于最大度小于等于 **5** 且无 **4-**圈的平面图，其 **injective** 边色数小于等于 **21**。

关键词

Injective边染色，平面图，最大度，圈

Injective Edge-Coloring of Planar Graphs with Maximum Degree at Most 5

Yuqian Guo

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: September 29, 2025; accepted: October 23, 2025; published: October 31, 2025

Abstract

An injective edge-coloring of a graph is that any two edges at distance two, or are in a triangle cannot be colored with the same color. The smallest integer of colors needed

文章引用: 郭瑜倩. 最大度至多为5的平面图的Injective边染色[J]. 应用数学进展, 2025, 14(11): 22-29.
DOI: 10.12677/aam.2025.1411457

for an injective edge-coloring of a graph is called the injective chromatic index. In this paper, we prove the following conclusion by using the discharging method: For a planar graph with maximum degree at most 5 and without 4-cycles, its injective chromatic index is at most 21.

Keywords

Injective Edge-Coloring, Planar Graph, Maximum Degree, Cycle

1. 引言

本文只考虑无向有限的简单图. 对于一个给定的图 G, 分别用 $V(G)$, $E(G)$, $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 表示图 G 的顶点集, 边集, 最小度和最大度. 在不引起混淆的情况下, 我们将 $\Delta(G)$ 简记为 Δ . 若图 G 可嵌入在平面上, 使得任意两条边仅在端点处相交, 则称 G 为可平面图. 可平面图的上述平面嵌入称为平面图. 用 $F(G)$ 表示平面图 G 的面集. 设 $x \in V(G) \cup F(G)$, 用 $d(x)$ 表示图 G 中点 (或面) x 的度. 若一个点 v 满足 $d(v) = k$ ($d(v) \geq k$ 或 $d(v) \leq k$), 则称点 v 为 k-点 (k^+-点或 k^--点). 类似地, 可以定义 k-面, k^+-面或 k^--面. 对于 $v \in V(G)$, 用 $N(v)$ 表示与 v 相邻的点构成的集合. 显然, $|N(v)| = d(v)$. 对于 $f \in F(G)$, 若 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 是面 f 的边界上依某种圈序排列的点 (允许顶点有重复), 则记 $f = [v_1v_2 \cdots v_k]$. 若 k-面 $f = [v_1v_2 \cdots v_k]$ 满足 $d(v_i) = d_i$ ($i = 1, 2, \cdots, k$), 则称 f 为 $(d_1, d_2, \cdots, d_k)$-面. 我们用 $n_i(f)$ 及 $n_i(v)$ 分别表示与面 f 关联的 i-点的个数及与点 v 相邻的 i-点的个数.

图 G 的 injective k-边染色是一个映射 ϕ: $E(G) \longrightarrow \{1, 2, ..., k\}$, 使得对于任两条距离为 2 的边或任两条在同一个三角形里的边 e_1 和 e_2, 都有 $\phi(e_1) \neq \phi(e_2)$. 图 G 的 injective 边色数是使图 G 存在 injective k-边染色的最小正整数 k, 记作 $\chi'_i(G)$. 显然, injective 边染色不一定是正常边染色.

2015 年, Cardose 等 [1] 提出了 injective 边染色的概念. 同时, 他们证明了对于任意正整数 k ($k \geq 3$), 要确定图 G 是否满足 $\chi'_i(G) \leq k$ 是一个 NP-困难问题. 此外, Ferdjallah 等人 [2] 证明了 $\chi'_i(G) \leq 2(\Delta(G) - 1)^2$ 并且提出如下猜想:

猜想1.1. 对于任意子立方图 G, 有 $\chi'_i(G) \leq 6$.

2022 年, Miao 等人 [3] 提出了如下猜想:

猜想1.2. 对于最大度为 Δ 的简单图 G, 有 $\chi'_i(G) \leq \Delta(\Delta - 1)$.

显然, 猜想 1.1 是猜想 1.2 在 $\Delta = 3$ 时的特殊情况. 近年来多位学者针对最大度较小的图类的 injective 边色数的上界展开了研究. 关于猜想 1.1, Kostochka 等人 [4] 在2021 年证明了子立方图 G 满足 $\chi'_i(G) \le 7$; 子立方平面图 G 满足 $\chi'_i(G) \le 6$.

对于 $\Delta = 5$ 的图的 injective 边色数有如下结果. 2024 年, Lu [5] 等人证明了存在 $(m, k) \in \{(\frac{20}{7}, 12), (3, 13)\}$, 使得当 $\mathrm{mad}(G) < m$ 时, 有 $\chi'_i(G) \le k$. 同年, Zhu [6] 等人证明了存在 $(m, k) \in \{(\frac{16}{5}, 18), (\frac{7}{2}, 19)\}$, 使得当 $\mathrm{mad}(G) < m$ 时, 有 $\chi'_i(G) \le k$. 刘梦玲 [7] 证明了存在 $(m, k) \in \{(\frac{43}{11}, 20), (\frac{25}{6}, 22)\}$, 使得当 $\mathrm{mad}(G) < m$ 时, 有 $\chi'_i(G) \le k$. 2025 年, Hu [8] 等人证明了存在 $(m, k) \in \{(\frac{7}{3}, 6), (\frac{5}{2}, 7)\}$, 使得当 $\mathrm{mad}(G) < m$ 时, 有 $\chi'_i(G) \le k$. Lu [9] 等人证明了当 $\mathrm{mad}(G) < \frac{8}{3}$ 时, 有 $\chi'_i(G) \le 10$. Lai [10] 等人证明了当 $\mathrm{mad}(G) < \frac{14}{5}$ 时, 有 $\chi'_i(G) \le 11$.

本文考虑了 $\Delta \le 5$ 的平面图的 injective 边色数, 得到了如下定理:

定理1.1. 对于 $\Delta \le 5$ 且无 4-圈的平面图 G, 有 $\chi'_i(G) \le 21$.

2. 结构性质

接下来我们证明定理 1.1. 采用反证法. 假设图 G 是定理 1.1 的一个 $|V(G) + |E(G)|$ 尽可能小的极小反例图. 则 G 为 $\Delta \le 5$ 且无 4-圈的平面图并且满足 $\chi'_i(G) \ge 22$. 但对于 G 的任意真子图 G', 有 $\chi'_i(G) \le 21$. 显然, G 是连通的.

我们在本节中讨论极小反例图 G 的结构性质, 在第三节中用权转移方法推出矛盾, 从而证明定理 1.1 成立.

设 $e \in E(G)$ 且 ϕ 是 G 的一个 injective k-边染色. 设使用的颜色集合为 C. 我们用 $F(e)$ 表示边 e 的禁用色集, 即与 e 距离为 2 或与 e 在一个三角形内的边的颜色组成的集合. 用 $S(e)$ 表示边 e 的可用色集, 即 $S(e) = C - F(e)$. 令 $e = uv \in E(G)$, 若 $d(u) + d(v) \le 7$, 则称 e 是一条轻边. 设 $f \in F(G)$ 且 v_i 是与面 f 关联的 3-点, 用 v'_i 表示与 v_i 相邻且不与面 f 关联的点.

注 2.1: 设 $e = uv$ 是 G 中的一条轻边. 假设 $G' \subseteq G$ 存在一个 injective 21-边染色 ϕ. 若 $\{\phi(f)|f$ 与 u 相关联$\} \ne \{\phi(f')|f'$ 与 v 相关联$\}$, 则有 $|F(e)| \le 4(d(u)-1)+4(d(v)-1) = 4(d(u)+d(v))-8 \le 20$. 因此我们在最后染或重染边 e. 换言之, 在后续讨论中我们将省略对轻边的染色处理.

引理2.1. $\delta(G) \ge 3$.

证明 假设 G 中存在一个 2^--点 v, 其中 $N(v) = \{v_1, v_2\}$. 由 G 的极小性, $G' = G - v$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 因为 vv_1 和 vv_2 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾. □

引理2.2. (1) 设 v 是 3-点. 则 $n_3(v) \le 1$.

(2) 设 f 是 3-面. 则 $n_3(f) \le 1$.

(3) 设 f 是 5-面. 则 $n_3(f) \le 2$.

证明 (1) 假设 $n_3(v) \ge 2$. 令 $N(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$ 且 $d(v_1) = d(v_2) = 3$. 由 G 的极小性, $G' = G-v$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 因为 $|S(vv_3)| \ge 21 - 4(d(v_3) - 1) - (d(v_1) - 1) - (d(v_2) - 1) \ge 1$, 且

vv_1 和 vv_2 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾.

(2) 假设 $n_3(f) \geq 2$. 令 $f = [v_1v_2v_3]$ 且 $d(v_1) = d(v_2) = 3$. 由 G 的极小性, $G' = G - v_1$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 抹去 v_2v_3 的颜色. 因为 $|S(v_1v_1')| \geq 21-4(d(v_1')-1)-(d(v_2)-2)-(d(v_3)-2) \geq 1$, $|S(v_1v_3)| \geq 21 - 4(d(v_1) + d(v_3) - 4) - (d(v_2) - 2) \geq 4$, $|S(v_2v_3)| \geq 21 - 4(d(v_2) + d(v_3) - 4) \geq 5$, 且 v_1v_2 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾.

(3) 假设 $n_3(f) \geq 3$. 令 $f = [v_1v_2v_3v_4v_5]$. 由 (1) 可设 $d(v_1)$=$d(v_3)$=$d(v_5)$=3. 由 G 的极小性, $G' = G - v_1$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 抹去 v_2v_3 和 v_4v_5 的颜色. 因为 $|S(v_1v_1')| \geq 21 - 4(d(v_1') - 1) - (d(v_2) - 2) - (d(v_5) - 2) \geq 1$, $|S(v_1v_2)| \geq 21 - 4(d(v_1) + d(v_2) - 4) - (d(v_3) - 1) - (d(v_5) - 2) \geq 2$, $|S(v_2v_3)| \geq 21-4(d(v_2)+d(v_3)-4)-(d(v_4)-2) \geq 2$, $|S(v_4v_5)| \geq 21-4(d(v_4)+d(v_5)-4)-(d(v_3)-2) \geq 4$, 且 v_1v_5 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾. □

引理2.3. G 中不存在 $(3, 4, 4)$-面.

证明 假设 G 中存在 $(3, 4, 4)$-面 $f = [v_1v_2v_3]$ 且 $d(v_1) = 3$. 由 G 的极小性, $G' = G - v_1$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 抹去 v_2v_3 的颜色. 因为 $|S(v_1v_1')| \geq 21-4(d(v_1')-1)-(d(v_2)-2)-(d(v_3)-2) \geq 1$, $|S(v_2v_3)| \geq 21 - 4(d(v_2) + d(v_3) - 4) \geq 5$, 且 v_1v_2 和 v_1v_3 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾. □

由 G 中不含 4-圈易推出下面引理.

引理2.4. (1) 3-面不与 3-面相邻.

(2) k-点至多与 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 个 3-面关联.

引理2.5. 设 4-点 v 关联 2 个 3-面 $f_1 = [vv_1v_2]$ 和 $f_2 = [vv_3v_4]$. 则

(1) $n_{4^-}(v) \leq 2$. 故 $n_5(v) \geq 2$.

(2) 若 $n_3(v) = 1$, 则 $n_5(v) = 3$.

(3) 若 f_1, f_2 为 $(4, 4, 5)$-面 且 v 与 1 个 5-面 f 关联, 则 $n_3(f) \leq 1$.

证明 (1) 假设 $n_{4^-}(v) \geq 3$. 不妨设 v_1, v_2, v_3 都是 4^--点 , 由引理 2.2(2) 和引理 2.3 知 $d(v_1) = d(v_2) = 4$, 由 G 的极小性, $G' = G - v$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 因为 $|S(vv_4)| \geq 21 - 4(d(v_4) - 2) - (d(v_1) - 1) - (d(v_2) - 2) - (d(v_3) - 1) \geq 1$, $|S(vv_1)| \geq 21 - 4(d(v_1) - 2) - (d(v_2) - 1) - (d(v_3) - 1) - (d(v_4) - 2) \geq 4$, $|S(vv_2)| \geq 21 - 4(d(v_2) - 2) - (d(v_1) - 1) - (d(v_3) - 1) - (d(v_4) - 2) \geq 4$ 且 $|S(vv_3)| \geq 21 - 4(d(v_3) - 2) - (d(v_1) - 1) - (d(v_2) - 2) - (d(v_4) - 1) \geq 4$, 所以$\phi$ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾.

(2) 假设 $n_3(v) = 1$ 时, $n_5(v) = 2$. 不失一般性, 假设 $d(v_1) = 3$. 由引理 2.3 知 $d(v_2) = 5$, 不妨假设 $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 5$. 由 G 的极小性, $G' = G - v$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 因为 $|S(vv_2)| \geq 21-4(d(v_2)-2)-(d(v_1)-1)-(d(v_3)-1)-(d(v_4)-2) \geq 1$, $|S(vv_4)| \geq 21-4(d(v_4)-2)-(d(v_1)-1)-(d(v_2)-2)-(d(v_3)-1) \geq 1$, $|S(vv_3)| \geq 21 - 4(d(v_3) - 2) - (d(v_1) - 1) - (d(v_3) - 2) - (d(v_4) - 1) \geq 4$ 且 vv_1 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾.

(3) 假设 f_1, f_2 为 $(4, 4, 5)$-面 且 v 与 1 个 5-面 f 关联时, 有 $n_3(f) \geq 2$. 不妨设 $f = [v_5v_6v_4vv_1]$. 由引理 2.2(3), $n_3(f) = 2$. 故 $d(v_5) = d(v_6) = 3$.

情形 1 f 为 $(3,3,4,4,4)$-面, 其中 $d(v_1)=d(v_4)=4$.

则 $d(v_2)=d(v_3)=5$. 由 G 的极小性, $G'=G-v$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 抹去 v_1v_5 的颜色. 因为 $|S(vv_2)|\geq 21-4(d(v_2)-2)-(d(v_1)-2)-(d(v_3)-1)-(d(v_4)-2)\geq 1$, $|S(vv_3)|\geq 21-4(d(v_3)-2)-(d(v_2)-1)-(d(v_1)-3)-(d(v_4)-1)\geq 1$, $|S(vv_1)|\geq 21-4(d(v_1)-3)-(d(v_2)-1)-(d(v_3)-1)-(d(v_4)-2)-(d(v_5)-1)\geq 5$, $|S(vv_4)|\geq 21-4(d(v_4)-3)-(d(v_3)-1)-(d(v_2)-1)-(d(v_1)-3)-(d(v_6)-1)\geq 6$, 且 v_1v_5 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾.

情形 2 f 为 $(3,3,5,4,5)$-面, 其中 $d(v_1)=d(v_4)=5$.

则 $d(v_2)=d(v_3)=4$. 由 G 的极小性, $G'=G-v$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 因为 $|S(vv_1)|\geq 21-4(d(v_1)-3)-(d(v_2)-1)-(d(v_3)-1)-(d(v_4)-2)-(d(v_5)-1)\geq 2$, $|S(vv_2)|\geq 21-4(d(v_2)-2)-(d(v_1)-1)-(d(v_4)-1)-(d(v_3)-2)\geq 3$. 由对称性得, $|S(vv_4)|\geq 2$ 且 $|S(vv_3)|\geq 3$. 故 ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾.

情形 3 f 为 $(3,3,4,4,5)$-面, 其中 $d(v_4)=4$ 且 $d(v_1)=5$.

则 $d(v_2)=4$ 且 $d(v_3)=5$. 由 G 的极小性, $G'=G-v$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 抹去 v_4v_6 的颜色. 因为 $|S(vv_3)|\geq 21-4(d(v_3)-2)-(d(v_2)-1)-(d(v_1)-2)-(d(v_4)-2)\geq 1$, $|S(vv_1)|\geq 21-4(d(v_1)-3)-(d(v_2)-1)-(d(v_3)-1)-(d(v_4)-3)-(d(v_5)-1)\geq 3$, $|S(vv_2)|\geq 21-4(d(v_2)-2)-(d(v_1)-1)-(d(v_3)-1)-(d(v_4)-3)\geq 4$, $|S(vv_4)|\geq 21-4(d(v_4)-3)-(d(v_3)-1)-(d(v_2)-1)-(d(v_1)-2)-(d(v_6)-1)\geq 5$ 且 v_4v_6 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾. □

引理2.6. 设 5-点 v 关联 2 个 3-面 $f_1=[vv_1v_2]$ 和 $f_2=[vv_3v_4]$. 若 f_1 为 $(3,4,5)$-面, 则 f_2 为 $(5,5,5)$-面.

证明 假设 $f_1=[vv_1v_2]$ 为 $(3,4,5)$-面时, $f_2=[vv_3v_4]$ 为 $(4^-,5^-,5)$-面, 其中 $d(v_1)=3$, $d(v_2)=4$ 且 $d(v_3)\leq 4$. 由 G 的极小性, $G'=G-v_1$ 有一个 injective 21-边染色 ϕ. 抹去 vv_2 和 vv_3 的颜色. 因为 $|S(v_1v_1')|\geq 21-4(d(v_1')-1)-(d(v_2)-2)-(d(v)-3)\geq 1$, $|S(vv_3)|\geq 21-4(d(v)+d(v_3)-5)-(d(v_2)-2)-(d(v)-4)\geq 2$, $|S(vv_2)|\geq 21-4(d(v)+d(v_2)-5)-(d(v_3)-2)\geq 3$, $|S(vv_1)|\geq 21-4(d(v)+d(v_1)-5)-(d(v_2)-2)-(d(v_3)-2)\geq 5$, 且 v_1v_2 是轻边, 由注 2.1, ϕ 可延拓为 G 的一个 injective 21-边染色, 矛盾. □

3. 权转移方法

下面运用权转移方法完成定理 1.1 的证明. 首先, 在 $V(G)\cup F(G)$ 上定义一个初始权函数 w: 对 $v\in V(G)$, 令 $w(v)=2d(v)-6$; 对 $f\in F(G)$, 令 $w(f)=d(f)-6$. 根据欧拉公式 $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$ 和握手定理 $\sum_{v\in V(G)}d(v)=\sum_{f\in F(G)}d(f)=2|E(G)|$, 有

$$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}w(x)=\sum_{v\in V(G)}(2d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(d(f)-6)=-12. \tag{1}$$

接着, 定义适当的权转移规则, 在总权和保持不变的前提下, 对图 G 的点和面的权重新分配. 当权转移过程结束后, 会得到一个新的权函数 w'. 若可以证明: $\forall\ x \in V(G) \cup F(G)$, 都有 $w'(x) \geq 0$, 则得出以下矛盾:

$$0 \leq \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w'(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = -12 < 0. \tag{2}$$

从而说明极小反例 G 不存在, 即定理 1.1 得证.

定义如下的权转移规则:

R1 4-点 v 给关联的 $(3,4,5)$-面和 $(4,4,4)$-面转权 1, 给关联的 $(4,4,5)$-面转权 $\frac{3}{4}$.

R2 5-点 v 给关联的 $(3,4,5)$-面转权 2, 给关联的 $(3,5,5)$-面, $(4,4,5)$-面, $(4,5,5)$-面转权 $\frac{3}{2}$, 给关联的 $(5,5,5)$-面转权 1.

R3 4^+-点 v 给关联的 5-面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)} \leq \frac{1}{3}$.

下面分别在以下两个引理中验证对 $\forall\ x \in V(G) \cup F(G)$, 有 $w'(x) \geq 0$.

引理3.1. 令 $v \in V(G)$. 则 $\omega'(v) \geq 0$.

证明 令 $d(v) = k$, 由引理 2.1 知, $k \geq 3$.

设 $k = 3$. 则 $\omega'(v) = \omega(v) = 0$.

设 $k = 4$. 则 $\omega(v) = 2$. 由引理 2.4(2), v 至多与两个 3-面关联. 当 v 与两个 3-面关联时, v 至多关联两个 5-面. 若 $n_3(v) = 1$, 由引理 2.5(2), $n_5(v) = 3$. 所以 v 关联一个 $(3,4,5)$-面和一个 $(4,5,5)$-面. 由 R1 和 R3, v 给关联的 $(3,4,5)$-面转权 1, 且至多给关联的其它两个面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)}$, 即 $\omega'(v) \geq 2 - 1 - \frac{1}{5-n_3(f)} \times 2 \geq \frac{1}{3}$. 若 $n_3(v) = 0$, 则由引理 2.5(1), $n_4(v) \leq 2$. 当 $n_4(v) = 2$ 时, 若 v 关联一个 $(4,4,4)$-面, 则 v 关联的另一个 3-面为 $(4,5,5)$-面. 由 R1 和 R3, v 给关联的 $(4,4,4)$-面转权 1, 且至多给关联的其它两个面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)}$, 即 $\omega'(v) \geq 2 - 1 - \frac{1}{5-n_3(f)} \times 2 \geq \frac{1}{3}$. 若 v 关联一个 $(4,4,5)$-面, 则 v 关联的另一个 3-面也是 $(4,4,5)$-面. 由引理 2.5(3), 若 v 与 5-面 f 关联, 则 $n_3(f) \leq 1$. 由 R3, v 给 5-面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)} \leq \frac{1}{4}$. 由 R1 和 R3, v 给关联的 $(4,4,5)$-面转权 $\frac{3}{4}$, 且至多给关联的其它两个面转权 $\frac{1}{4}$, 即 $\omega'(v) \geq 2 - \frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{4} \times 2 = 0$. 当 $n_4(v) = 1$ 时, 则 v 关联一个 $(4,4,5)$-面和一个 $(4,5,5)$-面. 由 R1 和 R3, v 给关联的 $(4,4,5)$-面转权 $\frac{3}{4}$, 且至多给关联的其它两个面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)}$, 即 $\omega'(v) \geq 2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{5-n_3(f)} \times 2 \geq 2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \times 2 = \frac{7}{12}$. 当 $n_4(v) = 0$ 时, 则 v 关联两个 $(4,5,5)$-面. 由 R3, v 至多给关联的其它两个面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)}$, 即 $\omega'(v) \geq 2 - \frac{1}{5-n_3(f)} \times 2 \geq 2 - \frac{1}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$. 当 v 至多与一个 3-面关联时, 由 R1 和 R3, v 至多给关联的一个 3-面转权 1, 且至多给关联的其它三个面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)}$, 即 $\omega'(v) \geq 2 - 1 - \frac{1}{5-n_3(f)} \times 3 \geq 0$.

设 $k = 5$. 则 $\omega(v) = 4$. 由引理 2.4, v 至多与两个 3-面关联. 设 v 关联两个 3-面. 若 v 关联一个 $(3,4,5)$-面, 则由引理 2.6, 另一个 3-面为 $(5,5,5)$-面. 由 R2 和 R3, v 给关联的 $(3,4,5)$-面转权 2, 给关联的 $(5,5,5)$-面转权 1, 且至多给关联的其它三个面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)}$, 即 $\omega'(v) \geq 4 - 2 - 1 - \frac{1}{5-n_3(f)} \times 3 \geq 0$. 若 v 不关联 $(3,4,5)$-面, 则由 R2 和 R3, v 至多给关联的两个 3-面转权 $\frac{3}{2}$, 且至多给关联的其它三个面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)}$, 即 $\omega'(v) \geq 4 - \frac{3}{2} \times 2 - \frac{1}{5-n_3(f)} \times 3 \geq 0$. 下设 v 至多关联一个 3-面. 由 R2 和 R3, v 至多给关联的一个 3-面转权 2, 且至多给关联的其它四个面转权 $\frac{1}{5-n_3(f)}$, 即

$\omega'(v) \geq 4 - 2 - \frac{1}{5-n_3(f)} \times 4 \geq \frac{2}{3}$. □

引理3.2. 令 $f \in F(G)$. 则 $\omega'(f) \geq 0$.

证明 令 $d(f) = k$, 则 $k \neq 4$.

设 $k = 3$. 则 $\omega(f) = -3$. 由引理 2.2 (2) 知, $n_3(f) \leq 1$. 当 $n_3(f) = 1$ 时, 由引理 2.3, f 不为 $(3,4,4)$-面. 故 f 为 $(3,4,5)$-面或 $(3,5,5)$-面. 由 R1 和 R2, $\omega'(f) \geq -3 + \min\{1+2, \frac{3}{2} \times 2\} = 0$. 当 $n_3(f) = 0$ 时, 则 f 为 $(4,4,4)$-面, $(4,4,5)$- 面, $(4,5,5)$-面或 $(5,5,5)$-面. 由 R1 和 R2, $\omega'(f) \geq -3 + \min\{1 \times 3, \frac{3}{4} \times 2 + \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \times 2\} = 0$.

设 $k = 5$. 则 $\omega(f) = -1$. 由 R3, $\omega'(f) = -1 + (5 - n_3(f)) \times \frac{1}{5-n_3(f)} = 0$.

设 $k \geq 6$. 则 $\omega'(f) = \omega(f) = d(f) - 6 \geq 0$. □

4. 结论与讨论

平面图的染色问题是图论研究的热点问题之一，但是对于平面图的 injective-边色数，目前的研究结果较少. 本文主要考虑了 $\Delta \leq 5$ 且不含 4-圈的平面图的 injective-边色数，运用反证法，通过构造极小反例分析其结构特点，制定合适的权规则，运用权转移得出矛盾，从而得到了更好的上界 21. 但此上界与猜想 1.2 中的上界 20 还存在差距，因此我们还可以考虑以下问题.

问题4.1 对于 $\Delta \leq 5$ 且无 4-圈的平面图 G, 是否有 $\chi'_i(G) \leq 20$.

此外，对于许多特殊图类的 injective-边染色，目前的研究结果较少，所以我们还可以考虑一些特殊图类的 injective-边染色.

参考文献

[1] Cardoso, D., Cerdeira, O., Dominicc, C. and Cruz, P. (2019) Injective Edge Coloring of Graphs. *Filomat*, **33**, 6411-6423. https://doi.org/10.2298/fil1919411c

[2] Ferdjallah, B., Kerdjoudj, S. and Raspaud, A. (2021) Injective Edge-Coloring of Subcubic Graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, **14**, Article 2250040. https://doi.org/10.1142/s1793830922500409

[3] Miao, Z., Song, Y. and Yu, G. (2022) Note on Injective Edge-Coloring of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **310**, 65-74. https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.12.021

[4] Kostochka, A., Raspaud, A. and Xu, J. (2021) Injective Edge-Coloring of Graphs with Given Maximum Degree. *European Journal of Combinatorics*, **96**, Article 103355. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103355

[5] Lu, J., Hong, Z. and Xia, Z. (2024) On Injective Chromatic Index of Sparse Graphs with Maximum Degree 5. *Journal of Combinatorial Optimization*, **48**, Article No. 41. https://doi.org/10.1007/s10878-024-01234-7

[6] Zhu, J., Zhu, H. and Bu, Y. (2024) Injective Edge Chromatic Number of Sparse Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **473**, Article 128668. https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128668

[7] 刘梦玲. 最大度为5的图的单射边染色[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2024.

[8] Hu, X. and Zhang, G. (2025) Injective Edge Chromatic Index of Sparse Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **370**, 50-56. https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.03.006

[9] Lu, J. and Pan, X. (2025) Further Results on Injective Edge Coloring of Graphs with Maximum Degree 5. *Discrete Applied Mathematics*, **371**, 176-184. https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.04.021

[10] Lai, H. and Luo, A. (2024) Injective Edge Coloring of Sparse Graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, **17**, Article 2450112. https://doi.org/10.1142/s179383092450112x