Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(11), 47-54
Published Online November 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1411460

Hans汉斯

各向异性拟线性椭圆方程的非负分布解

李奥奇，徐永琳*

西北民族大学数学与计算机科学学院，甘肃 兰州

收稿日期：2025年9月29日；录用日期：2025年10月23日；发布日期：2025年10月31日

摘 要

本文聚焦一类具有退化主部与低可积性 L^1 源项的非强制各向异性拟线性椭圆方程，探究其解的存在性及特定Sobolev空间的正则性。研究区域为 R^N $(N \ge 3)$ 中的有界 $C^{1,1}$ 区域，方程主部含退化因子，衰减率 $0 < r < \overline{p}-1$，且非线性项在零点附近和无穷远处表现为不同的奇异行为。通过构建“近似正则化－先验估计－弱收敛过渡”分析框架，利用截断测试函数、Hölder不等式及Sobolev嵌入定理，得到方程在特定Sobolev空间存在非负分布解。

关键词

各向异性拟线性椭圆方程，非强制性，近似正则化，先验估计

Nonnegative Distributional Solutions to Anisotropic Quasilinear Elliptic Equations

Aoqi Li, Yonglin Xu*

School of Mathematics and Computer Science, Northwest Minzu University, Lanzhou Gansu

Received: September 29, 2025; accepted: October 23, 2025; published: October 31, 2025

Abstract

This paper focuses on a class of non-coercive anisotropic quasilinear elliptic equations with degenerate principal parts and low-integrability L^1 source terms, investigating the existence of their solutions and the regularity in specific Sobolev spaces. The research domain is a bounded $C^{1,1}$ domain

*通讯作者。

文章引用: 李奥奇, 徐永琳. 各向异性拟线性椭圆方程的非负分布解[J]. 应用数学进展, 2025, 14(11): 47-54.
DOI: 10.12677/aam.2025.1411460

in $R^N\left(N\geq 3\right)$. The principal part of the equation contains a degenerate factor with a decay rate satisfying $0<r<\overline{p}-1$, and the nonlinear terms exhibit distinct singular behaviors near zero and at infinity. By constructing an analytical framework of "approximate regularization-a priori estimates-weak convergence transition" and utilizing truncated test functions, Hölder's inequality, and Sobolev embedding theorems, it is shown that there exist non-trivial distributional solutions to the equation in specific Sobolev spaces.

Keywords

Anisotropic Quasilinear Elliptic Equation, Non-Coercivity, Approximate Regularization, Priori Estimate

1. 引言及预备知识

各项异性退化椭圆问题是数学物理中的重要基础性课题，在很多领域中都有广泛应用，研究成果可服务于工程设计、物理模拟等场景。例如，利用各向异性拟线性扩散项刻画非均匀介质输运行为：如磁约束聚变中带电粒子的强各向异性输运、复合材料的非均匀扩散，其拟线性特征还可适配非牛顿流体流动建模，突破线性扩散局限。退化强制性项对应介质特性突变或临界状态：如多孔介质渗流中孔隙率趋近零时的流体传导能力衰减、材料应力接近屈服极限时的力学响应突变，是描述此类临界行为的关键数学工具。而奇异项反映了多因素耦合的强非线性激励，如金融期权定价中资产价格跳跃与流动性瞬时变化的耦合、电磁场中点电荷与线电流的双重奇异场源，也适用于化工反应中两种反应物的局部剧烈反应建模。许多学者都这此类问题展开了研究[1]-[10]。其中，Alvino 在文献[8]聚焦的单指数退化且基于各向同性而无法推广至各向异性场景的椭圆方程；Huang 和 Hajaiej [11]研究的混合局部与非局部椭圆方程，重点关注右侧奇异函数 $h(u)$，但未结合各向异性与退化强制性等多特征耦合；文献[14]探讨的带奇异非线性项的各向异性退化椭圆方程，虽涉及各向异性与奇异项，却只讨论了 $0<\gamma<1$ 的情况。

本文在三个重点文献的基础上聚焦如下具有退化结构的非强制各向异性拟线性椭圆方程，探究其非负分布解的存在性与正则性

$$\begin{cases}-\sum_{i=1}^{N}D_i\left[\dfrac{\left|D_iu\right|^{p_i-2}D_iu}{\left(1+|u|\right)^r}\right]=h(u)f, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中，Ω 是 $R^N\left(N>3\right)$ 中的有界开集，退化项的衰减率 $0<r<\overline{p}-1$，$f\in L^1$ 是一个非负函数。本文中，定义 $D_iu=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$。对于 $i=1,\cdots,N$，指数 p_i 满足 $2\leq p_1\leq p_2\leq\cdots\leq p_N$，并且 $2\leq\overline{p}<N$，其中 $\overline{p}$ 定义为 p_i 的调和平均值，表示为 $\dfrac{1}{\overline{p}}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{1}{p_i}$。在 $R^+\to R^+$ 上，奇异项 h 连续且在原点外有限，它在零点附近和无穷远处满足以下增长条件[11]。

存在 $\gamma_1\geq 0, K_1>0, T_1>0$，使得 $h(\omega)\leq\dfrac{K_1}{\omega^{\gamma_1}}$，若 $\omega\leq T_1$，存在 $\gamma_2\geq 0, K_1>0, T_1>0$，使得 $h(\omega)\leq\dfrac{K_1}{\omega^{\gamma_1}}$，

若 $\omega \ge T_2$，其中 $0 < T_1 < T_2$。

我们定义算子 $A(u) = -\sum_{i=1}^{N} D_i \left[\frac{|D_i u|^{p_i-2} D_i u}{(1+|u|)^r} \right]$。由于该算子依赖于项 $|D_i u|^{p_i-2}$ 以及退化因子 $(1+|u|)^{-r}$，所以失去了强制性质，无法应用这类椭圆问题解的经典存在性定理。此外，方程右侧奇异项 $h(u)f$ 的存在引入了额外的复杂性。方程(1)的解的存在性和正则性受到这些特征的影响，要求结合退化和奇异偏微分方程的分析方法，以获得有意义的解的存在性和正则性结果。

对比已有研究，本文具有以下特点：首先，考虑“退化主部 + 各向异性扩散 + 奇异源项”的多特征耦合模型，更贴合实际物理场景。其次，在近似正则化阶段，通过截断函数替换退化因子，消除退化性与奇异性，又通过 $\frac{1}{(1+n)^r}$ 保证近似算子 A_n 的强制有界性，解决非强制算子无法直接应用变分法的核心难题。此外，在先验估计阶段，引入“截断梯度范数估计”，通过截断函数控制不同区域的梯度范数，结合各向异性 Sobolev 嵌入定理，得到了“退化因子、奇异源项、数据可和性”三者相互作用对解存在性与正则性的影响，完善了退化椭圆方程理论中多因素相互作用的研究体系。

在本文中，首先，明确强制性的定义，经典拟线性椭圆算子 $A(u) = -\operatorname{div}\left(|Du|^{p-2} Du\right)$ 满足强制性条件：存在 $C > 0$ 使得 $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \ge C |u - v|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}$。其次，定义各向异性索伯列夫空间的定义[12]：

$$W^{1,p_i}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega) : D_i v \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, \cdots, N \right\},$$

$$W_0^{1,p_i}(\Omega) = \left\{ v \in W_0^{1,1}(\Omega) : D_i v \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, \cdots, N \right\},$$

$W_0^{1,p_i}(\Omega)$ 的对偶空间记为 $W^{-1,p_i'}(\Omega)$，其中 p_i' 是 p_i 的共轭指数，所有的 $i = 1, \cdots, N$ 满足 $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1$。

定义 1.1 设 $k > 0$，定义截断函数[13] $T_k(s) = \begin{cases} -k, \; s \le -k, \\ s, -k \le s \le k \\ k, \; s \ge k \end{cases}$ 且 $G_k(s) = s - T_k(s)$。

引理 1.2 令 $v \in W_0^{1,p_i}(\Omega)$，那么存在一个正常数 C 使得[14] $|v|_{W_0^{1,p_i}(\Omega)} \le C \sum_{i=1}^{n} |D_i v|_{L^{p_i}(\Omega)}$。

引理 1.3 对于 $v \in W_0^{1,p_i}(\Omega)$ 和 $\overline{p} < N$，存在一个依赖于 Ω 的正常数 C 使得

$$|v|_{L^r(\Omega)} \le C \prod_{i=1}^{N} |D_i v|^{\frac{1}{N}}_{L^{p_i}(\Omega)}, \forall r \in \left[1, \overline{p^*}\right],$$

$$|v|^{\frac{\overline{p}N}{\overline{p^*}}}_{L^{\overline{p^*}}(\Omega)} \le C \sum_{i=1}^{N} |D_i v|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)},$$

其中 $\overline{p^*} = \frac{N\overline{p}}{N - \overline{p}}$，$\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$。

2. 主要结论及证明

定义 $f_n = T_n(f) > 0$。那么序列 f_n 在 $L^1(\Omega)$ 收敛到 $f > 0$，并且满足对于每个 $n \ge 1$，都有 $f_n \le n$ 和 $f_n \le f$。我们构建如下的非退化且非奇异的近似方程

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} D_i \left[\frac{|D_i u_n|^{p_i-2} D_i u_n}{\left(1+|T_n(u_n)|\right)^r} \right] = h_n(u_n) f_n, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

定理 2.1 (存在性)假设 $0<\gamma_1<1$，那么方程(2)有一个非负分布解 u_n 满足

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\left|D_i u_n\right|^{p_i-2} D_i u_n}{\left(1+T_n\left(u_n\right)\right)^r} D_i \varphi \mathrm{d}x=\int_\Omega h_n\left(u_n\right) f_n \varphi \mathrm{d}x, \forall \varphi \in W_0^{1,p_i}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \tag{3}$$

证明 对于 $n\in N$，定义算子 $A_n=-\sum_{i=1}^{N} D_i\left[\frac{\left|D_i u\right|^{p_i-2} D_i u}{\left(1+\left|T_n(u)\right|\right)^r}\right]$，

基于 $\left|T_n(u)\right|\leq n$ 可知 $A_n u,u\geq \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\left|D_i u\right|^{p_i-2} D_i u}{\left(1+\left|T_n(u)\right|\right)^r} D_i u \mathrm{d}x \geq \frac{1}{(1+n)^r}|u|_{W_0^{1,p_i}(\Omega)}^{p_i}$。

根据 Hölder 不等式，对于任意 v，有

$$\left|A_n u,v\right|\leq\left|\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\left|D_i u\right|^{p_i-2} D_i u}{\left(1+\left|T_n(u)\right|\right)^r} D_i v \mathrm{d}x\right|\leq \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left|\frac{\left|D_i u\right|^{p_i-2} D_i u}{\left(1+\left|T_n(u)\right|\right)^r}\right|\left|D_i v\right| \mathrm{d}x \leq C|u|_{W_0^{1,p_i}(\Omega)}^{p_i-1}|v|_{W_0^{1,p_i}(\Omega)}.$$

因此，算子 A_n 是从 $W_0^{1,p_i}(\Omega)$ 到其对偶空间 $W^{-1,p_i'}(\Omega)$ 的强制有界算子。

由此可知，方程(1)存在分布解 $u_n\in W_0^{1,p_i}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$。

根据 $u_n^-=\max\{-u_n,0\}$，为了证明方程的非负性，取 $\varphi=-u_n^-$ 作为方程(1)的测试函数，那么可得出 $D_i\left(-u_n^-\right)=\max\left\{-D_i u_n^-,0\right\}$，由此方程(1)表示为

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\left|D_i u_n\right|^{p_i-2} D_i u_n}{\left(1+T_n\left(u_n\right)\right)^r} D_i\left(-u_n^-\right) \mathrm{d}x=\int_\Omega h_n\left(u_n\right) f_n\left(-u_n^-\right) \mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\left|D_i u_n\right|^{p_i-2} D_i u_n}{\left(1+T_n\left(u_n\right)\right)^r} D_i\left(-u_n^-\right) \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n<0\}} \frac{\left|D_i u_n\right|^{p_i-2} D_i u_n}{\left(1+T_n\left(u_n\right)\right)^r} D_i\left(-u_n^-\right) \mathrm{d}x \\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n\geq 0\}} \frac{\left|D_i u_n\right|^{p_i-2} D_i u_n}{\left(1+T_n\left(u_n\right)\right)^r} D_i\left(-u_n^-\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n<0\}} \frac{\left|D_i u_n\right|^{p_i}}{\left(1+T_n\left(u_n\right)\right)^r} \mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{(1+n)^r}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n<0\}}\left|D_i u_n\right|^{p_i} \mathrm{d}x \geq 0.
\end{aligned}$$

同理，由 $h_n\left(u_n\right) f_n\geq 0$，且 $-u_n^-\leq 0$，可知 $\int_\Omega h_n\left(u_n\right) f_n\left(-u_n^-\right)\mathrm{d}x\leq 0$。

那么，可得 $D_i u_n^-=0$，在 Ω 中 $u_n^-=0$，因此 $u_n\geq 0$ 几乎处处成立，即方程(2)存在非负分布解。

在证明定理 2.2 前，我们假设[14] $0<\gamma_1<1$，令 u_n 是方程的一个解，则对任意 $k>0$，存在常数 $C>0$ 其值取决于 $k,K_1,K_2,\gamma_1,\gamma_2$ 及 N 使得 $\left|T_k\left(u_n\right)\right|_{W_0^{1,p_i}(\Omega)}\leq C$。

定理 2.2 (正则性)假设 $0<\gamma_1<1$，$\gamma_2\geq 0$ 且 $f\in L^1(\Omega)$ 是非负函数。令 u_n 是方程(2)的解，则存在正常数 C，其值依赖于 $N,|f|_{L^1(\Omega)},\gamma_1,\gamma_2$ 以及 r，使得

$$\left|u_n\right|_{W_0^{1,\eta_i}(\Omega)}\leq C,$$

其中，$\eta_i = p_i \dfrac{N(\overline{p}-r)}{\overline{p}(N-r)}$。

证明 由定义 1.1 知 $G_k(u_n) = u_n - T_k(u_n)$，取 $k=1$ 知 $G_1(u_n) = u_n - T_1(u_n) = \max\{u_n - 1, 0\}$。取 $\varphi = G_1(u_n)$ 作为方程(2)的一个测试函数，可得

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{|D_i u_n|^{p_i-2}D_i u_n}{(1+T_n(u_n))^r}D_i G_1(u_n)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega}h_n(u_n)fG_1(u_n)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

由于 $T_n(u_n)\le u_n$ 得

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n\ge 1\}}\frac{|D_i u_n|^{p_i}}{(1+u_n)^r}\mathrm{d}x \le \int_{\{u_n\ge 1\}} fh_n(u_n)(u_n-1)\,\mathrm{d}x,$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n\ge 1\}}\frac{|D_i u_n|^{p_i}}{(1+u_n)^r}\mathrm{d}x \le C\int_{\{u_n\ge 1\}} fh_n(u_n)u_n\,\mathrm{d}x.$$

由 $0<\gamma_1<1, \gamma_2\ge 0$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\{u_n\ge 1\}} fh_n(u_n)u_n\,\mathrm{d}x &\le K_1\int_{\{u_n\le T_1\}}\frac{fu_n}{u_n^{\gamma_1}} + \max_{t\in[T_1,T_2]}h(t)\int_{\{T_1\le u_n\le T_2\}}fu_n\,\mathrm{d}x + K_2\int_{\{u_n\ge T_2\}}\frac{fu_n}{u_n^{\gamma_2}}\mathrm{d}x \\ &\le K_1\int_{\{u_n\le T_1\}} fT_1^{1-\gamma_1}\,\mathrm{d}x + C|f|_{L^1(\Omega)} + K_2|f|_{L^1(\Omega)} \le C|f|_{L^1(\Omega)}\end{aligned}$$

由 $0<r<\overline{p}-1$ 可知

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n\ge 1\}}\frac{|D_i u_n|^{p_i}}{(1+u_n)^r}\mathrm{d}x \le \int_{\{u_n\ge 1\}}\frac{|D_i u_n|^{p_i}}{u_n^{\,r}}\mathrm{d}x \le C|f|_{L^1(\Omega)},\quad \forall i=1,\cdots,N.$$

取 $\eta_i = \lambda p_i\,(0\le\lambda<1)$，由 Hölder 不等式及 $u_n\ge 1$ 时 $u_n = G_1(u_n)+1$ 得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|D_i G_1(u_n)|^{\eta_i}\,\mathrm{d}x &= \int_{\{u_n\ge 1\}}\frac{|D_i G_1(u_n)|^{\eta_i}}{u_n^{\frac{r\eta_i}{p_i}}}u_n^{\frac{r\eta_i}{p_i}}\,\mathrm{d}x \\ &\le\left(\int_{\{u_n\ge 1\}}\frac{|D_i u_n|^{p_i}}{u_n^r}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\eta_i}{p_i}}\left(\int_{\{u_n\ge 1\}}u_n^{\frac{r\eta_i}{p_i-\eta_i}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_i-\eta_i}{p_i}} \\ &\le C\left(\int_{\Omega}G_1(u_n)^{\frac{r\eta_i}{p_i-\eta_i}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_i-\eta_i}{p_i}}.\end{aligned}$$

因此可得

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\Omega}|D_i G_1(u_n)|^{\eta_i}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\eta_i N}} &\le C\left[\left(\int_{\Omega}G_1(u_n)^{\frac{r\eta_i}{p_i-\eta_i}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_i-\eta_i}{p_i}}\right]^{\frac{1}{\eta_i N}} \\ &= C\left(\int_{\Omega}G_1(u_n)^{\frac{r\eta_i}{p_i-\eta_i}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_i-\eta_i}{p_i}\times\frac{1}{\eta_i N}} \\ &= C\left(\int_{\Omega}G_1(u_n)^{\frac{r\eta_i}{p_i-\eta_i}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_i-\eta_i}{\eta_i}\frac{1}{\overline{p}}}.\end{aligned}$$

于是

$$\left(\int_\Omega G_1(u_n)^{\overline{\eta^*}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\overline{\eta^*}}} \le C\prod_{i=1}^N\left(\int_\Omega \left|D_i G_1(u_n)\right|^{\eta_i}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\eta_i N}} \le C\left(\int_\Omega G_1(u_n)^{\frac{r\eta_i}{p_i-\eta_i}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_i-\eta_i}{\eta_i}\frac{1}{\overline{p}}}.$$

令 $\overline{\eta^*}=\dfrac{\theta\eta_i}{p_i-\eta_i}$，由 $\eta_i=\lambda p_i$，得 $\dfrac{\theta\eta_i}{p_i-\eta_i}=\dfrac{\theta\lambda}{1-\lambda}=\dfrac{N\lambda\overline{p}}{N-\lambda\overline{p}}=\overline{\eta^*}$，因此

$\left(\int_\Omega \left|G_1(u_n)\right|^{\overline{\eta^*}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-\lambda\overline{p}}{N\lambda\overline{p}}} \le C\left(\int_\Omega G_1(u_n)^{\overline{\eta^*}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda\overline{p}}}$。又根据 $N\ge\overline{p}$ 得 $\dfrac{N-\lambda\overline{p}}{N\lambda\overline{p}}=\dfrac{1}{\lambda\overline{p}}-\dfrac{1}{N}\ge\dfrac{1}{\lambda\overline{p}}-\dfrac{1}{\overline{p}}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda\overline{p}}$。

可证得序列 $\{G_1(u_n)\}_n$ 在 $L^{\overline{\eta^*}}(\Omega)$ 中有界。进一步，可知 $\{G_1(u_n)\}_n$ 在 $W_0^{1,\eta_i}(\Omega)$ 中有界，其中

$$\frac{r\lambda}{1-\lambda}=\frac{N\lambda\overline{p}}{N-\lambda\overline{p}} \Rightarrow \lambda=\frac{N(\overline{p}-r)}{\overline{p}(N-r)} \Rightarrow \eta_i=p_i\frac{N(\overline{p}-r)}{\overline{p}(N-r)}.$$

此外，根据 $\{T_1(u_n)\}_n$ 在 $W_0^{1,p_i}(\Omega)$ 中有界。因为 $\eta_i\le p_i$，故 $\{T_1(u_n)\}_n$ 在 $W_0^{1,\eta_i}(\Omega)$ 中亦有界。考虑到 $u_n=G_1(u_n)+T_1(u_n)$，可得 $|u_n|_{W_0^{1,\eta_i}(\Omega)}\le\left|G_1(u_n)\right|_{W_0^{1,\eta_i}(\Omega)}+\left|T_1(u_n)\right|_{W_0^{1,\eta_i}(\Omega)}$。由此定理得证。

在证明若收敛性前，假设 $u_n\rightharpoonup u$ 在 $W_0^{1,\eta_i}(\Omega)$ 中弱收敛，且在 Ω 中几乎处处收敛。$T_k(u_n)\rightharpoonup T_k(u)$ 在 $W_0^{1,p_i}(\Omega)$ 中弱收敛，且在 Ω 中几乎处处收敛。

定理 2.3 (弱收敛) 设 $\{u_n\}_n$ 是方程(3)的解序列，则存在 $\{u_n\}_n$ 的子序列及函数 $u\in W_0^{1,\eta_i}(\Omega)$ 使得

$$D_i u_n \to D_i u.$$

证明 定义集合 $X=\left\{\left|u_n-T_k(u)\right|\le g,|u|\le k\right\}$，取测试函数[12] $\varphi=T_g\left(u_n-T_k(u)\right)$ 代入方程(3)。可得

$$\sum_{i=1}^N\int_\Omega \frac{\left|D_i u_n\right|^{p_i-2}D_i u_n D_i\left[T_g\left(u_n-T_k(u)\right)\right]}{\left(1+T_n(u_n)\right)^r}\mathrm{d}x=\int_\Omega h_n(u_n)fT_g\left(u_n-T_k(u)\right)\mathrm{d}x.$$

由此得

$$\sum_{i=1}^N\int_X \frac{\left|D_i u_n\right|^{p_i-2}D_i u_n D_i\left[T_g\left(u_n-T_k(u)\right)\right]}{\left(1+T_n(u_n)\right)^r}\mathrm{d}x\le\int_X h_n(u_n)fg\mathrm{d}x\le Cg.$$

当 $p_i\le 2$ 时，利用经典不等式 $\left(|\xi|^{p_i-2}\xi-|\eta|^{p_i-2}\eta\right)(\xi-\eta)\le C|\xi-\eta|^{p_i}$，$\forall i=1,\cdots,N$，可推得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N\int_X\frac{\left|D_i\left(u_n-T_k(u)\right)\right|^{p_i}}{(1+u_n)^r}\mathrm{d}x &\le C\sum_{i=1}^N\int_X\frac{\left(\left|D_i u_n\right|^{p_i-2}D_i u_n-\left|D_i T_k(u)\right|^{p_i-2}D_i T_k(u)\right)D_i\left[T_g\left(u_n-T_k(u)\right)\right]}{\left(1+T_n(u_n)\right)^r}\mathrm{d}x\\ &\le Cg-C\sum_{i=1}^N\int_X\frac{\left|D_i T_k(u)\right|^{p_i-2}D_i T_k(u)D_i\left[T_g\left(u_n-T_k(u)\right)\right]}{\left(1+T_n(u_n)\right)^r}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 后可得 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^N\int_X\dfrac{\left|D_i\left(u_n-T_k(u)\right)\right|^{p_i}}{(1+u_n)^r}\mathrm{d}x\le Cg$。由 $\left|u_n-T_k(u_n)\right|\le g$ 及 $|u|\le k$，可知 $u_n\le T_k(u)+g\le k+g$，故 $(1+u_n)^r\le(1+k+g)^r$。因此可得

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^N\int_X\left|D_i\left(u_n-T_k(u)\right)\right|^{p_i}\mathrm{d}x\le Cg(1+u_n)^r\le Cg(1+k+g)^r.$$

根据定理 2.2，序列 $\{u_n\}_n$ 在 $W_0^{1,\eta_i}(\Omega)$ 上一致有界，对任意 $i=1,\cdots,N$，取 $\delta_i\in(1,\eta_i)$，则

$$\int_\Omega\left|D_i(u_n-u)\right|^{\delta_i}\mathrm{d}x\le\int_{\{|u_n-u|\le g,|u|\le k\}}\left|D_i(u_n-u)\right|^{\delta_i}\mathrm{d}x+\int_{\{|u_n-u|>g\}}\left|D_i(u_n-u)\right|^{\delta_i}\mathrm{d}x+\int_{\{|u_n-u|\le g,|u|>k\}}\left|D_i(u_n-u)\right|^{\delta_i}\mathrm{d}x.$$

应用 Hölder 不等式及 $\{u_n\}_n\in W_0^{1,\eta_i}(\Omega)$ 的一致有界性，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|D_i(u_n-u)\right|^{\delta_i}\mathrm{d}x\le&\left(\int_{\{|u_n-u|\le g,|u|\le k\}}\left|D_i(u_n-u)\right|^{p_i}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{\delta_i}{p_i}}|\Omega|^{1-\frac{\delta_i}{p_i}}\\&+C\left[\operatorname{meas}\{|u_n-u|>g\}\right]^{1-\frac{\delta_i}{\eta_i}}\\&+C\left[\operatorname{meas}\{|u_n-u|\le g,|u|>k\}\right]^{1-\frac{\delta_i}{\eta_i}}.\end{aligned}$$

因此可得

$$\limsup_{g\to0}\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega\left|D_i(u_n-u)\right|^{\delta_i}\mathrm{d}x\le C\left[\operatorname{meas}\{|u|>k\}\right]^{1-\frac{\delta_i}{\eta_i}}.$$

令 $k\to+\infty$，由于 $\operatorname{meas}\{|u|>k\}\to0$，故 $\int_\Omega\left|D_i(u_n-u)\right|^{\delta_i}\to0$。

由此可知，D_iu_n 几乎处处收敛于 D_iu，定理得证。

至此，通过构建“近似正则化－先验估计－弱收敛过渡”的分析框架，结合截断测试函数、Hölder 不等式、各向异性 Sobolev 嵌入定理及变分法思想，成功实现了对具有退化主部与低可积性 L^1 源项的非强制各向异性拟线性椭圆方程解的存在性和正则性证明。未来可尝试扩展方程结构，可针对更精细的函数空间展开研究，为解的正则性提供更全面的研究，进一步丰富非强制各向异性椭圆方程的研究范畴。

基金项目

本文在中央高校基本科研业务费专项资金项目(31920250078)资助下完成。

参考文献

[1] 廖为, 蒲志林. 一类拟线性椭圆型方程 Dirichlet 问题正解的存在性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2007(1): 31-35.

[2] 李周欣, 沈尧天, 姚仰新. 自然增长条件下拟线性椭圆型方程解的存在性[J]. 数学学报, 2009, 52(4): 785-798.

[3] 李国发, 刘海鸿. 一类椭圆混合边值问题无穷多解的存在性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2013, 36(2): 233-235.

[4] 廖为, 蒲志林. 拟线性椭圆型方程 Dirichlet 问题非平凡弱解的存在性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2009, 32(6): 763-767.

[5] 彭艳芳, 徐彬, 万畅. 一类拟线性椭圆方程的多解性[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2007(1): 1-4.

[6] 张申贵. 含 Hardy 位势的局部超线性 p-Laplacian 方程多重解的存在性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2013, 36(6): 836-840.

[7] 卢建珠, 郭信康. 临界增长拟线性椭圆型方程非平凡解的存在性[J]. 广西大学学报(自然科学版), 1992(3): 15-22.

[8] Alvino, A., Boccardo, L., Ferone, V., Orsina, L. and Trombetti, G. (2003) Existence Results for Nonlinear Elliptic Equations with Degenerate Coercivity. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **182**, 53-79. https://doi.org/10.1007/s10231-002-0056-y

[9] Marah, A. and Hicham, R. (2021) On Nonlinear Elliptic Equations with Singular Lower Order Term. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **58**, 385-401.

[10] Khelifi, H. (2022) Existence and Regularity for Solution to a Degenerate Problem with Singular Gradient Lower Order

Term. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, **8**, 310-327. https://doi.org/10.2478/mjpaa-2022-0022

[11] Huang, S. and Hajaiej, H. (2025) Lazer-Mckenna Type Problem Involving Mixed Local and Nonlocal Elliptic Operators. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, **32**, Article No. 6. https://doi.org/10.1007/s00030-024-01007-5

[12] Khelifi, H. (2024) Anisotropic Degenerate Elliptic Problem with Singular Gradient Lower Order Term. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **17**, 149-174. https://doi.org/10.1007/s40574-023-00395-3

[13] Arcoya, D., Barile, S. and Martínez-Aparicio, P.J. (2009) Singular Quasilinear Equations with Quadratic Growth in the Gradient without Sign Condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **350**, 401-408. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.09.073

[14] Zouatini, M.A., Khelifi, H. and Mokhtari, F. (2023) Anisotropic Degenerate Elliptic Problem with a Singular Nonlinearity. *Advances in Operator Theory*, **8**, Article No. 13. https://doi.org/10.1007/s43036-022-00240-y