Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(11), 128-132
Published Online November 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1411469

具弧容量约束交通均衡流的存在性研究

周大琼

重庆城市职业学院通识教育学院，重庆

收稿日期：2025年10月11日；录用日期：2025年11月4日；发布日期：2025年11月11日

摘 要

本文在概述Wardrop经典交通均衡原理及均衡流存在性基础判定方法的基础上，重点研究具弧容量约束场景下交通均衡流的存在性问题。通过将具弧容量约束的均衡条件转化为变分不等式问题，结合Fan-Browder不动点定理与紧凸集拓扑性质，证明了具弧容量约束交通均流存在性原理。

关键词

具弧容量约束，饱和路径，变分不等式，Fan-Browder不动点定理

Existence Research on Traffic Equilibrium Flow with Arc Capacity Constraints

Daqiong Zhou

College of General Education, Chongqing City Vocational College, Chongqing

Received: October 11, 2025; accepted: November 4, 2025; published: November 11, 2025

Abstract

Based on an overview of Wardrop's classic traffic equilibrium principle and the basic determination methods for the existence of equilibrium flow, this paper focuses on studying the existence problem of traffic equilibrium flow under the scenario with arc capacity constraints. By transforming the equilibrium conditions with arc capacity constraints into a variational inequality problem, and combining the Fan-Browder fixed point theorem with the topological properties of compact convex sets, the existence principle of traffic equilibrium flow with arc capacity constraints is proved.

Keywords

Arc Capacity Constraint, Saturated Path, Variational Inequality, Fan-Browder Fixed Point Theorem

文章引用: 周大琼. 具弧容量约束交通均衡流的存在性研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(11): 128-132.
DOI: 10.12677/aam.2025.1411469

1. 引言

近年来，随着城市机动车保有量的持续攀升，道路交通拥堵问题日益加剧，不仅严重影响城市运行效率，更显著增加了驾车人的出行时间与经济成本。在此背景下，构建适配城市路网特征的数学模型，成为科学缓解拥堵、优化流量分配的关键。然而，经典的 Wardrop 交通均衡模型源于高速公路场景，其核心设计未充分考虑城市道路的复杂约束，在解决城市拥堵问题时存在明显局限性——该模型侧重单一路径流量分配，未纳入路段(弧)通行容量与多路径关联特性，难以精准刻画城市路网中“路段饱和－路径连锁拥堵”的实际规律。为此，林志等人针对这一局限展开改进研究，通过在模型中明确引入“路径－弧”关联结构与弧容量约束条件，成功将经典 Wardrop 模型推广至具弧容量约束的交通均衡领域，为城市交通拥堵的量化分析与解决方案设计提供了更贴合实际的理论工具。

为解决交通均衡流的存在性问题，学者们借助变分不等式与不动点定理，先将 Wardrop 均衡条件转化为变分不等式，再通过不动点定理证明该不等式有解，以此奠定存在性判定的理论基础。本文结合具弧容量约束模型，基于上述方法分析了均衡流存在的条件。

2. 具弧容量约束交通均衡问题

具弧容量约束交通均衡问题适配性广泛，即涵盖交通均衡的核心理论属性，又可直接服务于路段容量管控、拥堵治理等实际需求，具备典型性及实际研究价值。

2.1. 具弧容量约束交通网络介绍

在交通网络中，核心要素如下：V 为节点集合，E 为有向弧的集合，W 为 OD 点对(起点/终点)集合，对任何 $\omega\in W$，P_ω 为 OD 点对 ω 的路径集合，记 $K=\cup_{\omega\in W}P_\omega$，$m=|k|$。$D=(d_\omega)_{\omega\in w}$ 为需求向量，其中 $d_\omega(>0)$ 为 OD 点对 ω 的交通需求量，对任何弧 $\partial\in E$，$x_\partial\in R^+=\{z\in R:z\geq 0\}$ 为弧上流量。对任何 $\omega\in W$，$k\in P_\omega$，用 $x_k(\geq 0)$ 表示第 k 条路径上的交通流量，程 $x=(x_k)\in R_+^m$ 为路径流，简称流。易知，对弧 $\partial\in E$，$x_\partial=\sum_{\omega\in W}\sum_{k\in P_{..}}\delta_{\partial k}x_k$，当弧 ∂ 属于路径 k 时，$\delta_{\partial\mathrm{k}}=1$，当弧 ∂ 不属于路径 k 时，$\delta_{\partial\mathrm{k}}=0$。用 $C=(c_\partial)_{\partial\in E}$ 表示容量向量，其中 $C_\partial(>0)$ 表示弧 ∂ 上交通流的容量。

对任意弧 $\partial\in E$，其流量需满足容量约束 $0\leq x_\partial\leq c_\partial$（$c_\partial$ 为弧 ∂ 的最大通行容量)；同时，对任意 OD 点对 $\omega\in W$，路径流 x 需满足需求约束 $\sum_{k\in P_{..}}x_k=d_\omega$（$d_\omega$ 为 OD 点对 ω 的出行需求量)，我们将同时满足这两类约束的路径流 x 称为可行路径流(简称可行流)。

可行流集合用 $A=\{x\in R_+^{\mathrm{m}}:\forall\omega\in W,\sum_{k\in P_{..}}x_k=d_\omega\text{且}\forall\partial\in E,c_\partial\geq x_\partial\geq 0\}$ 表示。在本文中，对任何 $\omega\in W$，假设交通需求 d_ω 是不变的，并且 $A\neq\varphi$。易知，集合 A 是一个紧凸集。对 $\partial\in E$，用 $t_\partial=t_\partial(x_\partial)=t_\partial(x)\in R^+$ 表示弧 ∂ 上的成本，对任何 $\omega\in W$，$k\in P_\omega$，假定路径 k 上的成本 t_k 是路径上所有弧的成本之和，即 $t_k(x)=\sum_{\partial\in E}\delta_{\partial k}t_\partial(x)$。交通网络一般表示为 $\aleph=\{V,E,W,D,C\}$。

2.2. 交通均衡原则及 Fan-Browder 不动点定理

出行者在选择出行方案时，往往同时兼顾“耗时短、成本低、舒适度高”等多重目标，呈现明显的多目标决策特征；而城市路网由多段有容量限制的路段(弧)组成，叠加城市规模不断扩张的影响，交通拥堵问题愈发突出。基于此，为有效治理城市交通拥堵，需将经典交通均衡原则拓展至具弧容量约束的多

目标交通均衡领域。

定义2.2.1 (Wardrop交通均衡原则) [1]：可行流 $x \in A$ 被称为均衡流，只要满足

$$\forall \omega \in W,\ \forall k, j \in P_\omega, t_k(x) - t_j(x) > 0 \Rightarrow x_k = 0$$

均衡流 x 被称为交通均衡问题的一个解。

定义2.2.2 [2]：对可行流 $x \in A$，$\partial \in E$，

1) 如果 $x_\partial = c_\partial$，则 ∂ 是 x 的一条饱和弧，否则，∂ 是 x 的一条非饱和弧；

2) 对 OD 点对 $\omega \in W$，路径 $k \in P_\omega$，如 x 的一条饱和弧属于路径 k，则路径 k 称为 x 的一条饱和路径，否 则称路径 k 为 x 的一条非饱和路径。

受限于经典交通均衡模型在“未考虑弧容量约束”与“单目标优化”的双重局限，林志等人通过深化路径与弧的关联分析，补充多目标优化维度(兼顾出行时间、经济成本与出行舒适度)，成功将经典模型推广至能适配复杂城市路网的具弧容量约束多目标交通均衡模型。

定义2.2.3 (具弧容量约束交通均衡原则) [3]：流 $x \in A$ 被称为具弧容量约束的交通均衡流，只要满足如下条件：

$$\forall \omega \in W,\ \forall k, j \in P_\omega, t_k(x) - t_j(x) \in \operatorname{int} R_+^r \tag{1}$$

或者 j 是流 x 的一条饱和路径。

把流 x 也称为具弧容量约束的交通均衡问题的解。

一般情况下用 $\Gamma = \{\aleph, A, T\}$ 表示具弧容量约束的交通均衡问题的解。

不动点定理为“带约束的多目标优化问题”解的存在性提供理论依据，在交通领域，它解决了“多目标具弧容量约束均衡流是否存在”的核心问题。

下面的引理是Fan-Browder不动点定理的等价形式。

引理2.2.1 [4]-[6]：K 是Hausdorff拓扑向量空间 X 的非空紧凸子集，假设 $H: K \to 2^k \cup \{\Phi\}$ 是满足下列条件的集值映射：

1) 对任何 $x \in k$，$H(x)$ 是凸的；

2) 对任何 $x \in k$，$x \notin H(x)$；

3) 对任何 $y \in k$，$H^{-1}(y) = \{x \in k : y \in H(x)\}$ 是开集。

则存在 $\bar{x} \in K$ 使得 $H(\bar{x}) = \Phi$。

3. 主要结果

变分不等式是研究交通均衡流存在性的核心数学工具。它的核心作用是将交通均衡的“行为准则”转化为严格的数学条件，进而通过存在性理论，证明交通均衡流的存在性。

定理3.1：在可行流集合中，寻找满足 $x \in A$ 的流量向量 x；若该 x 是下述变分不等式问题的解，即对任意 $y \in A$，均有 $\langle T(x), y - x \rangle \notin -\operatorname{int} R_+^r$，$\forall y \in A$ 则称可行流 $x \in A$ 为具弧容量约束的多目标交通均衡流。

证明：假设 $x \in A$ 是上述变分不等式问题的解，那么对

$$\forall \omega \in W,\ \forall k, j \in P_\omega,\ T_k(x) - T_j(x) \in \operatorname{int} R_+^r \tag{2}$$

现需证明：如果 j 是一条非饱和路径，$x_k = 0$。记 $P_j = \{\partial \in E : 弧\partial属于路径j\}$。

用反证法，如果 $x_k \neq 0$，那么 $x_k > 0$，则：$\Delta = \min\{\min(c_\partial - x_\partial), x_k > 0\}$ 令

$$y = (y_l) = \begin{cases} x_l, & l \neq k, j \\ x_k - \Delta, & l = k \\ x_j + \Delta, & l = j \end{cases} \tag{3}$$

显然对 $y \in A$，于是

$$T(x)(y-x)=\sum_{\omega\in W}\sum_{l\in P_\omega}(y_l-x_l)T_l(x)=(y_k-x_k)T_k(x)+(y_j-x_j)T_j(x)=\Delta(T_j(x)-T_k(x))\in -\mathrm{int}\,R_+^r,$$

矛盾，证毕。

针对具有弧容量约束的多目标交通均衡流问题，我们可得到如下关于其均衡流存在性的结论。

定理3.2：对于具有弧容量约束的多目标交通均衡问题 $\Gamma=\{\aleph,A,T\}$，若满足以下条件：对任意起始点对 $\omega\in W$，任意路径 $l\in P_\omega$ (其中 P_ω 表示连接起始点对 ω 的所有路径集合)，向量值函数 $T(x)$ 在可行流集合 A 上连续，则该均衡问题 Γ 存在解。

证明：构造一个变分不等式，找 $x\in A$ 使得

$$\langle T(x),y-x\rangle \notin -\mathrm{int}\,R_+^r, y\in A. \tag{4}$$

由定理 3.1，需证明上述变分不等式问题存在一个解。

定义集值映射

$$H:A\to 2^{A\cup\{\Phi\}},H(x)=\{y\in A:\langle T(x),y-x\rangle\in -\mathrm{int}\,R_+^r\}. \tag{5}$$

证明：

1) $\forall y^1,y^2\in H(x),\lambda\in[0,1]$，因 A 凸，故 $\lambda y^1+(1-\lambda)y^2\in A$，并且有

$$T(x)\{[\lambda y^1+(1-\lambda)y^2]-x\}=\lambda T(x)(y^1-x)+(1-\lambda)T(x)(y^2-x)\in -\mathrm{int}\,R_+^r$$

得 $\lambda y^1+(1-\lambda)y^2\in H(x)$，即 $H(x)$ 为凸，显然 $x\notin H(x)$。

2) 对 $y\in H(x)$，有 $\langle T(x),y-x\rangle\notin -\mathrm{int}\,R_+^r, y\in A$，故存在 $\varepsilon>0$，使

$$\langle T(x),y-x\rangle+\varepsilon\subset -\mathrm{int}\,R_+^r. \tag{6}$$

因对任何 $\partial\in E$，$t(\cdot)$ 是在 A 上连续，那么 $H(\cdot)$ 在 A 上连续，因此 $\langle T(x),y-x\rangle$ 在 A 上连续，于是，存在 x 的领域 $u(x)$，满足 $x'\in u(x)$ 时，有

$$\langle T(x'),y-x'\rangle\in\langle T(x),y-x\rangle+\varepsilon\subset -\mathrm{int}\,R_+^r.$$

即

$$u(x)\subset H^{-1}(x)=\{x\in A:\langle T(x),y-x\rangle\in -\mathrm{int}\,R_+^r\} \tag{7}$$

说明 $H^{-1}(y)$ 是开集。

由引理2.2.1，存在 $\overline{x}\in A$，使得 $H(\overline{x})=\Phi$。即 Γ 存在一个解。

证毕。

4. 小结

在具弧容量约束交通均衡流的存在性分析中，首先将交通均衡的行为准则转化为对应的变分不等式，再通过验证可行流集合的基本特性与出行成本函数的连续性，依托变分不等式解的存在性定理，证明了具弧容量约束交通均衡流的存在性，同时也为实现交通网络的优化提供了关键支撑，确保了相关应用的合理性与可行性。

本文的具弧容量约束交通均衡流的存在性研究，相比以往研究的核心优越性在于：突破了经典模型“无容量约束”的理想假设，将现实交通中路段的物理容量限制纳入可行流集合，使存在性结论更贴合实际网络场景；同时拓展了理论适用范围，能兼容多目标成本函数(如时间、费用)与多类现实约束，且无

需依赖“成本函数严格凸”等强假设，仅通过变分不等式与Fan-Browder不动点定理即可证明存在性，普适性更强；此外，其结论还为均衡流数值计算提供了关键前提，确保计算结果既满足容量限制又具备现实可行性，有效衔接了理论研究与实际交通规划应用，填补了“理想模型”与“落地实践”间的断层。

基金项目

本文系重庆城市职业学院 2024 年科研项目“具弧容量约束交通均衡流存在性研究”(项目编号：XJKJ 202402008)的阶段性成果。

参考文献

[1] Wardrop, J.G. (1952) Road Paper. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, **1**, 325-362. https://doi.org/10.1680/ipeds.1952.11259

[2] Lin, Z., Zhou, D., Peng, Z. and Wang, J. (2019) Existence and Generic Stability of Solutions for Multiclass Multicriteria Traffic Equilibrium Problems with Capacity Constraints of Arcs. *Optimization*, **68**, 2089-2097. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1658759

[3] Lin, Z. (2010) The Study of Traffic Equilibrium Problems with Capacity Constraints of Arcs. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 2280-2284. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.07.002

[4] Fan, K. (1961) A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem. *Mathematische Annalen*, **142**, 305-310. https://doi.org/10.1007/bf01353421

[5] Browder, F.E. (1968) The Fixed Point Theory of Multi-Valued Mappings in Topological Vector Spaces. *Mathematische Annalen*, **177**, 283-301. https://doi.org/10.1007/bf01350721

[6] 徐阳栋, 安权英. 带有弧容量约束的鲁棒交通网络均衡问题的计算[J]. 系统科学与数学, 2020, 24(8): 335-349.