

潜在稳定的Hessenberg符号模式

谷美璇

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年10月7日; 录用日期: 2025年11月1日; 发布日期: 2025年11月11日

摘 要

符号模式矩阵(简称符号模式)是组合矩阵论的一个重要研究对象, 主要研究与矩阵中元素符号有关而与元素的数值无关的组合性质。针对符号模式的潜在稳定问题, 基于Hessenberg矩阵的结构特点, 考虑了Hessenberg符号模式。利用正确符号嵌套与潜在稳定之间的联系, 给出了3阶潜在稳定的Hessenberg符号模式以及一类特殊的 n 阶潜在稳定的Hessenberg符号模式。

关键词

Hessenberg符号模式, 符号模式, 潜在稳定, 允许正确符号嵌套

Hessenberg Sign Patterns of Potentially Stable

Meixuan Gu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: October 7, 2025; accepted: November 1, 2025; published: November 11, 2025

Abstract

Sign pattern matrices (short for sign patterns) is an important research subject in combinatorial matrix theory, which are related only to signs of their entries and not to the value of entries. Addressing the Potentially Stable problem of sign patterns, this Hessenberg sign patterns based on the structural characteristics of Hessenberg. By the connection between allowing a properly signed nest and Potentially Stable, we investigated 3-order potentially stable Hessenberg sign patterns and a special class of n -order potentially stable Hessenberg sign patterns.

Keywords

Hessenberg Sign Pattern, Sign Pattern, Potentially Stable, Allow a Properly Signed Nest



1. 引言

符号模式矩阵是组合矩阵论中的热点课题，相关研究有助于推动组合数学的发展。它在经济学、生物学以及化学等领域有着十分重要的应用。符号模式的概念最早是由 Samuelson [1] 提出。Eschenbach [2] 给出符号模式允许某个性质以及符号模式要求某种性质两类重要问题。潜在稳定性有很多问题尚未解决，学者们给出了相关研究。Jeffries [3] 等首次给出潜在稳定符号模式的定义。Johnson [4] 等引入了正确符号嵌套的概念，并证明了允许正确符号嵌套的符号模式是潜在稳定的。高玉斌和李炯生 [5] 给出了潜在稳定的星符号模式的充要条件。Grundy [6] 等给出了从低阶潜在稳定构造高阶潜在稳定的方法。

Hessenberg 矩阵的结构非常特殊，在求解特征值问题、量子力学、信号处理等方面有着重要作用。Britz [7] 等给出了一类特殊的 Hessenberg 符号模式，并研究了此类 Hessenberg 符号模式以及它的超模式的谱任意性质。Bingham [8] 等给出了一类具体的偶数圈的 Hessenberg 符号模式，证明了此类 Hessenberg 符号模式的潜在幂零和谱任意的性质。Bodine 和 McDonald [9] 研究了特殊的 Hessenberg 符号模式在有限域上的谱任意性质。本文进一步研究了 Hessenberg 符号模式的潜在稳定性。

2. 预备知识

定义 1.1 [1]: 符号模式矩阵是指元素取自于集合 $\{+, -, 0\}$ 的矩阵，简称符号模式。

定义 1.2 [1]: 设 M 为任意实矩阵， $\text{sgn}(M)$ 表示元素是 M 的对应元素的符号构成的符号模式矩阵， $\text{sgn}(M)$ 称作实矩阵 M 的符号模式。设 A 是 n 阶符号模式，则 A 的等价类定义为

$$Q(A) = \{M | \text{sgn}(M) = A\}.$$

定义 1.3 [3]: 若 M 的所有特征值均有负实部，则称实矩阵 M 是稳定(stable)的。

定义 1.4 [3]: 设 A 是符号模式，若存在稳定矩阵 $M \in Q(A)$ ，则称 A 是潜在稳定(potentially stable)的。

定义 1.5 [5]: 设 A 是符号模式，若存在实矩阵 $M \in Q(A)$ ，且存在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的置换 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 使得对于所有 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，有 $\text{sgn det } M[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] = (-1)^k$ ，则称 A 是允许正确符号嵌套(allow properly signed nest)。

引理 1.6 [4]: 若符号模式 A 允许正确符号嵌套，则 A 是潜在稳定的。

3. 潜在稳定的 3 阶 Hessenberg 符号模式

下面主要考虑 3 阶 Hessenberg 符号模式正确符号嵌套。

定义 2.1: 符号模式形如

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n1} & & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_{11} \in \{+, -\}$, $\alpha_{i-1,i} \in \{+, -\}$ ($i = 2, 3, \dots, n$), $\alpha_{ii} \in \{0, +, -\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，其余位置元素全为 0，称 A 是

Hessenberg 符号模式。

定理 2.2: 设 A 是 3 阶 Hessenberg 符号模式, 则 A 允许正确符号嵌套当且仅当 A 置换相似于下列符号模式

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ - & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & - \\ + & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 \\ + & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

其中 $* \in \{0, -\}$ 且至少有一个非零。

证明: 设 3 阶 Hessenberg 符号模式为

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_{ii} \in \{+, -\}, \alpha_{i-1,i} \in \{+, -\} (i=2,3), \alpha_{ii} \in \{0, +, -\} (i=1,2,3)$ 。

必要性。

设 A 允许正确符号嵌套, 则由定义 1.5 可知, 存在实矩阵 $M \in Q(A)$, $M = (a_{ij})$, 且存在 $\{1,2,3\}$ 的置换 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 使得 $\text{sgn det } M[\{\alpha_1\}] = -1, \text{sgn det } M[\{\alpha_1, \alpha_2\}] = 1, \text{sgn det } M[\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}] = -1$ 。

若 $\text{sgn det } M[\{\alpha_1\}] = -1$, 则 a_{11}, a_{22}, a_{33} 至少存在一个为负。

若 $\text{sgn det } M[\{\alpha_1, \alpha_2\}] = 1$, 则 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, a_{11}a_{33}, a_{22}a_{33}$ 中至少有一个为大于 0。若满足此条件, 显然有 a_{11}, a_{22}, a_{33} 非正。

若 $\text{sgn det } M[\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}] = -1$, 则 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} < 0$ 。

情况 1: 当 A 的对角线元素有一个为负

若 $\alpha_{11} = -, \alpha_{22} = 0, \alpha_{33} = 0$, 则 $a_{11} < 0, a_{22} = 0, a_{33} = 0$ 。所以 $a_{11}a_{22} = a_{11}a_{33} = a_{22}a_{33} = 0$, 可知 $a_{12}a_{21} < 0$ 。当 $a_{12} > 0, a_{21} < 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} < 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} > 0$; 当 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} > 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} < 0$ 。

若 $\alpha_{11} = 0, \alpha_{22} = -, \alpha_{33} = 0$, 则 $a_{11} = 0, a_{22} < 0, a_{33} = 0$ 。所以 $a_{11}a_{22} = a_{11}a_{33} = a_{22}a_{33} = 0$, 可知 $a_{12}a_{21} < 0$ 。当 $a_{12} > 0, a_{21} < 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} < 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} > 0$; 当 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} > 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} < 0$ 。

若 $\alpha_{11} = 0, \alpha_{22} = 0, \alpha_{33} = -$, 则 $a_{11} = 0, a_{22} = 0, a_{33} < 0$ 。所以 $a_{11}a_{22} = a_{11}a_{33} = a_{22}a_{33} = 0$, 可知 $a_{12}a_{21} < 0$ 。当 $a_{12} > 0, a_{21} < 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} < 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} > 0$; 当 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} > 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} < 0$ 。

情况 2: 当 A 的对角线元素有两个为负

若 $\alpha_{11} = -, \alpha_{22} = -, \alpha_{33} = 0$, 则 $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} = 0$ 。所以 $a_{11}a_{22} > 0, a_{11}a_{33} = a_{22}a_{33} = 0$, 可知 $a_{12}a_{21} < 0$ 。当 $a_{12} > 0, a_{21} < 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} < 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} > 0$; 当 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} > 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} < 0$ 。

若 $\alpha_{11} = -, \alpha_{22} = 0, \alpha_{33} = -$, 则 $a_{11} < 0, a_{22} = 0, a_{33} < 0$ 。所以 $a_{11}a_{22} = a_{22}a_{33} = 0, a_{11}a_{33} > 0$ 。由三阶主子式符号可知 $a_{12}a_{23}a_{31} < 0, a_{12}a_{21}a_{33} > 0$, 所以有 $a_{12}a_{21} < 0$ 。当 $a_{12} > 0, a_{21} < 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} < 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} > 0$; 当 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} > 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} < 0$ 。

若 $\alpha_{11} = 0, \alpha_{22} = -, \alpha_{33} = -$, 则 $a_{11} = 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0$ 。所以 $a_{11}a_{22} = a_{11}a_{33} = 0, a_{22}a_{33} > 0$ 。由三阶主子式符号可知 $a_{12}a_{23}a_{31} < 0, a_{12}a_{21}a_{33} > 0$, 所以有 $a_{12}a_{21} < 0$ 。当 $a_{12} > 0, a_{21} < 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} < 0$ 或

$a_{23} < 0, a_{31} > 0$; 当 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} > 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} < 0$ 。

情况 3: 当 A 的对角线元素均为负

$\alpha_{11} = -, \alpha_{22} = -, \alpha_{33} = -$, 则 $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0$ 。所以 $a_{11}a_{22} > 0, a_{11}a_{33} > 0, a_{22}a_{33} > 0$ 。由三阶主子式符号可知 $a_{12}a_{23}a_{31} < 0, a_{12}a_{21}a_{33} > 0$, 所以有 $a_{12}a_{21} < 0$ 。当 $a_{12} > 0, a_{21} < 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} < 0$ 或

$a_{23} < 0, a_{31} > 0$; 当 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$, 可知 $a_{23} > 0, a_{31} > 0$ 或 $a_{23} < 0, a_{31} < 0$ 。

由上述三种情况分析可知, 在任意情况下均有 $a_{12}a_{21} < 0$ 。当 $a_{12} > 0$ 时, $a_{23}a_{31} < 0$; 当 $a_{12} < 0$ 时, $a_{23}a_{31} > 0$ 。

综上, 满足允许正确符号嵌套的 Hessenberg 符号模式等价于 S ,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ - & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & - \\ + & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 \\ + & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix} \right\}。$$

其中 $* \in \{0, -\}$ 且至少有一个非零。

充分性。

设实矩阵 $M \in Q(S)$, $M = (a_{ij})$, 存在 M , 使得

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 0 \\ -1 & a_{22} & 1 \\ -1 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 0 \\ -1 & a_{22} & -1 \\ 1 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & -1 & 0 \\ 1 & a_{22} & 1 \\ 1 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & -1 & 0 \\ 1 & a_{22} & -1 \\ -1 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \right\}$$

其中 $a_{ii} \in \{0, -1\}, i=1, 2, 3$ 且至少有一个非零。

S 中任意一个 Hessenberg 符号模式, 显然满足存在 $\{1, 2, 3\}$ 的置换 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 使得

$$\operatorname{sgn} \det M[\{\alpha_1\}] = -1, \operatorname{sgn} \det M[\{\alpha_1, \alpha_2\}] = 1, \operatorname{sgn} \det M[\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}] = -1。$$

所以 S 中的符号模式均为允许正确符号嵌套。

推论 2.3: S 中的符号模式是潜在稳定的。

4. Hessenberg 符号模式 H_n

将低阶 Hessenberg 符号模式推广到 n 阶 Hessenberg 符号模式具有理论意义, 能够对更高维度的问题进行解决。但 n 阶符号模式种类较多, 需要进行分类研究。由于符号模式矩阵对角线全为负在一定条件下有助于判断其稳定性。所以为研究对角线任意的情况, 本文首先研究对角线全为负, 次对角线全为正的 Hessenberg 符号模式。

下面主要考虑特殊的 n 阶 Hessenberg 符号模式, 讨论其是否潜在稳定。

设 $n \geq 2$, 考虑 n 阶 Hessenberg 符号模式

$$H_n = \begin{pmatrix} - & + & & & \\ - & - & + & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ - & & & - & + \\ - & & & & - \end{pmatrix}。$$

定理 3.1: 对于 $n \geq 2$, 符号模式 H_n 是潜在稳定的。

证明: 存在 $M_n \in Q(H_n)$, 令

$$M_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ -1 & -1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -1 & & & -1 & 1 \\ -1 & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

由行列式计算公式, 显然

$$\det M_n = (-1)^n \times n,$$

即 $\operatorname{sgn} \det M_n = (-1)^n$. 满足 $\operatorname{sgn} \det M_n [\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}] = (-1)^k$, 证得 H_n 是允许正确符号嵌套. 由引理 1.6, 可知 H_n 是潜在稳定的.

证毕.

下面将对角线全为负推广到对角线存在零元素.

由定理 3.1 可知以下推论.

推论 3.2: 对于 $n \geq 2$, 若 H_n 的对角线元素 $\alpha_{ii} \in \{0, -\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且零元素个数不超过 $n-1$, 将此时 Hessenberg 符号模式记作 H'_n , 则 H'_n 是潜在稳定的.

本文仅考虑了次对角线符号相同的 n 阶 Hessenberg 符号模式, 次对角线符号任意的 n 阶 Hessenberg 符号模式有待研究.

5. 总结

Hessenberg 符号模式潜在稳定的性质有助于理解在特定符号模式下矩阵特征值的分布规律. 潜在稳定的 Hessenberg 符号模式, 其特征值实部均为负数, 这能为特征值的估计和计算提供新方法和思路, 进一步完善矩阵特征值理论. 本文基于 Hessenberg 符号模式的结构特点, 考虑了 Hessenberg 符号模式是否潜在稳定. 利用符号嵌套与潜在稳定的关系得出 3 阶 Hessenberg 符号模式的充要条件和一类特殊的潜在稳定的 Hessenberg 符号模式. 这种研究方法在符号模式理论中比较新颖. 本文的研究作为符号模式允许和要求某个性质以及 Hessenberg 符号模式的研究一定程度上提供了新思路, 具有借鉴意义.

参考文献

- [1] Samuelson, P.A. (1947) Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press.
- [2] Eschenbach, C.A. (1987) Eigenvalue Classification in Qualitative Matrix Analysis. Clemson University.
- [3] Jeffries, C., Klee, V. and Van Den Driessche, P. (1977) When Is a Matrix Sign Stable? *Canadian Journal of Mathematics*, **29**, 315-326. <https://doi.org/10.4153/cjm-1977-035-3>
- [4] Johnson, C.R., Maybee, J.S., Olesky, D.D., et al. (1997) Nested Sequences of Principal Minors and Potential Stability. *Linear Algebra and its Applications*, **262**, 243-257. [https://doi.org/10.1016/s0024-3795\(96\)00511-3](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(96)00511-3)
- [5] Gao, Y.B. and Li, J.S. (2001) On the Potential Stability of Star Sign Pattern Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **327**, 61-68. [https://doi.org/10.1016/s0024-3795\(00\)00329-3](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(00)00329-3)
- [6] Grundy, D.A., Olesky, D.D. and van den Driessche, P. (2012) Constructions for Potentially Stable Sign Patterns. *Linear Algebra and Its Applications*, **436**, 4473-4488. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.08.011>
- [7] Britz, T., McDonald, J.J., Olesky, D.D. and van den Driessche, P. (2004) Minimal Spectrally Arbitrary Sign Patterns. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **26**, 257-271. <https://doi.org/10.1137/s0895479803432514>
- [8] Bingham, B.D., Olesky, D.D. and van den Driessche, P. (2007) Potentially Nilpotent and Spectrally Arbitrary Even Cycle Sign Patterns. *Linear Algebra and Its Applications*, **421**, 24-44. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.10.001>
- [9] Bodine, E.J. and McDonald, J.J. (2012) Spectrally Arbitrary Patterns over Finite Fields. *Linear and Multilinear Algebra*, **60**, 285-299. <https://doi.org/10.1080/03081087.2011.591395>