

一类二维Keller-Segel系统整体解的存在性

李鉴峰, 韩永杰

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年11月16日; 录用日期: 2025年12月9日; 发布日期: 2025年12月19日

摘要

该文研究一类Keller-Segel方程组的Cauchy问题:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(\nabla u - \chi u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty), \\ \kappa v_t = \Delta v - \lambda v + u, & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty), \text{ 其中 } \kappa \geq 0, \chi > 1, \lambda > 0, \text{ 且} \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2)$, 通过构造更一般的能量泛函和能量不等式, 证明得到若细

胞或细菌的初始质量满足 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0 dx < \min \left\{ \frac{8\pi}{\chi}, \frac{1}{2 \left(\frac{\kappa(\sqrt{\chi}-1)^2}{4\varepsilon^*} + (\sqrt{\chi}-1)^2 \right) \max \left\{ \frac{C_{GN}}{2}, 9 \right\}} \right\}$, 其中

$\varepsilon^* \in \left(0, \frac{1}{2(\sqrt{\chi}-1)^2} \right)$, C_{GN} 为Gagliardo-Nirenberg常数, 则该模型的解整体存在。

关键词

Keller-Segel系统, Trudinger-Moser不等式, 整体存在性

The Global Existence of Solutions to a Class of Two-Dimensional Keller-Segel Systems

Jianfeng Li, Yongjie Han

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: November 16, 2025; accepted: December 9, 2025; published: December 19, 2025

文章引用: 李鉴峰, 韩永杰. 一类二维 Keller-Segel 系统整体解的存在性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(12): 385-398.
DOI: 10.12677/aam.2025.1412515

Abstract

This paper investigates a class of Keller-Segel systems described by the Cauchy problem:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(\nabla u - \chi u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty), \\ \kappa v_t = \Delta v - \lambda v + u, & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty), \text{ where } \kappa \geq 0, \chi > 1, \text{ and } \lambda > 0. \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

By constructing a more general energy functional together with a corresponding energy inequality, we prove global-in-time existence provided the initial cell (bacterial) mass satisfies

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_0 dx < \min \left\{ \frac{8\pi}{\chi}, \frac{1}{2 \left(\frac{\kappa(\sqrt{\chi}-1)^2}{4\varepsilon^*} + (\sqrt{\chi}-1)^2 \right) \max \left\{ \frac{C_{GN}}{2}, 9 \right\}} \right\}, \text{ for some } \varepsilon^* \in \left(0, \frac{1}{2(\sqrt{\chi}-1)^2} \right). \text{ Here}$$

C_{GN} denotes the Gagliardo-Nirenberg constant. Under this smallness condition on the initial mass, the model admits a global solution. Then the global existence of classical solutions to this system can be established.

Keywords

Keller-Segel System, Trudinger-Moser Inequality, Global Existence

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

趋化性是生物体或细胞对化学信号刺激产生的定向移动性质, 是一种广泛存在于自然界的适应性机制。从微观的细胞运动到宏观的生态系统调节, 趋化性在生物体的生存、繁殖和环境适应中起到了关键作用。例如, 细胞或细菌通过感知化学物质的浓度梯度, 能够向目标方向移动以获取营养、修复损伤或进行免疫防御。同时, 趋化性异常与癌症转移等重大疾病的发生密切相关, 其研究对于疾病的防治具有重要意义[1]-[12]。

为了揭示趋化行为背后的动力学机制, 研究者们于 1970 年提出了描述趋化现象的 Keller-Segel 系统 [1] [2]:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(\nabla u - \chi u \nabla v), & x \in \Omega, t \in (0, \infty), \\ \kappa v_t = \Delta v - \lambda v + u, & x \in \Omega, t \in (0, \infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $u(x, t)$ 表示细胞或细菌密度, $v(x, t)$ 表示化学物质浓度, 信号扩散系数 $\kappa \geq 0$, 趋化系数 $\chi > 0$, 信号衰减系数 $\lambda > 0$ 。当 $\kappa > 0$ 时, 该系统为抛物-抛物型方程组。同时考虑到当化学物质的扩散速度要比细胞扩散速度快得多时, 该 Keller-Segel 系统可简化为 $\kappa = 0$ 时的抛物——椭圆型 Keller-Segel 系统。

系统(1.1)的初边值问题有很多丰富的数学研究结果,特别是当空间维数是二维时,相应的初边值问题存在临界质量现象,即细胞的初始质量 $\int_{\Omega} u(x,0)dx$ 的大小是区分相应初边值问题的解是否整体存在或发生爆破特性的指标。具体而言,当 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界的有界区域, $\kappa = \chi = \lambda = 1$ 时,若初始质量 $\int_{\Omega} u(x,0)dx < 8\pi$, 系统(1.1)的齐次 Neumann 初边值问题存在径向对称的整体经典解[13]; 当初始质量 $\int_{\Omega} u(x,0)dx > 8\pi$ 时,相应初边值问题的解会在有限时刻爆破[14]。

另一方面,当 $\kappa = 0$, $\chi = \lambda = 1$ 时,系统(1.1)的齐次 Neumann 初边值问题的相应结果与 $\kappa = 1$ 时的情况类似。即,如果 $\int_{\Omega} u(x,0)dx < 8\pi$, 则该初边值问题的径向对称解整体存在[3] [9] [15]; 如果 $\int_{\Omega} u(x,0)dx > 8\pi$, 则可以构造初值使得该初边值问题的解在有限时刻发生爆破[16]-[18]。同时系统(1.1)在二维全空间上的 Cauchy 问题也有如下相应的结果。Nagai 与 Ogawa 证明了当 $\kappa = 0$, $\chi = 1$, $\lambda > 0$ 时,若 $\int_{\mathbb{R}^2} u(x,0)dx < 8\pi$, 则该初值问题的解整体存在; 当 $\kappa > 0$, $\chi = 1$, $\lambda > 0$ 时,若 $\int_{\mathbb{R}^2} u(x,0)dx < 4\pi$, 该初值问题的解整体存在[19]。随后, Mizoguchi 于 2013 年证明了当 $\kappa = 1$, $\chi = 1$, $\lambda > 0$ 时,若 $\int_{\mathbb{R}^2} u(x,0)dx < 8\pi$ 则相应的初值问题存在整体解[20]。

因此一个自然的问题是:对任意的 $\kappa \geq 0$, $\chi > 1$, $\lambda > 0$, 系统(1.1)在二维全空间上的 Cauchy 问题是否存在整体解。鉴于此,本文在 $\kappa \geq 0$, $\chi > 1$, $\lambda > 0$ 的情况下,通过建立新的积分不等式,证明了系统(1.1)在二维全空间上的 Cauchy 问题解的整体存在性。本文的研究不仅进一步统一和推广了现有理论结果,还为二维全空间下更一般的 Keller-Segel 模型提供了新的研究工具和理论支撑。

2. 主要结果

本文研究如下—类 Keller-Segel 系统解的整体存在性。

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(\nabla u - \chi u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty), \\ \kappa v_t = \Delta v - \lambda v + u, & x \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 χ , κ 和 λ 为常数,满足 $\kappa \geq 0$, $\chi > 1$, $\lambda > 0$ 。

本文的主要结论如下:

定理 2.1 设 $\kappa \geq 0$, $\chi > 1$, $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times (L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2))$, 若初始质量条件满足

$$M := \int_{\mathbb{R}^2} u_0 dx < \min \left\{ \frac{8\pi}{\chi}, \frac{1}{2 \left(\frac{\kappa(\sqrt{\chi}-1)^2}{4\varepsilon^*} + (\sqrt{\chi}-1)^2 \right) \max \left\{ \frac{C_{GN}}{2}, 9 \right\}} \right\},$$

其中 $\varepsilon^* \in \left(0, \frac{1}{2(\sqrt{\chi}-1)^2} \right)$, C_{GN} 为 Gagliardo-Nirenberg 常数, 则系统(2.1)的解整体存在。

注 如引言所述, Nagai、Ogawa 及 Mizoguchi 分别在不同条件下探讨了二维全空间上的 Keller-Segel 模型解的整体存在性,但 Nagai、Ogawa 的证明对 $\chi > 1$ 的情况不适用; Mizoguchi 的证明只考虑了 $\kappa = \chi = 1$ 的情况。为了统一并推广现有理论结果,本文将引入一个新的积分不等式,用于建立 $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$ 的一个有效的

上界估计, 实现了参数 $\kappa \geq 0$, $\chi > 1$ 的任意性和对应 $\kappa \geq 0$ 阈值的一致性。

3. 预备知识

在研究 Keller-Segel 系统解的整体存在性之前, 我们首先需要建立系统(2.1)解的局部存在性。下面的引理表明在适当的初始条件下, 系统(2.1)存在唯一的非负局部光滑解。由于 Yagi 在其研究中证明了该结论(见 Nagai 等人的引述[13]), 我们可以直接得到下面引理。

引理 3.1 设 $\kappa \geq 0$, $\chi > 0$, $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times (L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2))$, 则存在 $T \in (0, \infty]$, 使得初值问题(2.1)在 $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$ 上存在唯一的非负局部光滑解 (u, v) , 满足

$$(u, v) \in C([0, T]: L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2)).$$

下面引理可参见文献[13]的引理 3.2。

引理 3.2 设 $\kappa \geq 0$, $\chi > 0$, $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times (L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2))$, 则存在 $T \in (0, \infty]$, 使得对任意的 $t \in (0, T)$, 系统(2.1)的局部光滑解 (u, v) 满足

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \\ \text{(ii)} \quad & \begin{cases} \|v(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\lambda} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, & \kappa = 0, \\ \|v(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = e^{-\frac{\lambda}{\kappa}t} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\kappa}t}\right) \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, & \kappa > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

为了进一步探讨系统(2.1)解的整体存在性, 我们需要构造细致的能量泛函与更一般化的广义能量等式。

引理 3.3 设 $\kappa \geq 0$, $\chi > 0$, $\lambda > 0$ 存在 $T \in (0, \infty]$, 使得对任意的 $t \in (0, T)$, 系统(2.1)的局部光滑解 (u, v) 满足

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} W(t) + \int_{\mathbb{R}^2} \left| \nabla \left(\log(1+u(t)) + \frac{\chi - 2\sqrt{\chi}}{2} v(t) \right) \right|^2 dx \\ & + \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \left| \nabla (\log(1+u(t)) - \sqrt{\chi} v(t)) \right|^2 dx \\ & = (\sqrt{\chi} - 1)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) dx + \frac{(2\sqrt{\chi} - \chi)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} W(t) = & \int_{\mathbb{R}^2} (1+u(t)) (\log(1+u(t))) dx + \frac{1}{2} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & + \frac{\lambda}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

证明 对于系统(2.1)的局部光滑解 (u, v) , 注意到对任意的 $t \in (0, T)$

$$\frac{d}{dt} (1+u(t)) \log(1+u(t)) = \partial_t u(t) \log(1+u(t)) + \partial_t u(t),$$

从而对系统(2.1)的第一个方程乘以 $\log(1+u(t))$ 并进行分部积分可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (1+u(t)) \log(1+u(t)) dx - \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u(t) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+u(t)} |\nabla u(t)|^2 dx \\ & - \chi \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \nabla \log(1+u(t)) \cdot \nabla v(t) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

对系统(2.1)的第二个方程乘以 $\partial_t v(t)$, 得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right) + \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \partial_t v(t) dx = 0, \quad (3.3)$$

同时对系统(2.1)的第一个方程乘以 v 并进行分部积分

$$\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t u(t) v(t) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) dx - \chi \int_{\mathbb{R}^2} u(t) |\nabla v(t)|^2 dx = 0, \quad (3.4)$$

结合(3.3), (3.4)式, 对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx \right) + \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) dx - \chi \int_{\mathbb{R}^2} u(t) |\nabla v(t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

结合(3.2), (3.5)式和 $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u(t) dx = 0$, 可知对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} (1+u(t)) \log(1+u(t)) dx + \frac{1}{2} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx \right\} \\ &+ \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+u(t)} |\nabla u(t)|^2 dx - \chi \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \nabla \log(1+u(t)) \cdot \nabla v(t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) dx - \chi \int_{\mathbb{R}^2} u(t) |\nabla v(t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

直接计算得到如下三个等式,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \left| \nabla \left(\log(1+u(t)) - \sqrt{\chi} v(t) \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} u(t) (\nabla \log(1+u))^2 dx - 2\sqrt{\chi} \int_{\mathbb{R}^2} u \nabla v \cdot \nabla \log(1+u) dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} u |\nabla v|^2 dx, \\ & \int_{\mathbb{R}^2} \left| \nabla \left(\log(1+u(t)) - \frac{2\sqrt{\chi} - \chi}{2} v(t) \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \log(1+u(t))|^2 dx - (2\sqrt{\chi} - \chi) \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \log(1+u(t)) \cdot \nabla v(t) dx + \frac{(2\sqrt{\chi} - \chi)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v(t)|^2 dx, \\ & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+u(t)} |\nabla u(t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} u(t) |\nabla \log(1+u(t))|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \log(1+u(t))|^2 dx, \end{aligned}$$

从而对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} (1+u(t) \log(1+u(t))) dx + \frac{1}{2} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx \right\} \\ &+ \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \left| \nabla \left(\log(1+u(t)) - \sqrt{\chi} v(t) \right) \right|^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \left| \nabla \left(\log(1+u(t)) - \frac{2\sqrt{\chi} - \chi}{2} v(t) \right) \right|^2 dx \\ &+ (2\sqrt{\chi} - \chi - 1) \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) dx \\ &= \frac{(2\sqrt{\chi} - \chi)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

□

在研究系统(2.1)的过程中, 利用 Trudinger-Moser 不等式来控制(2.1)中非线性项的增长是关键步骤。为了证得本文的结果, 我们需要建立下述 Trudinger-Moser 不等式的变体。

引理 3.4 令 G 为二维平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个有界区域, $|G|$ 表示 G 的 Lebesgue 测度, 则存在仅依赖于 G 的常数 $C_G \geq |G| > 0$, 使得对任意的非负函数 f , $h \in H_0^1(G)$, 有

$$\int_G f h dx \leq \int_G f \log(f) dx + M \left\{ \log(C_G) + \frac{1}{16\pi} \|\nabla h\|_{L^2(G)}^2 \right\} - M \log M,$$

其中 $M = \int_G f dx$.

证明 由[21]的引理 5.4, 下列积分不等式成立

$$\int_G f h dx \leq \int_G f \log(f) dx + M \log \left(\int_G e^h dx \right) - M \log M.$$

其中 $M = \int_G f dx$ 。再回顾由[22]和[23]得不等式并参考[13][20][24]的不等式变体, 可知存在仅依赖于 G 的常数 $C_G \geq |G| > 0$, 使得对任意的 $h \in H_0^1(G)$,

$$\log \int_G e^{h^2} dx \leq \log(C_G) + \frac{1}{16\pi} \|\nabla h\|_{L^2(G)}^2.$$

结合这两个不等式可以得到

$$\int_G f h dx \leq \int_G f \log(f) dx + M \left\{ \log(C_G) + \frac{1}{16\pi} \|\nabla h\|_{L^2(G)}^2 \right\} - M \log M. \quad \square$$

下面引理出自文献[19]的引理 2.1。

引理 3.5 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C(\varepsilon) > 0$, 使得对 $f \in L^3(\mathbb{R}^2)$, 满足

$$\|f\|_{L^3(\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon \|(1+f) \log(1+f)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{1/3} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2/3} + C(\varepsilon) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{1/3},$$

其中 $C(\varepsilon) = O\left(\left(e^{\varepsilon^{-3}} - 1\right)^{2/3}\right)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ 。

在后续建立引理 4.2 过程中, 需要利用下面引理中的积分不等式来建立 $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$ 的一个上界估计, 从而将估计式(4.9)右端 $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$ 有效地转化为能量泛函在初始时刻的值 $W(0)$ 和对数增长项的组合形式。

引理 3.6 对任意非负函数 $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 定义 $M := \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < \infty$,

$$I(u) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+u} |\nabla u|^2 dx,$$

则存在常数 $C = \max\left\{\frac{C_{GN}}{2}, 9\right\}$, 有

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq CMI(u) + CM$$

证明 定义 $E_0 = \{x: u(x) < 1\}$, $E_1 = \{x: u(x) \geq 1\}$, 易知在 E_0 上 $u^2 \leq u$, 故有

$$\int_{E_0} u^2 dx \leq \int_{E_0} u dx \leq M.$$

令 $\phi = \sqrt{1+u} - 1 \geq 0$, 显然有

$$\phi^2 = (\sqrt{1+u} - 1)^2 = u + 2 - 2\sqrt{1+u} \leq u, \quad \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq M.$$

又由 $\nabla \phi = \frac{\nabla u}{2\sqrt{1+u}}$, $\|\nabla \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+u} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{4} I(u)$ 。

再由 Gagliard-Nirenberg 不等式可知, 存在常数 $C_1 > 0$, 有

$$\|\phi\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 \leq C_1 \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|\nabla \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

从而有

$$\|\phi\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 \leq \frac{C_{GN}}{4} MI(u).$$

对任意的 $t \geq 0$, 记 $\varphi = \sqrt{1+t} - 1$, 则 $t = \varphi^2 + 2\varphi$, 从而

$$\begin{aligned} t^2 &= (\varphi^2 + 2\varphi)^2 = \varphi^4 + 4\varphi^3 + 4\varphi^2 \\ &\leq \varphi^4 + \varphi^4 + 4\varphi^2 + 4\varphi^2 \\ &\leq 2\varphi^4 + 8t. \end{aligned}$$

取 $t = u(x)$ 并在 E_1 上积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{E_1} u^2 dx &\leq 2 \int_{E_1} \varphi^4 dx + 8 \int_{E_1} u dx \\ &\leq 2 \|\phi\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 + 8M. \end{aligned}$$

综上所述, 可知存在常数 $C = \max\left\{\frac{C_{GN}}{2}, 9\right\}$, 有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{E_0} u^2 dx + \int_{E_1} u^2 dx \\ &\leq M + \frac{C_1}{2} MI(u) + 8M \\ &\leq CMI(u) + CM. \end{aligned}$$

4. 解的整体存在性

本节证明系统(2.1)解的整体存在性。为此, 我们首先利用引理 3.4 建立能量泛函 $W(t)$ 的一个下界估计。

引理 4.1 设 $\kappa \geq 0$, $\chi > 0$, $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times (L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2))$, 假设 (u, v) 是模型(2.1)在 $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$ 上的解, 其中 $0 < T < +\infty$, 且满足 $M < \frac{8\pi}{\chi}$, 则存在依赖于 $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, $\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 的常数 $Q > 0$ 和依赖于 $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 的常数 $\delta > 0$, 使得对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$W(t) \geq \delta \int_{\mathbb{R}^2} (u(t)+1) \log(u(t)+1) dx + \frac{\lambda}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - Q. \quad (4.1)$$

证明 根据引理 3.2 可知, 对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\|v(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\lambda} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \quad (4.2)$$

选取足够大的常数 $s > 0$, 定义

$$\Omega(t) := \{x \in \mathbb{R}^2 : v(x, t) > s\}, \quad \tilde{v}(x, t) := \max\{v(x, t) - s, 0\}.$$

结合(4.2)式知, 对任意的 $t \in (0, T)$, 可以估计

$$|\Omega(t)| < \frac{1}{s} \left(\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\lambda} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right). \quad (4.3)$$

结合 $\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, 对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u(t)v(t)dx &= \int_{\Omega(t)} u(t)v(t)dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega(t)} u(t)v(t)dx \\ &\leq \int_{\Omega(t)} u(t)(\tilde{v}(t) + s)dx + s \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega(t)} u(t)dx \\ &\leq \int_{\Omega(t)} u(t)\tilde{v}(t)dx + s\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

对任意的 $t \in (0, T)$, 若 $\Omega(t) = \emptyset$, 则引理 4.1 得证; 若 $\Omega(t) \neq \emptyset$, 则将 $\Omega(t)$ 划分为至多可列个互不相交的开区域的并, 即 $\Omega(t) = \bigcup_{i=1}^{m(t)} \Omega_i(t)$, 其中 $m(t) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ 。

首先由(4.4)式可知, 对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t)v(t)dx - s\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \int_{\Omega(t)} (u(t) + 1)\tilde{v}(t)dx.$$

根据引理 3.4 得到, 取足够小的 $\delta > 0$, 对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i(t)} (u(t) + 1)\tilde{v}(t)dx &= \int_{\Omega_i(t)} (1 - \delta)(u(t) + 1) \frac{\tilde{v}(t)}{(1 - \delta)} dx \\ &\leq \int_{\Omega_i(t)} (1 - \delta)(u(t) + 1) \log((1 - \delta)(u(t) + 1)) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_i(t)} (1 - \delta)(u(t) + 1) dx \left(\log C_{\Omega_i(t)} + \frac{1}{16\pi} \left\| \nabla \frac{\tilde{v}(t)}{1 - \delta} \right\|^2 \right) \\ &\quad - \int_{\Omega_i(t)} (1 - \delta)(u(t) + 1) dx \log \left(\int_{\Omega_i(t)} (1 - \delta)(u(t) + 1) dx \right) \\ &\leq (1 - \delta) \int_{\Omega_i(t)} (u(t) + 1) \log(u(t) + 1) dx \\ &\quad + \frac{1}{16\pi(1 - \delta)} (M_i(t) + |\Omega_i(t)|) \int_{\Omega_i(t)} |\nabla v(t)|^2 dx \\ &\quad + (1 - \delta) \log(C_{\Omega_i(t)}) (M_i(t) + |\Omega_i(t)|), \end{aligned}$$

其中 $M_i(t) = \int_{\Omega_i(t)} u(t)dx$, $i = 1, 2, \dots, m(t)$ 。

根据积分的可列可加性得到, 对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega(t)} (u(t)+1) \tilde{v}(t) dx &= \sum_{i=1}^{m(t)} \int_{\Omega_i(t)} (u(t)+1) v(t) dx \\
&\leq (1-\delta) \int_{\Omega(t)} (u(t)+1) \log(u(t)+1) dx \\
&\quad + \frac{1}{16\pi(1-\delta)} (M(t) + |\Omega(t)|) \int_{\Omega(t)} |\nabla v(t)|^2 dx \\
&\quad + (1-\delta) \log(C_{\Omega(t)}) (M(t) + |\Omega(t)|),
\end{aligned}$$

其中 $M(t) = \int_{\Omega(t)} u(t) dx$, $C_{\Omega(t)} := \max\{C_{\Omega_1(t)}, \dots, C_{\Omega_{m(t)}(t)}\}$ 。

结合 $M(t) \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 和 (4.3) 式, 可以得到, 对任意的 $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx &\leq (1-\delta) \int_{\Omega(t)} (u(t)+1) \log(u(t)+1) dx \\
&\quad + \frac{1}{16\pi(1-\delta)} \left\{ \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{s} \left(\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\lambda} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right) \right\} \int_{\Omega(t)} |\nabla v(t)|^2 dx + Q,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中常数 $Q = \log(C_{\Omega(t)}) \left\{ \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{s} \left(\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\lambda} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right) \right\} + s \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 。

进一步选取适当的 $s > 0$, $\delta > 0$, 对任意的 $t \in (0, T)$, 成立

$$\begin{aligned}
W(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+u(t)) \log(1+u(t)) dx + \frac{1}{2} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx \\
&\geq \delta \int_{\mathbb{R}^2} (u(t)+1) \log(u(t)+1) dx + \frac{\lambda}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - Q.
\end{aligned}$$

□

注意到对初始质量 $m(u_0; \mathbb{R}^2)$ 的假设, 我们可以利用引理 4.1 建立的能量泛函 $W(t)$ 的下界估计以及引理 3.3 得到如下结论。

引理 4.2 设 $\kappa \geq 0$, $\chi > 1$, $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times (L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2))$, 设初始质量条件满足

$$M := \int_{\mathbb{R}^2} u_0 dx < \min \left\{ \frac{8\pi}{\chi}, \frac{1}{2 \left(\frac{\kappa(\sqrt{\chi}-1)^2}{4\varepsilon^*} + (\sqrt{\chi}-1)^2 \right) \max \left\{ \frac{C_{GN}}{2}, 9 \right\}} \right\},$$

其中 $\varepsilon^* \in \left(0, \frac{1}{2(\sqrt{\chi}-1)^2} \right)$, C_{GN} 为 Gagliardo-Nirenberg 常数。假设 (u, v) 为模型 (2.1) 在 $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$ 上的解,

其中 $0 < T < +\infty$ 。则存在依赖于 M , $\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, T 的常数 $R, H > 0$ 和依赖于 M 的常数 $\delta > 0$, 使得对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\delta \int_{\mathbb{R}^2} (u(t)+1) \log(u(t)+1) dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^t \|\partial_t v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau \leq R, \quad \|\nabla v(t)\|_2 \leq H.$$

证明 类似 (4.5) 式的证明, 对任意的 $t \in (0, T)$, 存在常数 Q , 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v(t)|^2 dx \\ & \leq W(t) + Q + \frac{\chi}{16\pi} \left\{ \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{s} \left(\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\lambda} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right) \right\} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v(t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

因为 $M < \frac{8\pi}{\chi}$, 则

$$k := \frac{1}{2} - \frac{\chi}{16\pi} \left\{ \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{s} \left(\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\lambda} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right) \right\} > 0,$$

从而对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\|\nabla v(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{k} \{W(t) + Q\}. \quad (4.7)$$

结合引理 3.3 和 (4.7) 式, 可以得到对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} W(t) + \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+u(t)} |\nabla u(t)|^2 dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) dx - \chi \int_{\mathbb{R}^2} u(t) |\nabla v(t)|^2 dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \nabla \log(1+u(t)) \cdot \nabla v(t) dx \\ & \leq \frac{(2\sqrt{\chi} - \chi)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx + (\sqrt{\chi} - 1)^2 \left(-\kappa \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t v(t) u(t) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx + \int_{\mathbb{R}^2} u^2(t) dx \right) \\ & \leq \frac{(2\sqrt{\chi} - \chi)^2}{4k} \{W(t) + Q\} + (\sqrt{\chi} - 1)^2 \left(-\kappa \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t v(t) u(t) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx + \int_{\mathbb{R}^2} u^2(t) dx \right). \end{aligned}$$

利用 Young 不等式, 对任意 $\varepsilon^* > 0$, 任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} W(t) + \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+u(t)} |\nabla u(t)|^2 dx \\ & \leq \varepsilon^* \kappa (\sqrt{\chi} - 1)^2 \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & \quad - \lambda (\sqrt{\chi} - 1)^2 \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx + \frac{(2\sqrt{\chi} - \chi)^2}{4k} \{W(t) + Q\} \\ & \quad + \left(\frac{\kappa (\sqrt{\chi} - 1)^2}{4\varepsilon^*} + (\sqrt{\chi} - 1)^2 \right) \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

对任意的 $t \in (0, T)$, 存在常数 $C_1(\varepsilon^*)$, $C_2 > 0$ 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} W(t) + \left(1 - \varepsilon^* (\sqrt{\chi} - 1)^2 \right) \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+u(t)} |\nabla u(t)|^2 dx \\ & \leq C_1(\varepsilon^*) \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C_2 \{W(t) + Q\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{其中 } C_1(\varepsilon^*) := \frac{\kappa (\sqrt{\chi} - 1)^2}{4\varepsilon^*} + (\sqrt{\chi} - 1)^2, \quad C_2 := \frac{(2\sqrt{\chi} - \chi)^2}{4k} + \lambda (\sqrt{\chi} - 1)^2.$$

由引理 3.6 和 $M < \min \left\{ \frac{8\pi}{\chi}, \frac{1}{2C_1(\varepsilon^*)C_3} \right\}$ 知, 存在常数 $C_3, C_4 > 0$, 对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\frac{d}{dt}W(t) + \left(1 - \varepsilon^* (\sqrt{\chi} - 1)^2\right) \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C_4 I(u) \leq C_2 \{W(t) + Q\} + C_1(\varepsilon^*) C_3 M,$$

其中 $C_3 := \max\left\{\frac{C_{GN}}{2}, 9\right\}$, $C_4 := 1 - C_1(\varepsilon^*) C_3 M$ 。

故对每个 $\chi > 1$, $\kappa \geq 0$ 有

$$\frac{d}{dt}W(t) + \frac{\kappa}{2} \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{1}{2} I(u) \leq C_2 \{W(t) + Q\} + C_1(\varepsilon^*) C_3 M.$$

再由(3.1)式与引理 4.1, 对任意的 $t \in (0, T)$, 可以估计

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t) + \frac{\kappa}{2} \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \frac{d}{dt} \left(W(t) + \frac{\kappa}{2} \int_0^t \|\partial_t v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau + Q \right) \\ &\leq C_2 \{W(t) + Q\} + C_1(\varepsilon^*) C_3 M \\ &\leq C_2 \left\{ W(t) + \frac{\kappa}{2} \int_0^t \|\partial_t v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau + Q \right\} + C_1(\varepsilon^*) C_3 M. \end{aligned} \quad (4.9)$$

根据 Gronwall 不等式, 对任意的 $t \in (0, T)$, 可以得到

$$\begin{aligned} W(t) + \frac{\kappa}{2} \int_0^t \|\partial_t v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau + Q &\leq e^{C_2 t} \left[W(0) + Q + \int_0^t C_1(\varepsilon^*) C_3 M ds \right] \\ &\leq e^{C_2 t} (W(0) + Q) + e^{C_2 t} C_1(\varepsilon^*) C_3 M t. \end{aligned} \quad (4.10)$$

结合(4.10)式和引理 4.1, 可知存在依赖于 M , $\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, T 的常数 $R > 0$, 使得对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\delta \int_{\mathbb{R}^2} (u(t) + 1) \log(u(t) + 1) dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^t \|\partial_t v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau \leq R.$$

下面讨论 $\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$ 的有界性。对任意的 $t \in (0, T)$, 对任意的 $t \in (0, T)$, 由(4.7)和(4.10)式, 可以得到

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \frac{1}{k} \left\{ e^{C_2 t} (W(0) + Q) + e^{C_2 t} C_1(\varepsilon^*) C_3 M t \right\}. \quad (4.11)$$

故存在依赖于 M , $\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, T 的常数 $H > 0$, 使得对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq H. \quad \square$$

进一步, 通过标准的乘测试函数的过程, 现在可以得到关于解 (u, v) 更高阶的范数估计。

引理 4.3 设 $\kappa \geq 0$, $\chi > 0$, $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times (L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2))$, 假设 (u, v) 为模型(2.1)在 $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$ 上的解, 其中 $0 < T < +\infty$ 。//

若存在 R , $\delta > 0$ 使得对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\delta \int_{\mathbb{R}^2} (u(t) + 1) \log(u(t) + 1) dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^t \|\partial_t v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau \leq R, \quad (4.12)$$

则存在依赖于 T 的常数 $G > 0$ 和依赖于 $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, $\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, T 的常数 $K > 0$, 使得对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq G, \quad \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq K.$$

证明 对于系统(2.1)的局部光滑解 (u, v) , 任意的 $t \in (0, T)$, 对第一个方程乘以 u 并进行分部积分后,

结合第二个方程得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= -\chi \int_{\mathbb{R}^2} u^2(t) (\kappa \partial_t v(t) + \lambda v(t) - u(t)) dx \\ &\leq -\kappa \chi \int_{\mathbb{R}^2} u^2(t) \partial_t v(t) dx - \lambda \chi \int_{\mathbb{R}^2} u^2(t) v(t) dx + \chi \|u(t)\|_{L^3(\mathbb{R}^2)}^3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

对任意的 $t \in (0, T)$, 由引理 3.5 和假设(4.12)可知, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C_1 > 0$, 有

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^3(\mathbb{R}^2)} &\leq \varepsilon' \|(1+u(t)) \log(1+u(t))\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{1/3} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2/3} + C_1 \|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{1/3} \\ &\leq \varepsilon \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2/3} + C_1 \|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{1/3}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

再由 Hölder 不等式和 Gagliard-Nirenberg 不等式可知, 任意的 $t \in (0, T)$, 存在常数 $C_2 > 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u^2(t) \partial_t v(t) dx &\leq \|u(t)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^2 \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \varepsilon \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C_2 \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

由(4.12)~(4.15)式可知, 对任意的 $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ \leq \varepsilon \chi \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \kappa \chi C_2 \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C_1 \chi \|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

取足够小的 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C_3 > 0$, 对任意的 $t \in (0, T)$, 有

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C_3 \chi \left\{ \kappa \|\partial_t v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + E \right\},$$

其中 $E := \sup_{t \in [0, T]} \left(\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \right)$.

注意到 $\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, 并且由 Gronwall 不等式可知, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 e^{\left(C_3 \int_0^t \chi \kappa \|\partial_t v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \right)} \\ &\quad + \left\{ C_3 \chi E \int_0^t e^{\left(C_3 \int_s^t \chi \kappa \|\partial_t v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau \right)} ds \right\}. \end{aligned}$$

从而由假设(4.12)可知, 存在依赖于 T 的常数 $G > 0$, 使得对任意 $t \in [0, T]$, 有

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq G. \quad (4.16)$$

进一步, 对第二个方程使用分部积分并结合(4.16)式可知, 存在常数 $C_4 > 0$, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} \kappa \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= -2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v(t)|^2 dx - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^2} v^2(t) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} u(t) v(t) dx \\ &\leq -2 \|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - 2\lambda \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2 \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq -2\lambda \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2C_4 \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

即, 存在常数 $C_5 > 0$, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\kappa \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq -\lambda \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C_5.$$

当 $\kappa = 0$ 时, 引理 4.3 的结论成立。当 $\kappa > 0$ 时, 利用 Gronwall 不等式, 对任意 $t \in [0, T]$, 有

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq e^{-\frac{\lambda}{\kappa}t} \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{C_5}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\kappa}t}\right) < \infty,$$

从而存在依赖于 $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, $\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, T 的常数 $K > 0$, 使得对任意 $t \in [0, T]$, 有

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq K.$$

□

最后, 我们证明本文的主要结论:

定理2.1的证明 根据标准抛物(椭圆)正则性理论, 可以由引理4.2和引理4.3得到: 对任意的 $T > 0$, 解 $(u, v) \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$. 因此解在 $[0, T]$ 内不会发生爆破。我们可在 T 时刻后延拓该解, 并注意到 $\|u(T)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 保证了先验估计对延拓后的解仍然成立。由此, 解可被无限次延拓至任意长时间, 这便证明了解的整体存在性。 □

5. 结论

本文在二维全空间的 Keller-Segel 模型 ($\kappa \geq 0, \chi > 1, \lambda > 0$) 框架下, 基于能量 - 熵结构与关键积分不等式, 建立了小质量条件下经典解整体存在性的统一判据, 同时覆盖抛物 - 抛物与抛物 - 椭圆两类模型。主要困难在于 $\chi > 1$ 引致的增益耦合使交叉项符号不定, 且与 $\kappa > 0$ 的时间演化项耦合。本文通过构造能量泛函、精确配方与吸收处理耦合项, 并联合运用 Gagliardo-Nirenberg 与 Trudinger-Moser 型不等式以及对 $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ 和 $\int_0^t \|\partial_\tau v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau$ 的一致先验控制, 获得与时间无关的 L^2 与梯度估计, 从而实现解的全局延拓。

需要指出的是, 所得判据为充分条件, 其尖锐性仍有进一步提升空间; 对初值假设 $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$, $v_0 \in L^1 \cap H^1$ 且分析目前限于二维全空间与常系数情形。在此基础上, 后续工作可致力于提高小质量阈值的尖锐性并刻画临界/次临界质量的长期渐近, 同时将本文的能量 - 熵与插值框架推广至弱初值(仅 L^1 或测度初值)、有界域(Neumann 边界)及非常系数模型。

参考文献

- [1] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(70\)90092-5](https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5)
- [2] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1971) Model for Chemotaxis. *Journal of Theoretical Biology*, **30**, 225-234. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(71\)90050-6](https://doi.org/10.1016/0022-5193(71)90050-6)
- [3] Horstmann, D. (2003) From 1970 until Present: The Keller-Segel Model in Chemotaxis and Its Consequences I. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **105**, 103-165.
- [4] Hassan, Z., Shen, W. and Zhang, Y.P. (2023) Global Existence of Classical Solutions of Chemotaxis Systems with Logistic Source and Consumption or Linear Signal Production on $\mathbb{R}^n$. <https://arxiv.org/abs/2310.16001>
- [5] Goldstein, S. (1948) On Laminar Boundary-Layer Flow Near a Position of Separation. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **1**, 43-69. <https://doi.org/10.1093/qjmam/1.1.43>
- [6] Hillen, T. and Painter, K.J. (2009) A User's Guide to PDE Models for Chemotaxis. *Journal of Mathematical Biology*, **58**, 183-217. <https://doi.org/10.1007/s00285-008-0201-3>
- [7] Biler, P., Boritchev, A. and Brandolese, L. (2022) Large Global Solutions of the Parabolic-Parabolic Keller-Segel System in Higher Dimensions. *Journal of Differential Equations*, **344**, 891-914. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.11.018>

-
- [8] Murray, J.D. and Myerscough, M.R. (1991) Pigmentation Pattern Formation on Snakes. *Journal of Theoretical Biology*, **149**, 339-360. [https://doi.org/10.1016/s0022-5193\(05\)80310-8](https://doi.org/10.1016/s0022-5193(05)80310-8)
 - [9] Horstmann, D. (2) From 1970 until Present: The Keller-Segel Model in Chemotaxis and Its Consequences II. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **106**, 51-69.
 - [10] Zhao, J. (2023) Global Existence of Large Solutions for the Parabolic-Elliptic Keller-Segel System in Besov Type Spaces. *Applied Mathematics Letters*, **149**, Article 108899. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108899>
 - [11] Zheng, Z., Wang, J. and Cai, L. (2024) Global Boundedness in a Keller-Segel System with Nonlinear Indirect Signal Consumption Mechanism. *Electronic Research Archive*, **32**, 4796-4808. <https://doi.org/10.3934/era.2024219>
 - [12] Verhulst, P.F. (1838) Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Journal of Mathematical Physics*, **10**, 113-116.
 - [13] Nagai, T., Senba, T. and Yoshida, K. (1997) Application of the Trudinger-Moser Inequality to a Parabolic System of Chemotaxis. *Funkcialaj Ekvacioj*, **40**, 411-433.
 - [14] Mizoguchi, T. and Winkler, M. (2021) Blow-Up in the Two-Dimensional Parabolic Keller-Segel System. *Indiana University Mathematics Journal*, **70**, 2253-2307.
 - [15] Gajewski, H., Zacharias, K. and Gröger, K. (1998) Global Behaviour of a Reaction-Diffusion System Modelling Chemotaxis. *Mathematische Nachrichten*, **195**, 77-114. <https://doi.org/10.1002/mana.19981950106>
 - [16] Biler, P. (1998) Local and Global Solvability of Some Parabolic Systems Modeling Chemotaxis. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **8**, 715-743.
 - [17] Jäger, W. and Luckhaus, S. (1992) On Explosions of Solutions to a System of Partial Differential Equations Modelling Chemotaxis. *Transactions of the American Mathematical Society*, **329**, 819-824. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1992-1046835-6>
 - [18] Nagai, T. (1995) Blow-Up of Radially Symmetric Solutions to a Chemotaxis System. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **5**, 581-601.
 - [19] Nagai, T. and Ogawa, T. (2011) Brezis-Merle Inequalities and Application to the Global Existence of the Cauchy Problem of the Keller-Segel System. *Communications in Contemporary Mathematics*, **13**, 795-812. <https://doi.org/10.1142/s0219199711004440>
 - [20] Mizoguchi, N. (2013) Global Existence for the Cauchy Problem of the Parabolic-Parabolic Keller-Segel System on the Plane. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **48**, 491-505. <https://doi.org/10.1007/s00526-012-0558-4>
 - [21] Nagai, T., Senba, T. and Suzuki, T. (2000) Chemotactic Collapse in a Parabolic System of Mathematical Biology. *Hiroshima Mathematical Journal*, **30**, 463-497. <https://doi.org/10.32917/hmj/1206124609>
 - [22] Moser, J. (1971) A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger. *Indiana University Mathematics Journal*, **20**, 1077-1092.
 - [23] Trudinger, N. (1967) On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications. *Indiana University Mathematics Journal*, **17**, 473-483. <https://doi.org/10.1512/iumj.1968.17.17028>
 - [24] Heihoff, F. (2023) Two New Functional Inequalities and Their Application to the Eventual Smoothness of Solutions to a Chemotaxis-Navier-Stokes System with Rotational Flux. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **55**, 7113-7154. <https://doi.org/10.1137/22m1531178>