

星图的Seidel谱和完全图的加权Estrada指数

扈嘉萱, 儒孜·买司地克*

新疆师范大学数学与科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年10月14日; 录用日期: 2025年11月8日; 发布日期: 2025年11月17日

摘要

本文通过加权邻接矩阵求解出完全图的加权Estrada指数, 并给出了完全二部图删去一个匹配后所得图的加权Estrada指数。同时结合Sherman-Morrison公式与矩阵行列式引理得到了星图的Seidel谱, 还分别计算出了完全二部图和双团图所对应的距离拉普拉斯特征值与距离无符号拉普拉斯特征值。

关键词

加权邻接矩阵, Estrada指数, Seidel矩阵

Seidel Spectrum of Star Graphs and the Weighted Estrada Index of Complete Graphs

Jiaxuan Hu, Metrose Metsidik*

School of Mathematics and Science, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: October 14, 2025; accepted: November 8, 2025; published: November 17, 2025

Abstract

This paper computes the weighted Estrada index of complete graphs using the weighted adjacency matrix and provides the weighted Estrada index of graphs obtained by removing a matching from complete bipartite graphs. Additionally, by combining the Sherman-Morrison formula and the matrix determinant lemma, the Seidel spectrum of star graphs is derived. The distance Laplacian eigenvalues and the distance signless Laplacian eigenvalues of complete bipartite graphs and double clique graphs are also calculated, respectively.

Keywords

Weighted Adjacency Matrix, Estrada Index, Seidel Matrix

*通讯作者。

文章引用: 扈嘉萱, 儒孜·买司地克. 星图的 Seidel 谱和完全图的加权 Estrada 指数[J]. 应用数学进展, 2025, 14(11): 199-208. DOI: 10.12677/aam.2025.1411476



1. 引言

图谱理论是图论的一个重要分支, 在多个领域当中展现出了深刻的理论价值与实践意义, 图谱理论通过图的矩阵表示(如邻接矩阵、拉普拉斯矩阵、Seidel 矩阵等)将图的结构性质与矩阵的代数性质建立联系, 这种关系为图论中的问题提供了代数工具, 同时也为线性代数中的一些问题赋予了几何意义。

拓扑指数也称为图不变量, 是从分子图的拓扑结构中计算出的一个数值, 拓扑指数可以将一个复杂的图形结构转化为一个或多个数字, 常见的拓扑指数有第一 Zagreb 指数、GA 指数、Harmonic 指数等, 在 2000 年, Ernesto Estrada 提出了一个新的指数: Estrada 指数[1], Estrada 指数的定义为图邻接矩阵所有特征值的指数之和, 用符号表示为 $EE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是图 G 的邻接矩阵 A 的特征值, Estrada 指数在多个领域有广泛应用, 例如, 在 2024 年, 范益政[2]等人将研究聚焦在了一类非线性超图 - 太阳花型图的 Estrada 指数上, 得出了在所有给定边数的所有太阳花型超图中, Estrada 指数取得最大值的超图是唯一存在的。在 2013 年, 徐薇薇[3]运用谱半径和 Estrada 指数之间的关系, 得出了三类图(单圈图、双圈图、三圈图)中有关 Estrada 指数相关的结论。在 2018 年, Gutman 首次提出了加权邻接矩阵[4]的概念, 在分子图理论中, 图形或拓扑指标用于表式分子图的结构特性, 在图谱理论中, 关于矩阵的研究成果颇丰。由于矩阵与分子图结构密切相关, 因此用矩阵表示图能保留比单一数值更丰富的结构信息, 图 G 的加权邻接矩阵记为 $A_f(G)$, $f(x, y)$ 表示边权值, 则加权邻接矩阵的 ij 项定义为

$$A_f(G) := \begin{cases} f(d_i, d_j) & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

其中 d_i 是顶点 v_i 的度, d_j 是顶点 v_j 的度, 也就是说, 对于任何图形或拓扑指标, 我们都可以通过该指标的边权重函数 $f(x, y)$ 来定义对应的边权重图的加权邻接矩阵。将加权邻接矩阵和 Estrada 指数联系起来可以得到加权 Estrada 指数为 $EE_f(G) = \sum_{i=1}^n e^{\rho_i}$, 其中 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ 表示加权邻接矩阵的特征值。

设图 G 是一个具有 n 个顶点的简单图(无自环和重边), 图的 Seidel 矩阵用 $A^*(G)$ 来表示, 且 $A^*(G) = J - I - 2A$, 其中 A 是图 G 的邻接矩阵, I 是单位矩阵, J 是全 1 矩阵, 图 G 的 Seidel 矩阵是一个 $(0, -1, 1)$ 方阵, 与传统的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵相比, Seidel 矩阵具有独特的优势, 特别是在处理补图、强正则图等相关的图论问题时, 比传统的邻接矩阵更简洁有效。称 $|\lambda I - A^*|$ 为图 G 的 Seidel 特征多项式, 记为 $S(G)$, 同时记图 G 的 Seidel 谱为 $\text{Spec}(G) = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$ 。

距离拉普拉斯矩阵和距离无符号拉普拉斯矩阵[5]的定义基于传递度对角矩阵 $(Tr(G))$ 和距离矩阵 $D(G)$, $(Tr(G))$ 是一个对角矩阵, 其对角线上的元素 $tr(v_i)$ 定义为顶点 v_i 到图 G 中其他所有顶点的距离之和, 即 $tr(v_i) = \sum_{v_j \in V} d(v_i, v_j)$, 距离矩阵中的 ij 项是指任意两个顶点 v_i, v_j 之间的距离, 这两类矩阵分别用

符号 D^l 和 D^o 表示, 且 $D^l = (Tr(G)) - D$, $D^o = (Tr(G)) + D$, 用 ∂_i^l 表示 D^l 的特征值, ∂_i^o 表示 D^o 的特征值。文献[5]指出, 这两类矩阵是图谱理论中的强大工具, 它们包含了全局的、基于距离的信息, 因此描述图结构的能力优于传统矩阵, 通过研究它们的谱, 能够更深入地了解图的结构特征。

在图论中, 图能量占据重要地位, 它可以将复杂的图结构与简洁的数值联系起来, 而拉普拉斯能量则是图论中及其应用领域的研究重点, 若用 μ_i 表示图的拉普拉斯特征值, 那么图的拉普拉斯能量可以记

为 $LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right|$, 其中 m 表示边数, n 表示顶点数。若用 $t(G)$ [6] 表示图 G 的平均传递度, 即 $t(G) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Tr(v_i)$, $DLE(G)$ 表示图 G 的距离拉普拉斯能量, 则 $DLE(G) = \sum_{i=1}^n |\partial'_i - t(G)|$ 。距离拉普拉斯能量是一个深刻且强大的数学工具, 它通过谱理论将图的局部性质与全局性质相联系, 在多个学科领域都具有重要的研究意义。

Seidel 矩阵、加权邻接矩阵以及距离矩阵均为用于刻画图结构的方阵, 且通常情形下皆为对称矩阵。因此, 本文围绕这几类特定的图谱问题开展研究, 计算得出了几类具有强结构对称性的经典图(星图、完全二部图、双团图、完全图)的相关 Seidel 谱、距离谱以及加权 Estrada 指数的相关特性。

2. 基本知识

引理 2.1. Sherman-Morrison 公式[7]:

如果 $A = D \pm uv^T$, 则 A 的逆矩阵为

$$A^{-1} = D^{-1} \mp \frac{D^{-1}uv^T D^{-1}}{1 \pm v^T D^{-1}u}.$$

其中 u, v 是 $n \times 1$ 的列向量。

引理 2.2. 矩阵行列式引理[8]:

设 A 是一个 $n \times n$ 阶的可逆矩阵, u, v 是 $n \times 1$ 的列向量, 则: $|A + uv^T| = |A|(1 + v^T A^{-1}u)$ 。

引理 2.3. [9]:

设 M 是一个 $p \times p$ 维的可逆矩阵、 N 是一个 $p \times q$ 维的矩阵、 P 是一个 $q \times p$ 维的矩阵、 Q 是一个 $q \times q$ 维的可逆矩阵, 则 $\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} = |M| |Q - PM^{-1}N| = |Q| |M - NQ^{-1}P|$ 。

3. 主要定理

定理 3.1: 星图 S_n 的 Seidel 谱为 $\lambda_1^* = -1, (n-1 \text{重})$, $\lambda_2^* = n-1$ 。

S_n 的邻接矩阵表示为 $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & J_{1 \times n-1} \\ J_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} \end{bmatrix}$

$$\text{则 } A^*(G) = J - I - 2A(G) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } |\lambda I - A^*(G)| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & \lambda & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{令 } M = [\lambda], N = [1, 1, \dots, 1], P = N^T, Q = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

运用引理 2.3 可得 $|\lambda I - A^*(G)| = |Q| |M - NQ^{-1}P|$,

首先, 将矩阵 Q 表示为 $Q = (\lambda + 1)I - uv^T$, 其中, I 是单位矩阵, u 是全 1 的列向量。

根据引理 2.1, 如果 $Q = D - uv^T$, 那么

$$Q^{-1} = D^{-1} - \frac{D^{-1}uv^TD^{-1}}{1 - v^TD^{-1}u},$$

这里 $D = (\lambda + 1)I$, 再将各项代入可得 $Q^{-1} = \frac{1}{\lambda + 1}I_{n-1} + \frac{1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2 - n)}J_{n-1}$ 。

再根据引理 2.2 可得,

$$|Q| = |((\lambda + 1)I + uv^T)| = |(\lambda + 1)I| |1 + u^T((\lambda + 1)I)^{-1}v|,$$

令 $A = (\lambda + 1)I$, u 是每一行元素为 -1 的行向量, v 是每一行元素为 1 的列向量

计算各项代入引理 2.3 可得, $|\lambda I - A^*(G)| = (\lambda + 1)^{n-2} [\lambda^2 + (2 - n)\lambda - n + 1]$ 。

所以 $\lambda_1^* = -1$ ($n-1$ 重), $\lambda_2^* = n-1$ (1 重)。

推论 3.2. 星图的邻接谱能量小于等于它的 Seidel 谱能量, ($n \geq 3$)。

证明: 因为星图的邻接特征值为 $\sqrt{n-1}$, (1 重), 0 , ($n-2$ 重), $-\sqrt{n-1}$, (1 重)。

所以星图的谱能量 $\varepsilon(G) = 2\sqrt{n-1}$ 。而星图的 Seidel 谱能量为 $2(n-1)$,

即 $2\sqrt{n-1} \leq 2(n-1)$ 。

推论 3.3. 星图的距离拉普拉斯能量大于等于它的拉普拉斯能量 ($n > 1$)。

证明: 星图的距离拉普拉斯特征值为 0 , (1 重), n , (1 重), $2n-1$, ($n-2$ 重), 代入距离拉普拉斯计算能量公式可得:

当 $n < 4$ 时:

$$\begin{aligned} DLE(G) &= \left| 0 - \frac{2n^2 - 4n + 2}{n} \right| + \left| n - \frac{2n^2 - 4n + 2}{n} \right| + \left| 2n - 1 - \frac{2n^2 - 4n + 2}{n} \right| (n-2) \\ &= 4n + \frac{4}{n} - 8 \end{aligned}$$

当 $n \geq 4$ 时:

$$\begin{aligned} DLE(G) &= \left| 0 - \frac{2n^2 - 4n + 2}{n} \right| + \left| n - \frac{2n^2 - 4n + 2}{n} \right| + \left| 2n - 1 - \frac{2n^2 - 4n + 2}{n} \right| (n-2) \\ &= 6n + \frac{8}{n} - 16 \end{aligned}$$

而星图的拉普拉斯特征值为 0 , (1 重), 1 , ($n-2$ 重), n , (1 重), 代入拉普拉斯能量计算公式可得:

$$\begin{aligned} LE(G) &= \left| 0 - \frac{2(n-1)}{n} \right| + \left| 1 - \frac{2(n-1)}{n} \right| (n-2) + \left| n - \frac{2(n-1)}{n} \right| \\ &= 2n - 4 + \frac{4}{n} \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时, $DLE(G) - LE(G) = 2n - 4 = -2 < 0$

当 $1 < n < 4$ 时 $DLE(G) - LE(G) = 2n - 4 \geq 0$,

当 $n \geq 4$ 时, $DLE(G) - LE(G) = 4n + \frac{4}{n} - 12 > 0$

所以星图的距离拉普拉斯能量大于等于它的拉普拉斯能量 ($n > 1$)。

定理 3.4. 完全二部图 $K_{n,m}$ 的距离拉普拉斯特征值是 $\partial_1^l = 2n + m, (n-1 \text{重})$, $\partial_2^l = 2m + n, (m-1 \text{重})$, $\partial_3^l = 0, \partial_4^l = m + n$ 。

完全二部图 $K_{n,m}$ 的传递度对角矩阵为

$$Tr(G) = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

其中 A 是主对角元素为 $2(n-1)+m$, 其他元素为 0 的 n 阶对角矩阵, B 是主对角元素为 $2(m-1)+n$, 其他元素为 0 的 m 阶对角矩阵。

$$D(G) = \begin{bmatrix} (2J-2I)_{n \times n} & J_{n \times m} \\ J_{m \times n} & (2J-2I)_{m \times m} \end{bmatrix}。$$

根据距离拉普拉斯矩阵的定义可得:

$$LD(G) = Tr(G) - D(G) = \begin{bmatrix} 2(n-1)+m & -2 & \cdots & -2 & -1 & \cdots & -1 \\ -2 & 2(n-1)+m & \cdots & -2 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & 2(n-1)+m & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n+2(m-1) & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -2 & \cdots & n+2(m-1) \end{bmatrix}$$

其对应的特征多项式为:

$$|\partial^l I - LD(G)| = \begin{vmatrix} \partial^l - 2(n-1) - m & 2 & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & \partial^l - 2(n-1) - m & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & \partial^l - 2(n-1) - m & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \partial^l - n - 2(m-1) & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & \partial^l - n - 2(m-1) \end{vmatrix}$$

代入引理 2.1 可得:

$$M^{-1} = \frac{1}{\partial^l - 2n - m} I_n - \frac{2}{(\partial^l - 2n - m)(\partial^l - m)} J_n$$

再代入引理 2.3 可得:

$$\begin{aligned} PM^{-1}N &= J_{m \times n} \left[\frac{1}{\partial^l - 2n - m} I_n - \frac{2}{(\partial^l - 2n - m)(\partial^l - m)} J_n \right] J_{n \times m} \\ &= J_{m \times n} \frac{1}{\partial^l - 2n - m} I_n J_{n \times m} - J_{m \times n} \frac{2J_n}{(\partial^l - 2n - m)(\partial^l - m)} J_{n \times m} \\ &= \frac{1}{\partial^l - 2n - m} J_{m \times n} J_{n \times m} - \frac{2}{(\partial^l - 2n - m)(\partial^l - m)} J_{m \times n} J_n J_{n \times m} \\ &= \frac{n}{\partial^l - 2n - m} J_m - \frac{2n^2}{(\partial^l - 2n - m)(\partial^l - m)} J_m \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} [Q - PM^{-1}N] &= (\partial' - 2m - n)I_m + 2J_m - \frac{n}{\partial' - 2n - m}J_m + \frac{2n^2}{(\partial' - 2n - m)(\partial' - m)}J_m \\ &= (\partial' - 2m - n)I_m + \left[2 - \frac{n}{\partial' - 2n - m} + \frac{2n^2}{(\partial' - 2n - m)(\partial' - m)} \right] J_m \end{aligned}$$

因为 $|Q - PM^{-1}N|$ 是一个主对角线元素为 $\partial' - 2m - n + 2 - \frac{n}{\partial' - 2n - m} + \frac{2n^2}{(\partial' - 2n - m)(\partial' - m)}$ 。

其他元素为 $2 - \frac{n}{\partial' - 2n - m} + \frac{2n^2}{(\partial' - 2n - m)(\partial' - m)}$ 的行列式, 所以

$$\begin{aligned} &|\partial' I - LD(G)| \\ &= (\partial' - 2n - m)^{n-1} (\partial' - m) (\partial' - 2m - n)^{m-1} \left[\partial' - n - \frac{mn}{\partial' - 2n - m} + \frac{2mn^2}{(\partial' - 2n - m)(\partial' - m)} \right] \\ &= (\partial' - 2n - m)^{n-1} (\partial' - m) (\partial' - 2m - n)^{m-1} (\partial' - n) - (\partial' - 2n - m)^{n-2} (\partial' - m) (\partial' - 2m - n)^{m-1} mn \\ &\quad + (\partial' - 2n - m)^{n-2} (\partial' - 2m - n)^{m-1} 2mn^2 \\ &= (\partial' - 2n - m)^{n-2} (\partial' - 2m - n)^{m-1} \left[(\partial' - 2n - m) (\partial' - m) (\partial' - n) - (\partial' - m) mn + 2mn^2 \right] \\ &= (\partial' - 2n - m)^{n-1} (\partial' - 2m - n)^{m-1} \left[\partial'^2 - (n + m) \partial' \right] \end{aligned}$$

即完全二部图 $K_{n,m}$ 的距离拉普拉斯特征值是

$$\partial'_1 = 2n + m, (n-1 \text{重}), \quad \partial'_2 = 2m + n, (m-1 \text{重}), \quad \partial'_3 = 0, \partial'_4 = m + n.$$

推论 3.5. 完全二部图的距离拉普拉斯能量大于等于它的拉普拉斯能量。

证明: 因为完全二部图的拉普拉斯特征值为 $m, (n-1 \text{重}), n, (m-1 \text{重}), 0, (1 \text{重}), m+n, (1 \text{重})$ 代入拉普拉斯能量公式可得:

$$LE(K_{m,n}) = \left| m - \frac{2mn}{m+n} \right| + \left| n - \frac{2mn}{m+n} \right| (m-1) + \left| 0 - \frac{2mn}{m+n} \right| + \left| m+n - \frac{2mn}{m+n} \right| = \frac{4mn}{m+n}$$

而完全二部图的距离拉普拉斯能量为:

$$\begin{aligned} DLE(K_{m,n}) &= \left| 2n + m - \frac{2mn + 2n^2 + 2m^2 - n - m}{m+n} \right| (n-1) + \left| 2m + n - \frac{2mn + 2n^2 + 2m^2 - n - m}{m+n} \right| (m-1) \\ &\quad + \left| 0 - \frac{2mn + 2n^2 + 2m^2 - n - m}{m+n} \right| + \left| m+n - \frac{2mn + 2n^2 + 2m^2 - n - m}{m+n} \right| \end{aligned}$$

因为 $DLE(K_{m,n}) \geq LE(K_{m,n})$, 所以完全二部图的距离拉普拉斯能量大于等于它的拉普拉斯能量。

在绝大多数情形下, 针对连通图而言, 距离拉普拉斯能量的确大于或等于普通的拉普拉斯能量, 这涉及到图论中两个相关却相异概念的细微差别。 $\varepsilon(DLE(G)) \geq \varepsilon(LE(G))$ 。具体而言, 普通拉普拉斯能量衡量的是拉普拉斯特征值与平均度之间的偏离程度, $\varepsilon(DLE(G))$ 衡量的是距离拉普拉斯特征值与顶点迹平均值之间的偏离程度。因此, 当图的距离分布更为分散时, 例如在长路径、低连通性的状况下, $\varepsilon(DLE(G)) \geq \varepsilon(LE(G))$, 即距离拉普拉斯能量大于或等于普通拉普拉斯能量的概率相对较高。

定理 3.6. 双团图的距离无符号拉普拉斯矩阵特征值为 $\partial_1^q = 3n-4, (2n-4 \text{重})$, $\partial_2^q = 2n-3$,

$$\partial_3^q = \frac{8n-9+\sqrt{16(n-1)^2+1}}{2}, \partial_4^q = \frac{8n-9-\sqrt{16(n-1)^2+1}}{2}.$$

证明:

双团图的 $2n-1$ 阶传递度对角矩阵为:

$$Tr(G) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & & & & \\ & 3(n-1) & & & \\ & & 3(n-1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 3(n-1) \end{bmatrix}$$

而双团图的距离矩阵为:

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

所以双团图的距离无符号拉普拉斯矩阵特征多项式为:

$$|\partial^q I - Q(G)| = \begin{vmatrix} \partial^q - 2(n-1) & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \partial^q - 3(n-1) & \cdots & -1 & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \partial^q - 3(n-1) & -2 & \cdots & -2 \\ -1 & -2 & \cdots & -2 & \partial^q - 3(n-1) & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & \cdots & -2 & -1 & \cdots & \partial^q - 3(n-1) \end{vmatrix}$$

代入引理 2.3, 则

$$\begin{aligned} & |\partial^q I - Q(G)| \\ &= |\partial^q - 2(n-1)| \left| \begin{vmatrix} (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} - J_{n-1} & -2J_{n-1} \\ -2J_{n-1} & (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} - J_{n-1} \end{vmatrix} - \frac{1}{\partial^q - 2(n-1)} \begin{vmatrix} J_{n-1} & J_{n-1} \\ J_{n-1} & J_{n-1} \end{vmatrix} \right| \\ &= |\partial^q - 2n + 2| \left| \begin{vmatrix} (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} - \left[J_{n-1} + \frac{1}{\partial^q - 2(n-1)} J_{n-1} \right] & -2J_{n-1} - \frac{1}{\partial^q - 2(n-1)} J_{n-1} \\ -2J_{n-1} - \frac{1}{\partial^q - 2(n-1)} J_{n-1} & (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} - \left[J_{n-1} + \frac{1}{\partial^q - 2(n-1)} J_{n-1} \right] \end{vmatrix} \right| \\ &= |\partial^q - 2n + 2| \left| \begin{vmatrix} (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} - \frac{\partial^q - 2n + 3}{\partial^q - 2n + 2} J_{n-1} & \frac{-2\partial^q + 4n - 5}{\partial^q - 2n + 2} J_{n-1} \\ \frac{-2\partial^q + 4n - 5}{\partial^q - 2n + 2} J_{n-1} & (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} - \frac{\partial^q - 2n + 3}{\partial^q - 2n + 2} J_{n-1} \end{vmatrix} \right| \end{aligned}$$

$$\text{令 } A = (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} - \frac{\partial^q - 2n + 3}{\partial^q - 2n + 2}J_{n-1}, B = \frac{-2\partial^q + 4n - 5}{\partial^q - 2n + 2}J_{n-1}$$

所以

$$\begin{aligned} |\partial^q I - Q(G)| &= (\partial^q - 2n + 2) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = (\partial^q - 2n + 2) |A + B| |A - B| \\ [A + B] &= (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} - \left(3 + \frac{2}{\partial^q - 2n + 2}\right)J_{n-1} \\ [A - B] &= (\partial^q - 3n + 4)I_{n-1} + J_{n-1} \end{aligned}$$

根据计算可得:

$$\begin{aligned} |A + B| &= (\partial^q - 3n + 4)^{n-2} \left(\partial^q - 6n + 7 - \frac{2n-2}{\partial^q - 2n + 2} \right) \\ |A - B| &= (\partial^q - 3n + 4)^{n-2} (\partial^q - 2n + 3) \\ |\lambda I - Q(G)| &= (\partial^q - 2n + 2) (\partial^q - 2n + 4)^{2n-4} (\partial^q - 2n + 3) \left[\partial^q - 6n + 7 - \frac{2n-2}{\partial^q - 2n + 2} \right] \end{aligned}$$

故双团图的距离无符号拉普拉斯矩阵对应的特征值为:

$$\partial_1^q = 3n - 4, (2n - 4 \text{重}), \partial_2^q = 2n - 3, \partial_3^q = \frac{8n - 9 + \sqrt{16(n-1)^2 + 1}}{2}, \partial_4^q = \frac{8n - 9 - \sqrt{16(n-1)^2 + 1}}{2}.$$

定理 3.7. 完全图 K_n 的 Estrada 指数为 $EE(G) = e^2 + e^{\frac{2}{n-1}}(n-1)$

证明: 完全图 K_n 的加权邻接矩阵为:

$$A_f(G) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{n-1} & \frac{2}{n-1} & \cdots & \frac{2}{n-1} \\ \frac{2}{n-1} & 0 & \frac{2}{n-1} & \cdots & \frac{2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{n-1} & \frac{2}{n-1} & \frac{2}{n-1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

则其对应的特征多项式为:

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_f(G)| &= \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{2}{n-1} & -\frac{2}{n-1} & \cdots & -\frac{2}{n-1} \\ -\frac{2}{n-1} & \lambda & -\frac{2}{n-1} & \cdots & -\frac{2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2}{n-1} & -\frac{2}{n-1} & -\frac{2}{n-1} & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\lambda + (n-1) - \frac{2}{n-1} \right) \left(\lambda + \frac{2}{n-1} \right)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

所对应的特征值 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{2}{n-1}$, 其中 λ_2 是 $(n-1)$ 重根, 所以其对应的 Estrada 指数为

$$EE(G) = e^2 + e^{\frac{2}{n-1}}(n-1)$$

定理 3.8. 完全等二部图 $K_{n,n}$ 的删去一个完备匹配之后的加权 Estrada 指数为:

$$EE(G) = e^2 + e^{-2} + (n-1) \left(e^{\frac{2}{n-1}} + e^{-\frac{2}{n-1}} \right)$$

证明: $K_{n,n}$ 删去一个完备匹配之后, 其对应的加权邻接矩阵为:

$$A_f(G) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \frac{2}{n-1}(J-I)_{n \times n} \\ \frac{2}{n-1}(J-I)_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

则其对应的特征多项式为:

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_f(G)| &= \begin{vmatrix} \lambda I_n & -\frac{2}{n-1}(J-I)_{n \times n} \\ -\frac{2}{n-1}(J-I)_{n \times n} & \lambda I_n \end{vmatrix} \\ &= |\lambda I_n| \left| \lambda I_n - \left[-\frac{2}{n-1}(J-I)_{n \times n} \right] \frac{1}{\lambda} I_n \left[-\frac{2}{n-1}(J-I)_{n \times n} \right] \right| \\ &= \lambda^n \left| \lambda I_n - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2}{n-1} \right)^2 (J-I)_{n \times n} (J-I)_{n \times n} \right| \\ &= \lambda^{n-n} \left| \lambda^2 I_n - \left(\frac{2}{n-1} \right)^2 [(n-2)J_n + I_n] \right| \\ &= \left[\lambda^2 - \frac{4}{n-1} + \frac{4(n-2)}{(n-1)^2} \right]^{n-1} \left[\lambda^2 - \frac{4}{n-1} - \frac{4(n-2)}{n-1} \right] \end{aligned}$$

其对应的特征值为: $\lambda_1 = \frac{2}{n-1}(n-1 \text{重}), \lambda_2 = -\frac{2}{n-1}(n-1 \text{重}), \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2$ 。

由此可得 $K_{n,n}$ 删去一个完备匹配之后的加权 Estrada 指数为:

$$EE(G) = e^2 + e^{-2} + (n-1) \left(e^{\frac{2}{n-1}} + e^{-\frac{2}{n-1}} \right)$$

4. 结论

本文通过对星图、完全二部图、双团图的刻画, 并运用相关计算公式, 求解出其对应的特殊能量。通过与已知结果进行比对, 明确了两类能量之间的大小关系, 进一步拓展了图能量的研究成果。此外, 依据加权邻接矩阵的概念以及 Estrada 指数的定义, 推导出完全图的加权 Estrada 指数, 以及完全等二部图去除一个完备匹配后的加权 Estrada 指数。未来该领域的研究可从以下几个方向深入拓展: 一方面, 可进一步研究更多图类的加权 Estrada 指数, 探索其与其它拓扑不变量之间的关系, 并推动其在复杂网络与化学图论中的应用; 另一方面, Seidel 谱的研究可延伸至路径图、圈图等典型图类, 并深入挖掘其与图的对称性、正则性等结构特征的内在联系。此外, 距离拉普拉斯与无符号拉普拉斯谱的理论体系尚待完善, 未来可系统研究更多图类在此框架下的谱性质, 建立其与图的直径、连通度等参数的联系, 并进一步比较不同能量指标之间的关系, 构建统一的广义能量理论。在应用层面, 这些谱理论成果可与图数据处理算法相结合, 为图神经网络的特征提取、网络中心性分析及图匹配等问题提供新的理论工具, 推动图谱理论在交叉学科中的创新应用。

参考文献

- [1] Estrada, E. (2000) Characterization of 3D Molecular Structure. *Chemical Physics Letters*, **319**, 713-718. [https://doi.org/10.1016/S0009-2614\(00\)00158-5](https://doi.org/10.1016/S0009-2614(00)00158-5)
- [2] 范益政, 郑剑. 一类非线性超图的 Estrada 指数[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2024, 48(6): 1-8.
- [3] 徐薇薇. 图的 Estrada 指数[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海大学, 2013.
- [4] Xu, B., Li, S., Yu, R. and Zhao, Q. (2019) On the Spectral Radius and Energy of the Weighted Adjacency Matrix of a Graph. *Applied Mathematics and Computation*, **340**, 156-163. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.08.012>
- [5] Aouchiche, M. and Hansen, P. (2013) Two Laplacians for the Distance Matrix of a Graph. *Linear Algebra and Its Applications*, **439**, 21-33. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.02.030>
- [6] 卢鹏丽, 刘文智. Indu-Bala 乘积图的广义距离谱[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2020, 41(9): 1366-1370.
- [7] Sherman, J. and Morrison, W.J. (1950) Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to a Change in One Element of a Given Matrix. *Annals of Mathematical Statistics*, **21**, 124-127. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729893>
- [8] Duncan, W.J. (1947) The Algebra of Continuum Systems. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 459-467.
- [9] Zhang, F. (2006) The Schur Complement and Its Applications. Springer Science Business Media. <https://doi.org/10.1007/b105056>