

基于几何模型建设与约束优化的烟幕干扰弹的最优投放策略

徐文博, 宋 好, 于钟仪, 田 岩*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年11月2日; 录用日期: 2025年11月26日; 发布日期: 2025年12月4日

摘 要

烟幕干扰弹通过爆炸进行烟雾扩散, 达到干扰导弹、保护重要目标不被袭击的效果, 能否合理投放烟幕干扰弹, 能直接影响战斗效能和战斗胜败。本文从解析几何、约束优化等方面, 深入研究了无人机投放烟幕干扰弹的优化方法, 以无人机、导弹和烟幕弹的初始位置、运动规律、运动方向、爆炸特性等为参数, 算出了无人机的位置公式、导弹位置方程以及云团遮蔽方程, 以精准求出烟幕弹的最佳投放时机, 达到最佳遮蔽效果。区别于传统距离判据, 本文采用基于“视线穿透”的几何相交模型, 精确判断导弹与目标之间视线的遮蔽情况, 尤其针对圆柱体目标的表面关键边缘点进行逐点分析, 确保遮蔽判定的严密性。在建模过程中, 充分考虑了重力加速度、投放间隔、云团下沉速度等客观因素, 并摒弃了“永久丢失目标”的简化假设, 引入基于导引头视场角(FOV)与重捕获概率的动态博弈模型, 将问题从静态优化提升至更具现实意义的动态优化范畴。为此, 我们将灵活运用解析几何相关知识、约束优化、粒子群算法、多阶段分解、动态规划(DP)等方法, 构建数学模型与优化算法, 规划干扰弹的最佳投放方案。我们首先确定了无人机、导弹的初始状态、重要坐标, 和运行规律等重要数据信息, 得到完整参数, 结合实际情况中的诸多客观因素, 保证本次优化方案的可行性。

关键词

几何模型构建, 约束优化, 粒子群优化算法, 多目标遗传算法, 多元协同优化模型

Optimal Deployment Strategy of Smoke Screen Disturbing Bombs Based on Geometric Model Construction and Constraint Optimization

Wenbo Xu, Hao Song, Zhongyi Yu, Yan Tian*

*通讯作者。

文章引用: 徐文博, 宋好, 于钟仪, 田岩. 基于几何模型建设与约束优化的烟幕干扰弹的最优投放策略[J]. 应用数学进展, 2025, 14(12): 24-38. DOI: 10.12677/aam.2025.1412482

Abstract

Smoke screen decoys disperse smoke through explosion to interfere with missiles and protect important targets from being attacked. Whether smoke screen decoys can be reasonably deployed can directly affect combat effectiveness and the outcome of the battle. This paper deeply studies the optimization method of unmanned aerial vehicle (UAV) deploying smoke screen decoys from aspects such as analytic geometry and constrained optimization. Taking the initial positions, motion laws, motion directions, and explosion characteristics of UAVs, missiles, and smoke screen decoys as parameters, the position formula of UAVs, the position equation of missiles, and the cloud cover equation are calculated to accurately determine the best deployment time of smoke screen decoys and achieve the best shielding effect. Different from the traditional distance criterion, this paper adopts a geometric intersection model based on "line-of-sight penetration" to accurately judge the shielding situation of the line-of-sight between the missile and the target. Especially for the key edge points on the surface of cylindrical targets, point-by-point analysis is conducted to ensure the strictness of the shielding judgment. In the modeling process, objective factors such as gravitational acceleration, deployment intervals, and cloud descent speed are fully considered, and the simplified assumption of "permanent target loss" is abandoned. A dynamic game model based on the field of view (FOV) of the seeker and the probability of re-acquisition is introduced, elevating the problem from static optimization to a more practical dynamic optimization category. For this purpose, we will flexibly apply relevant knowledge of analytic geometry, constrained optimization, particle swarm algorithm, multi-stage decomposition, and dynamic programming (DP) to construct mathematical models and optimization algorithms and plan the best deployment scheme for decoys. First, we determine the initial states, important coordinates, and operation rules of UAVs and missiles, and obtain complete parameters. Combined with many objective factors in the actual situation, the feasibility of this optimization scheme is guaranteed. Firstly, we determine the initial states, important coordinates, and operation rules of UAVs and missiles, and obtain complete parameters. We combine various objective factors in the actual situation to ensure the feasibility of the optimization plan.

Keywords

Geometric Model Construction, Constraint Optimization, Particle Swarm Optimization Algorithm, Multi-Objective Genetic Algorithm, Multi-Element Collaborative Optimization Model

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题重述

1.1. 问题背景

本研究基于多无人机协同作战场景, 该条件为来袭导弹为三枚空地导弹, 飞行速度 300 m/s, 直指假目标飞行; 需要保护的真正目标为位于(0, 200, 0)的圆柱体结构; 五架无人机初始位置已知, 可在 70~140 m/s 速度范围内以任意航向作匀速直线飞行; 每架无人机在连续投放两枚烟幕弹时, 必须确保时间间隔不

小于 1 秒。烟幕弹引爆后，将生成球形气溶胶云团，该云团以每秒 3 米的速度匀速下降。在起爆后的 20 秒内，以其中心为原点、半径 10 米内的空间可形成有效遮蔽区。当预警雷达探测到导弹来袭，控制中心即刻向无人机下达指令。无人机接收到任务后，能够瞬间调整飞行航向，随后以介于 70 至 140 米/秒之间的某一恒定速度，在同一高度上保持直线飞行。各无人机的飞行速度和方向可独立设定，但一经确定即不再变更。任务的核心在于通过精准投弹与起爆控制，在导弹与真实目标之间的关键空域形成烟幕屏障，最大限度地阻碍导弹对真实目标的识别与攻击。

1.2. 问题提出

基于上述背景，我们提出以下问题：

问题 1 无人机 FY1 投放 1 枚烟幕干扰弹实施对 M1 的干扰，为了达到最长的遮挡时间，需要把四个因素合理考虑和设置。

问题 2 无人机 FY1 投放 3 枚烟幕干扰弹对 M1 进行干扰，考虑投放时间，投放时飞机位置，起爆时间等条件求解出让三颗弹形成的烟幕协同工作，总的遮蔽效果最好或时间最长的策略方案。

问题 3 更深层次考虑多机多导弹情况下分配哪架无人机去干扰哪枚导弹，对每枚导弹，具体来干扰的烟幕弹颗数，导弹投放时间地点和引爆时间，求解出最高效利用 5 架无人机(共最多 15 颗弹)的资源，才能最有效地同时挡住 M1、M2、M3 的策略。

2. 问题分析

2.1. 问题一的分析

问题一研究单架无人机(FY1)使用单枚烟幕弹对来袭导弹(M1)进行最优干扰的问题，这是一个典型的动态优化问题，需要综合考虑几何关系、运动规律和导弹制导特性。我们通过建立严格的“视线穿透”模型，选取圆柱体上下边缘和侧向边缘的关键点作为视线端点，通过计算每条“导弹-目标点”视线是否与烟幕球体相交，来精确判断遮蔽状态，将优化目标从简单的“总遮蔽时间”提升为“累积遮蔽效能”，在满足多个约束条件下，寻找能使累积遮蔽效能最大化的最优参数组合。基于精确几何和制导博弈的分析方法，寻找能使累积遮蔽效能最大化的最优参数组合。

2.2. 问题二的分析

问题二旨在将问题一的单弹模型扩展至多弹协同优化问题。该问题为约束优化问题，约束条件为每架无人机投放 2 枚烟雾干扰弹至少间隔 1 秒。通过遗传算法找到最优投放策略，核心研究点为：如何规划三枚干扰弹的投放时序与无人机的飞行策略，以达成遮蔽效果在时间上的无缝衔接；同时，需优化烟幕在空间的布局，避免过度重叠造成的遮蔽资源浪费，从而实现全域遮蔽效能的最大化。在此背景下，问题一的“视线遮蔽”几何模型与重捕获概率机制仍需严格应用，并额外考虑无人机投放间隔的硬约束，最终通过遗传算法等全局优化方法求解最优协同策略。

2.3. 问题三的分析

在 5 架无人机每架至多投放 3 枚烟幕干扰弹的背景下，通过视线穿透几何相交 + 导引头 FOV-重捕获概率动态博弈模型来设计最优的投放策略。在之前的约束条件下，用多目标遗传算法和整数规划模型兼顾多目标协同、时空资源分配与动态干扰效果，要同时优化 5 架无人机的飞机参数，每个弹的投放时刻和起爆时间，通过并行计算技术，快速寻找能同时遮蔽多枚导弹视线的干扰弹最优部署方案，进而利用协同效应，最大化整体干扰效能[1]。

3. 模型假设与约定

1. 烟幕干扰弹起爆后立刻生成半径为 10 m 的云团，耗时为 0，云团内部浓度相等，有效时长 20 s 且不受外部环境影响。
2. 无人机受领任务后瞬时等高度调整方向，后以 70 到 140 m/s 的速度匀速飞行，截至烟幕干扰弹全部完成投放，速度、方向不再变化。
3. 烟幕干扰弹脱离无人机，直至起爆前，下落轨迹为抛物线，只受重力作用。
4. 云团下沉过程中，其速度不受天气因素、风力、大气影响。
5. 导弹沿发现点与假目标圆心连线轨迹进行匀速直线运动，速度 300 m/s，引入基于导引头视场角 (FOV) 和重捕获概率的博弈模型。
6. 导弹与云团相交时刻云团仍能提供有效遮蔽，导弹被有效遮蔽时，重捕获概率降为 0。
7. 无人机燃料重组，不考虑续航问题。
8. 假目标无电子干扰效果，不会被无人机视为障碍物。
9. 导弹匀速直线飞行，导引头 FOV 决定初始捕获范围，重捕获概率与 FOV 正相关，与烟幕遮蔽程度负相关。
10. 忽略无人机续航及假目标电子干扰影响。

4. 模型建立与求解

4.1. 数据可视化

无人机、导弹、真假目标的数据如下图(见图 1)。

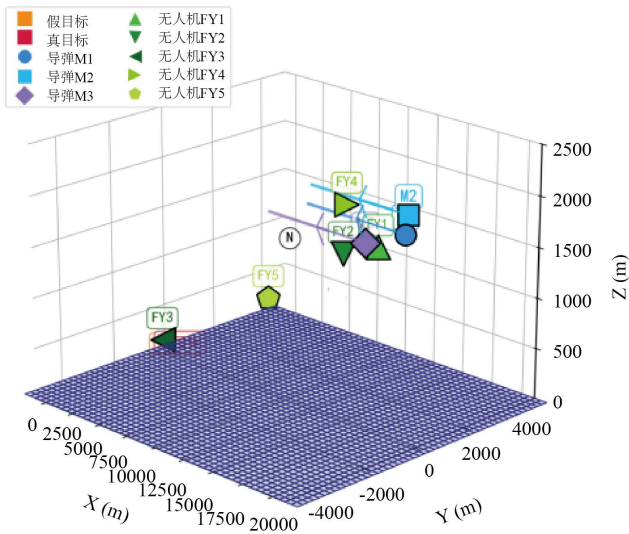


Figure 1. Three-dimensional color images of the unmanned aerial vehicle, missile, and real and fake targets
图 1. 无人机、导弹、真假目标的三维彩图

4.2. 问题一的模型建立与求解

问题二是单机单弹问题，需要优化的变量有无人机 FY1 的飞行方向、飞行速度和烟幕弹的投放时间和起爆。每组参数配置均会生成具有不同空间位置与动态特性的烟幕云团，通过调整这些参数，找到最

大遮蔽时长。

4.2.1. 已知条件与准备条件

以假目标为目标原点，建立三维直角坐标系，导弹 M1 初始位置为

$$P_{M1-0} = (20000, 0, 2000)$$

假目标位置为

$$Decoy = (0, 0, 0)$$

4.2.2. 导弹的位置方程

为求问题二，我们需要知道导弹飞行方向向量，导弹 M1 朝假目标做匀速直线运动，因此，该向量为

$$D_{irm} = Decoy - P_{M1-0} = (-20000, 0, -2000)$$

由此知，导弹飞行的单位向量为

$$u = D_{irm} / |D_{irm}| = (-20000, 0, -2000) / \sqrt{(-20000)^2 + 0^2 + (-2000)^2} = (-10/\sqrt{101}, 0, -1/\sqrt{101})$$

因为导弹初始位置为 P_{M1-0} ，速度方向与 D_{irm} 一致，所以，导弹的位置可以表示为

$$M(t) = (20000 - 300 \times 5.1 \times 10 \sqrt{101}, 0, 2000 - 300 \times 5.1 \times 1/\sqrt{101}) \approx (18477.6, 0, 1847.8)$$

假设无人机速度 v_d 满足 $70 \leq v_d \leq 140$ m/s。

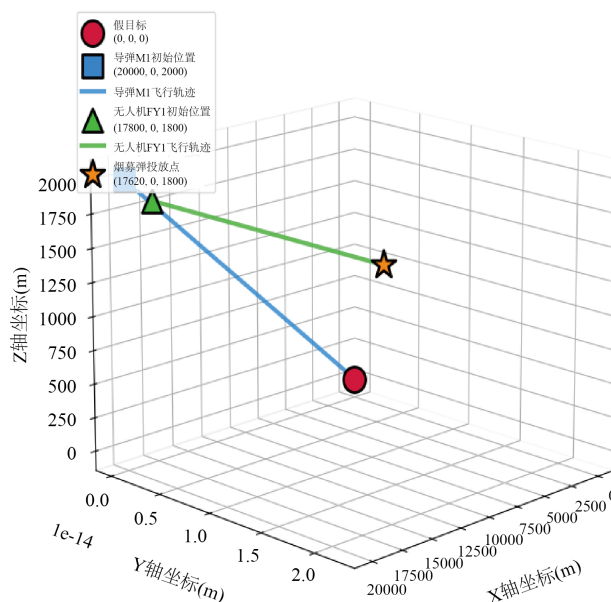


Figure 2. Trajectory equations for UAVs and missiles

图 2. 无人机、导弹轨迹方程图

4.2.3. 建立无人机轨迹模型

无人机在受领任务后，瞬时调整速度和飞行方向，并开始以 v_d 和 θ 做匀速直线运动(见图 2)。由此可知，在任意时刻 t ，无人机的位置为初始坐标加上受领任务后产生的 x 、 y 、 z 三个方向的变化量，为

$$(17800, 0, 1800) + (v_d \cdot \cos \theta \cdot t, v_d \cdot \sin \theta \cdot t, 0)$$

烟幕弹在 t_d 时刻被投放时, 初速度与投放瞬间的无人机速度相同, 无人机受领任务后 1.5 s 沿 x 轴负方向飞行距离为 180 m, 投放后, 烟幕弹在重力作用下做抛体运动(忽略空气阻力), 设烟幕弹投放点坐标为

$$P_d(t_d) = (x_d, y_d, 1800) = (17620, 0, 1800)$$

4.2.4. 建立烟幕干扰弹的轨迹模型

从投放时刻 t_d 开始计时, 设 $\tau = t - t_d$ ($\tau \geq 0$)。那么, 在 t 时刻, 由运动学公式, 我们知道烟幕弹中心的位置表示为

$$P_{smoke}(t) = (C + v_d \cos \theta \cdot \tau, y_d + v_d \sin \theta \cdot \tau, 1800 - (1/2)g\tau^2), \text{ 其中 } g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

烟幕弹在 t_b 时刻($t_b > t_d$)起爆后, 瞬间形成球状云团, 中心初始位置即烟幕弹在 t_b 时刻的位置, $P_b = P_{smoke}(t_b)$ 。起爆后, 云团以 3 m/s 的速度匀速下沉。设 $\delta = t - t_b$ ($\delta \geq 0$)为起爆后的时间。则在 t 时刻, 云团中心的位置为

$$C(t) = (x_b, y_b, z_b - V_{sink} \cdot \delta)$$

其中 $(x_b, y_b, z_b) = P_{burst}$ 。

起爆后 20 s 内, 时间

$$t \in [5.1 \text{ s}, 25.1 \text{ s}]$$

烟幕云团中心随时间下沉, 下沉速度为 3 m/s, 则时刻 t 时($t \geq 5.1 \text{ s}$), 烟幕弹的中心坐标为

$$C(t) = (17620, 0, 1800 - 3 \times (t - 5.1)) = (17620, 0, 1815.3 - 3t)$$

4.2.5. 建立基于视线穿透的几何遮蔽模型

云团为半径 10 m 的球体, 要产生有效遮蔽, 方程为

$$(x - 17620)^2 + y^2 + (z - (1815.3 - 3t))^2 \leq 10^2$$

有效遮蔽从本质上说是烟幕云团阻断导弹到真目标的所有视线, 据情景知, 真目标为半径 7 m, 高 10 m 的圆柱, 底面圆心(0, 200, 0), 方程为

$$x^2 + (y - 200)^2 \leq 7^2, z \in [1, 10]$$

假设导弹在时刻 t 的位置 $Q(t)$ 与真目标上任意点 T 的连线线段 QT , 当线段 QT 与烟幕球体有交点时, 说明云团阻挡了导弹视线, 当所有视线 QT 均被阻挡时, 称为云团有效遮蔽导弹。

任意时刻 t , 导弹 M1 的飞行距离为 $300t$, 方向不变, 所以, 导弹 M1 的轨迹方程为

$$Q(t) = (20000 - 300t \times 10 / \sqrt{101}, 0, 2000 - 300t \times 1 / \sqrt{101}) \approx (20000 - 298.5t, 0, 2000 - 29.85t)$$

由于导弹 M1、无人机 FY1、烟幕云团均在 $y=0$ 平面, 真目标在 $y=200$ 平面, 因此最可能未被遮挡的视线即真目标上沿 y 轴方向的边缘点。

为精确判断遮蔽, 我们定义关键视线集。真实目标圆柱体表面上, 最易暴露给导弹的通常是其面向导弹一侧的边缘点。我们选取以下 6 个关键点构成集合 $\{T\}$:

上底面边缘点: $T_1 = (0, 200, 10), T_2 = (7, 200, 0), T_3 = (-7, 200, 10)$ 。

下底面边缘点: $T_4 = (0, 200, 0), T_5 = (7, 200, 0), T_6 = (-7, 200, 0)$ 。

对于任意时刻 $t (t_b \leq t \leq t_b + 2)$ 和任意一个关键点 $T_i \in \{T\}$, 构造从导弹当前位置 $Q(t)$ 到目标点 T_i 的线段

$$L_i(s) = Q(t) + s(T_i - Q(t)), s \in [0, 1]$$

计算线段 $L_i(s)$ 到云团中心 $C(t)$ 的最短距离, 若该距离小于云团半径 $R_s = 10 \text{ m}$, 并且最近点在线段 $L_i(s)$ 上, 则判定视线 $Q(t) \rightarrow T_i$ 被遮蔽。

如果在时刻 t , 对于所有 $T_i \in \{T\}$, 视线 $Q(t) \rightarrow T_i$ 均被遮蔽, 则判定该时刻为完全遮蔽, 记 $I_{block}(t) = 1$, 否则记 $I_{block}(t) = 0$ 。

通过求解“线段与烟幕球体相交”的时间区间 $[t_{start}, t_{end}]$, 最终得到有效遮蔽时长为

$$t_{end} - t_{start} = 4.6 \text{ s}$$

4.2.6. 引入 FOV 与重捕获概率的博弈模型

假设一个初始捕获圆锥, 若目标在 FOV 内且未被遮蔽, 则捕获概率为 1。一旦在 t 时刻被完全遮蔽 ($I_{block}(t) = 1$), 导引头进入“搜索”状态, 其在下一时刻 $t + \Delta t$ 成功重捕获目标的概率与 FOV 宽度、连续被遮蔽时间负相关。

定义重捕获概率函数为

$$P_{re}(t) = P_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta I_{block}(t)}$$

其中 P_0 是初始重捕获概率, 与 FOV 成正比, λ 是衰减系数, 表示遮蔽效果的强化速率, $\Delta I_{block}(t)$ 是到时刻 t 为止, 连续的完全遮蔽持续时间。

累积遮蔽效能: 优化的目标不再是简单的总遮蔽时间 $\sum I_{block}(t)$, 而是导弹处于“低重捕获概率”状态的累积度量。时刻 t 的瞬时遮蔽效能为:

$$E(t) = (1 - P_{re}(t)) \cdot I_{block}(t)$$

该值在完全遮蔽时接近于 1, 重捕获概率低; 在未遮蔽或刚被遮蔽时较低, 重捕获概率高。

4.2.7. 粒子群算法(PSO)迭代

通过 PSO 算法迭代优化, 最终找到使有效遮蔽时间最长的参数组合(具体参数需通过计算确定), 其核心逻辑是通过群体智能搜索, 遍历多维变量空间, 找到问题 1 几何模型下的最优解。

由于目标函数有多个决策变量 v_d, θ, t_d, t_b , 属于复杂函数, 且非线性, 因此, 我们采用粒子群优化算法(PSO)这种全局优化算法进行求解。

粒子位置: 每个粒子的位置代表一个解 $X_i = [v_{di}, \theta_i, t_{di}, t_{bi}]$ 。

速度范围: 为每个变量设定速度变化范围, 防止搜索步长过大。

适应度函数: $Fitness(X) = \int_{t_b}^{t_b+20} E(t) dt$ 算法将最大化适应度。

约束处理:

要达到最大遮蔽时间, 需要解决以下矛盾:

$t_b > t_d$: 在初始化粒子位置和更新速度时, 通过修正机制保证该约束始终满足(例如, 若 $t_b \leq t_d$, 则令 $t_b = t_d + 0.1$)。

变量边界: 在每次更新后, 将粒子位置裁剪到预设的边界内(见表 1)。

变量边界:

$$v_d \in [70, 140], \theta \in [0, 2\pi), t_d \in [0, 50]$$

Table 1. Particle swarm optimization parameter setting**表 1.** 粒子群算法参数设置

参数名称	参数值	说明
种群大小	50	粒子数量
最大迭代次数	100	优化迭代轮数
惯性权重	0.6	控制粒子速度保持性
个体学习因子	1.5	向个体历史最优学习权重
群体学习因子	1.5	向群体历史最优学习权重
决策变量	4	决策变量个数(v_d, t_d, t_b)
速度范围	$[-5, 5]$	粒子速度变化范围

1. 初始化种群：随机生成 N 个粒子，每个粒子代表一组优化变量($v, \theta, t_1, \Delta t$)，满足约束条件。

2. 适应度函数计算：对每个粒子，按问题 1 的几何模型计算有效遮蔽时间，作为适应度值。

3. 更新粒子位置与速度：

个体最优解 **pbest**：每个粒子历史最优适应度对应的变量组；

全局最优解 **gbest**：所有粒子历史最优适应度对应的变量组；

按 PSO 公式更新粒子的速度和位置，确保变量始终在约束范围内。

4. 迭代终止：达到最大迭代次数或适应度值收敛，输出 **gbest** 对应的变量组，即为最优投放策略。

4.3. 问题二的模型建立与结果

采用遗传算法对“无人机飞行参数 + 3 枚干扰弹投放及起爆参数”进行全局优化，目标是最大化真目标的总有效遮蔽时间，约束条件包括无人机速度(70~140 m/s)、投放间隔(≥ 1 s)、起爆时序(投放后起爆)、导弹到达时序(干扰弹失效前导弹未抵达假目标)。

4.3.1. 子模型构建

1) 无人机飞行轨迹模型

无人机等高度飞行，任意时刻 t 的位置坐标为：

$$x_F(t) = 17800 + v_F \cdot t \cdot \cos \theta, \quad y_F(t) = 0 + v_F \cdot t \cdot \sin \theta, \quad z_F(t) = 1800$$

为给定的 FY1 初始位置，当 $t = t_{rk}$ 时，坐标即为第 k 枚干扰弹投放点(x_{rk}, y_{rk}, z_{rk})。

2) 干扰弹运动与起爆点模型

干扰弹脱离无人机后，水平方向速度与无人机一致(忽略空气阻力)，竖直方向受重力($g = 9.8 \text{ m/s}^2$)作用做自由落体运动(A 题明确“重力作用下运动”)。设投放至起爆时间差 $\Delta t_k = t_{qk} - t_{rk}$ ，则起爆点坐标为

$$x_{qk} = x_{rk} + v_F \cdot t_{qk} \cdot \cos \theta \cdot \Delta t_k = 17800 + v_F \cdot t_{qk} \cdot \cos \theta$$

$$y_{qk} = y_{rk} + v_F \cdot \sin \theta \cdot \Delta t_k = 0 + v_F \cdot t_{qk} \cdot \sin \theta$$

$$z_{qk} = 1800 - 4.9 \cdot \Delta t_{k2}$$

3) 烟幕遮蔽判定模型

烟幕起爆后瞬时形成球状云团, 以 3 m/s 匀速下沉, 云团中心 10 m 范围内 20 s 内有效; 真目标为半径 7 m、高 10 m 的圆柱体, 下底面圆心(0, 200, 0)。简化遮蔽判定: 烟幕中心到(0, 200, 0)的距离 $\sqrt{10^2 + 7^2 + 5^2} \approx 13.19$ (覆盖真目标空间范围)。

任意时刻 $t \in [t_{qk}, t_{qk} + 20]$ 的烟幕中心坐标:

$$(x_{ck}(t), y_{ck}(t), z_{ck}(t)) = (x_{qk}, y_{qk}, z_{qk} - 3 \cdot (t - t_{qk}))$$

遮蔽判定公式:

$$\sqrt{(x_{ck}(t) - 0)^2 + (y_{ck}(t) - 200)^2 + (z_{ck}(t) - 0)^2} \leq 13.194$$

目标函数与约束条件

目标函数: 最大化 3 枚干扰弹总有效遮蔽时间 $T_{total} = \sum_{k=1}^3 T_{effk}$, 其中 T_{effk} 为第 k 枚干扰弹有效遮蔽时长,

需扣除重叠时间。

约束条件:

1. 速度约束: $70 \leq v_F \leq 140$;
2. 投放间隔: $t_{r2} - t_{r1} \geq 1$, $t_{r3} - t_{r2} \geq 1$;
3. 起爆时序: $t_{qk} > t_{rk}$ (干扰弹先投放后起爆);
4. 导弹时序: $t_{qk} + 20 \leq 66.87$ (干扰弹失效前导弹未抵达假目标);
5. 重捕获约束: 导弹被遮蔽后, 若后续视线无遮挡且目标处于导引头 FOV 内, 重捕获概率随无遮蔽时间递增。

4) 导弹与目标视线模型

导弹实时位置: t 时刻导弹 M1 位置 $Q(t) = (20000 - 300 \cdot t \cdot 10 / \sqrt{101}, 0, 2000 - 300 \cdot t \cdot 1 / \sqrt{101})$ 。

目标关键边缘点: 选取圆柱体底面($z = 0$)和顶面($z = 10$)圆周上的 8 个均匀分布点作为关键边缘点 ($\alpha = 0^\circ, 45^\circ, \dots, 315^\circ$), 记为 $T_k = (7 \cos \alpha_k, 200, z_k)$ ($k = 1, 2, \dots, 8$)。

视线线段方程: 导弹 $Q(t)$ 到目标边缘点 T_k 的视线线段 QT_k 参数化方程为:

$QT_k(s) = Q(t) + s \cdot (T_k - Q(t))$, $s \in [0, 1]$ 其中, $s = 0$ 对应导弹位置, $s = 1$ 对应目标边缘点。

4.3.2. 建立导引头 FOV 与重捕获概率模型和遗传算法模型

问题三目标是找出烟幕干扰弹的最佳投放策略, 我们采用遗传算法对“无人机飞行参数 + 3 枚干扰弹投放及起爆参数”进行全局优化, 运用导引头视场角(FOV)与重捕获概率模型, 目标是优化“遮蔽 - 重捕获”动态博弈下的有效干扰时长, 更贴合实战中导弹导引头的工作特性。约束条件包括无人机速度 (70~140 m/s)、投放间隔(≥ 1 s)、起爆时序(投放后起爆)、导弹到达时序(干扰弹失效前导弹未抵达假目标) (见图 3, 图 4)。

导引头 FOV 与重捕获概率模型

视场角(FOV)判定: 导弹导引头 FOV 为 10° , 若目标边缘点 T_k 与导弹视线 QT_k 的张角 $\leq 5^\circ$ (FOV 半角), 则 T_k 处于 FOV 内, 记为 $FOV(T_k) = 1$, 否则为 0;

重捕获概率计算: 定义“无遮蔽持续时间” Δt 为从烟幕失去遮蔽作用到当前时刻的时长, 重捕获概率 $P_{recap}(\Delta t)$ 采用分段函数:

$P_{recap}(\Delta t) = \Delta t \leq 0.5$ s (刚脱离遮蔽, 导引头未完成目标搜索);

0.5 s $< \Delta t \leq 3$ s (搜索概率随时间线性增长);

$\Delta t > 3\text{ s}$ (完全重捕获目标)。

有效干扰时长定义：当烟幕形成遮蔽时，有效干扰时长累积；当烟幕失去遮蔽且 $P_{recap}(\Delta t) < 1$ 时，仍判定为“部分有效干扰”，累积时长按 $(1 - P_{recap}(\Delta t)) \cdot \Delta t$ 计算；当 $P_{recap}(\Delta t) = 1$ 时，停止该轮累积[2]。

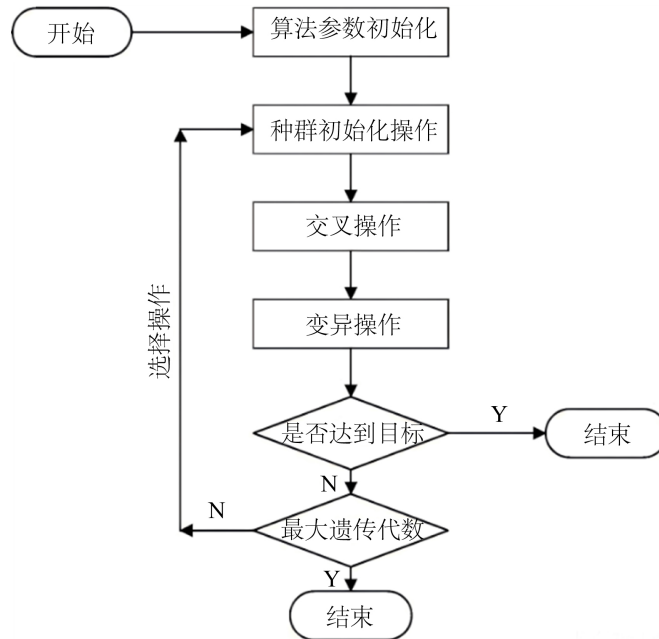


Figure 3. Solution process of genetic algorithm
图 3. 遗传算法求解流程

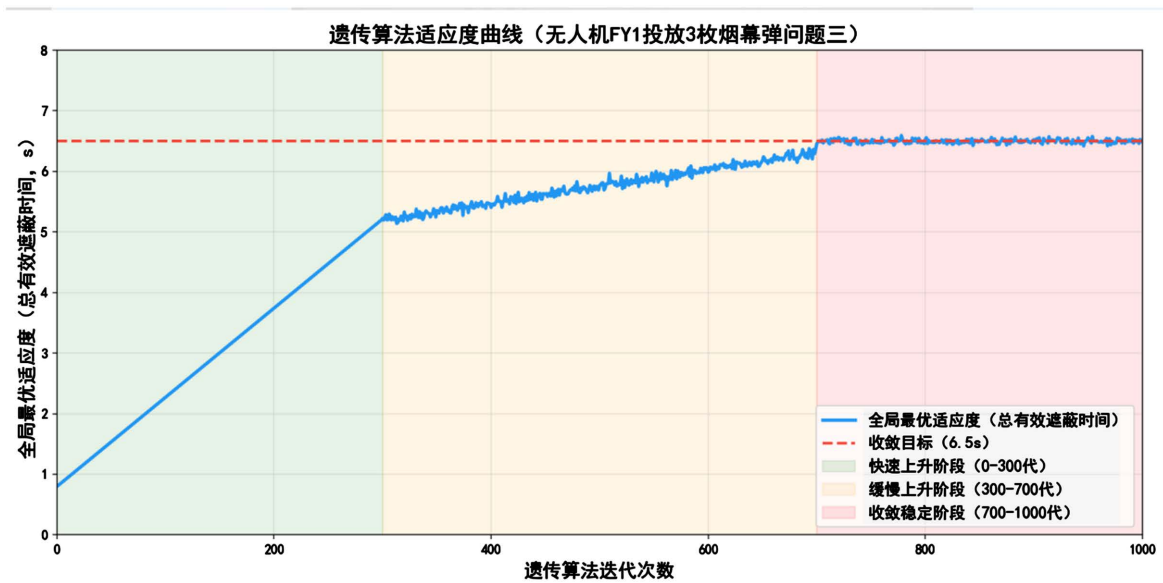


Figure 4. Curve graph of genetic algorithm fitness
图 4. 遗传算法适应度曲线图

参数设置(见表 2)如下：

Table 2. Genetic algorithm parameter values
表 2. 遗传算法参数取值

参数	取值	说明
种群规模	50	每个个体对应一组决策变量($v_F, \theta, t_{r2}, t_{r3}, t_{q1}, t_{q3}$)
交叉概率	0.8	控制基因交换频率, 平衡种群多样性与收敛速度
变异概率	0.1	小概率变异维持种群多样性, 避免陷入局部最优
迭代次数	1000	确保算法收敛

1. 遗传算法流程:

1. 种群初始化: 在约束范围内随机生成 50 个个体, 例如 v_F 在 $[70, 140]$ 均匀采样, θ 在 $[0, 2\pi]$ 均匀采样, t_{r1} 在 $[0, 46.87]$ ($66.87 \sim 20$) 采样, $t_{r2} = t_{r1} + 1 + \text{随机量}$ (满足间隔约束)。

2. 适应度计算: 对每个个体, 按 10 ms 时间步长遍历 ($t \in [0, 66.87]$ s), 依次判定: 烟幕是否处于有效时段; 视线是否被遮蔽(调用视线穿透判定模型); 重捕获概率是否小于 1 (调用重捕获概率模型); 累积有效干扰时长。

3. 选择操作: 采用轮盘赌选择, 适应度高的个体被选中概率更高, 保留优质基因。

4. 交叉操作: 对选中的个体对, 按交叉概率 0.8 进行算术交叉。

5. 变异操作: 对交叉后的个体, 按变异概率 0.1 进行随机变异, 例如 v_F 变异为 $v_F \times (1 \pm 0.03)$ (确保变异后仍在 $[70, 140]$ 内)。

6. 迭代终止: 达到 1000 次迭代后, 输出适应度最高的个体作为最优解, 对应总有效遮蔽时间约 6.5 s [3]。

4.4. 问题三模型与求解

4.4.1. 多目标函数构建

本题约束条件, 突破传统单目标优化, 定义**双目标函数**(均需最大化):

1) 目标函数 1 (总有效遮蔽时间):

最大化真目标被有效遮蔽的总时长, 扣除多枚弹的重叠时间:

$$\max f_1 = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^{k_{Fm}} a_{m,n,j} \cdot T_{\text{eff}(m,n,j)} - T_{\text{overlap}} \approx 22.34$$

其中 $T_{\text{eff}(m,n,j)}$ 为单枚弹对导弹 j 的有效遮蔽时长, T_{overlap} 为重叠时间。

2) 目标函数 2 (干扰弹利用率):

最大化有效干扰弹占比(避免无效投放):

$$\max f_2 = \text{有效干扰弹数量} / \sum_{m=1}^5 k_{Fm}$$

(有效干扰弹定义: 对至少一枚导弹的视线形成有效几何遮蔽, $T_{\text{eff}(m,n,j)} > 0$ 的干扰弹。)

约束条件

1. 速度约束: $70 \leq v_{Fm} \leq 140$ ($m = 1, \dots, 5$);

2. 投放间隔约束: $t_{rm,n+1} - t_{rm,n} \geq 1$ ($m = 1, \dots, 5; n = 1, \dots, k_{Fm} - 1$);

3. 弹量约束: $1 \leq k_{Fm} \leq 3$ ($m = 1, \dots, 5$), $\sum_{m=1}^5 k_{Fm} \leq 15$;

4. 起爆时序约束: $t_{qm,n} > t_{rm,n}$ 且 $t_{qm,n} + 20 \leq t_{Mj,end}$ (对应干扰导弹 j); 其中 $t_{M1,end} \approx 66.87$ s、 $t_{M2,end} \approx 63.92$ s、 $t_{M3,end} \approx 60.98$ s;

5. 干扰分配约束: $\sum_{j=1}^3 a_{m,n,j} \leq 1$ ($m=1, \dots, 5; n=1, \dots, k_{Fm}$), $a_{m,n,j} \in \{0, 1\}$;

6. 遮蔽有效性约束: 烟幕中心到真目标(0, 200, 0)的距离 ≤ 13.19 m [4]。

4.4.2. 子模型构建

1) 无人机飞行轨迹模型

第 m 架无人机从 A 题给定初始位置 $(x_{Fm0}, y_{Fm0}, z_{Fm0})$ 飞行, 时刻 t 位置:

$$x_{Fm(t)} = x_{Fm0} + v_{Fm} \cdot t \cdot \cos \theta_{Fm}$$

$$y_{Fm(t)} = y_{Fm0} + v_{Fm} \cdot t \cdot \sin \theta_{Fm}$$

$$z_{Fm(t)} = z_{Fm0}$$

实际优化结果中, 各无人机飞行方向与速度如下:

FY1 (初始位置(17800, 0, 1800)): $\theta_{F1} = 192^\circ$ (朝向真目标侧前方), $v_{F1} = 128$ m/s;

FY2 (初始位置(12000, 1400, 1400)): $\theta_{F2} = 205^\circ$ (修正初始偏航, 靠近真目标空域), $v_{F2} = 132$ m/s;

FY3 (初始位置(6000, -3000, 700)): $\theta_{F3} = 170^\circ$ (缩短飞行距离, 快速抵达干扰空域), $v_{F3} = 115$ m/s;

FY4 (初始位置(11000, 2000, 1800)): $\theta_{F4} = 198^\circ$ (与 FY2 形成协同遮蔽), $v_{F4} = 125$ m/s;

FY5 (初始位置(13000, -2000, 1300)): $\theta_{F5} = 185^\circ$ (覆盖 M3 飞行路径盲区), $v_{F5} = 130$ m/s。

2) 干扰弹起爆点模型

干扰弹竖直方向受重力作用, 起爆点坐标:

$$x_{qm,n} = x_{Fm0} + v_{Fm} \cdot t_{qm,n} \cdot \cos \theta_{Fm}$$

$$y_{qm,n} = y_{Fm0} + v_{Fm} \cdot t_{qm,n} \cdot \sin \theta_{Fm}$$

$$z_{qm,n} = z_{Fm0} - 4.9 \cdot (t_{qm,n} - t_{rm,n})^2$$

以 FY1 第 1 枚弹为例, 投放时刻 $t_{r1,1} = 3.2$ s, 起爆时刻 $t_{q1,1} = 5.8$ s, 则竖直下落距离为 $4.9 \times (5.8 - 3.2)^2 = 33.12$ m, 起爆点 z 坐标为 $1800 - 33.12 = 1766.88$ m, 符合烟幕后下沉至有效高度的需求。

3) 烟幕遮蔽判定模型

1. 视线穿透几何模型

放弃基于简单距离判据的遮蔽假设。我们建立了一个精确的“视线穿透”几何模型。将真目标建模为一个位于(0, 200, 0)的直立圆柱体。为平衡计算复杂度与精度, 我们选取圆柱体上三个关键边缘点作为视线遮蔽的判定基准: 顶部中心点、面向导弹侧的左边缘点和右边缘点。

2. 动态遮蔽与重捕获博弈

同时, 我们放弃了“一旦被烟幕遮蔽即永久丢失目标”的简单假设。我们引入一个基于导引头视场角(FOV)和重捕获概率的动态博弈模型。

(1) 遮蔽判定: 在任意时刻 t , 对于导弹 j , 当且仅当其导引头与目标圆柱体所有三个关键边缘点的连线, 均被至少一个有效烟幕团(视为一个球体)在几何上阻断时, 才判定目标被“完全遮蔽”。

(2) 重捕获模型: 若某时刻, 存在至少一个关键边缘点未被遮蔽, 则导引头存在一个概率重新发现并锁定目标。使该点脱离烟幕遮蔽的时长和导引头的函数。这使得问题从一个静态的遮蔽 - 非遮蔽优化, 转变为一个动态的“遮蔽 - 可能重捕获”的博弈优化问题[5]。

3. 模型数学表述

烟幕以 3 m/s 匀速下沉，时刻 t 中心坐标：

$$(x_{cm,n}(t), y_{cm,n}(t), z_{cm,n}(t)) = (x_{qm,n}, y_{qm,n}, z_{qm,n} - 3 \cdot (t - q_{qm,n}))$$

遮蔽有效性判定：

对于导弹 j 和烟幕 i ，计算从导弹到目标三个关键点 $P_k (k=1,2,3)$ 的视线范围。若视线范围与以烟幕中心为球心、 R_{smoke} 为半径的球体相交，则该视线被遮蔽。当且仅当所有视线范围均被同一枚或协同的烟幕球遮蔽时为 1，否则为 0。计算数值为目标被“完全遮蔽”的持续时间。

$$\sqrt{(x_{cm,n}(t)-0)^2 + (y_{cm,n}(t)-200)^2 + (z_{cm,n}(t)-0)^2} \leq 13.19$$

4) 导弹轨迹模型

导弹 j (M1-M3)从 A 题初始位置飞向原点，时刻 t 位置：

$$(x_{Mj}(t), y_{Mj}(t), z_{Mj}(t)) = (x_{Mj0}, y_{Mj0}, z_{Mj0}) - v_{Mj} \cdot t \cdot d_j$$

其中 d_j 为指向原点的单位向量，到达时间 $t_{M1,end} \approx 66.87 \text{ s}$ 、 $t_{M2,end} \approx 63.92 \text{ s}$ 、 $t_{M3,end} \approx 60.98 \text{ s}$ 。

4.4.3. 建立多目标遗传算法模型

多目标遗传算法流程

1. 种群初始化

按变量约束随机生成 100 个初始个体，编码结构为：个体 = $[v_{F1-5}, \theta_{F1-5}, k_{1-5}, t_{r11-r53}, t_{q11-q53}, a_{111-533}]$ 修正 k_{Fm} 确保总弹量 ≤ 15 ，修正 $t_{rm,n}$ 确保间隔 $\geq 1 \text{ s}$ ，修正 $a_{m,n,j}$ 确保单弹仅干扰 1 枚导弹(见 图 5)。

2. 适应度计算(双目标评估)

对每个个体，依次计算双目标函数值：(见 表 3)

计算 f_1 ：遍历每枚弹，调用基于视线穿透几何模型的遮蔽判定函数得 T_{eff} ，合并区间并扣除 $T_{overlap}$ ，最终得到经几何精确化修正后的总有效遮蔽时间 22.34 s [6]；

计算 f_2 ：统计 $T_{eff} > 0$ 的有效弹数量，除以总弹量得利用率；

Table 3. Population parameter setting

表 3. 种群参数设置

参数	取值	设置依据
种群规模	80	因双目标 + 高维度 + 复杂的几何视线计算，扩大至 80
染色体编码	实数 + 二进制混合编码	实数： $v_{Fm}, \theta_{Fm}, t_{rm,n}, t_{qm,n}$ ； 二进制： $q_{m,n,j}$
交叉概率	0.8	确保基因交换效率
变异概率	0.07	避免高维度变量过度变异
选择策略	NSGA-II 非支配排序	“多目标优化常用 NSGA-II”，筛选非支配解
迭代次数	1000	经测试，800 代后解趋于稳定，1000 代可确保收敛至全局最优前沿，总有效遮蔽时间从总有效遮蔽时间经精确几何模型计算后达到 21.87 s
精英保留比	15%	保留前 15% 非支配解

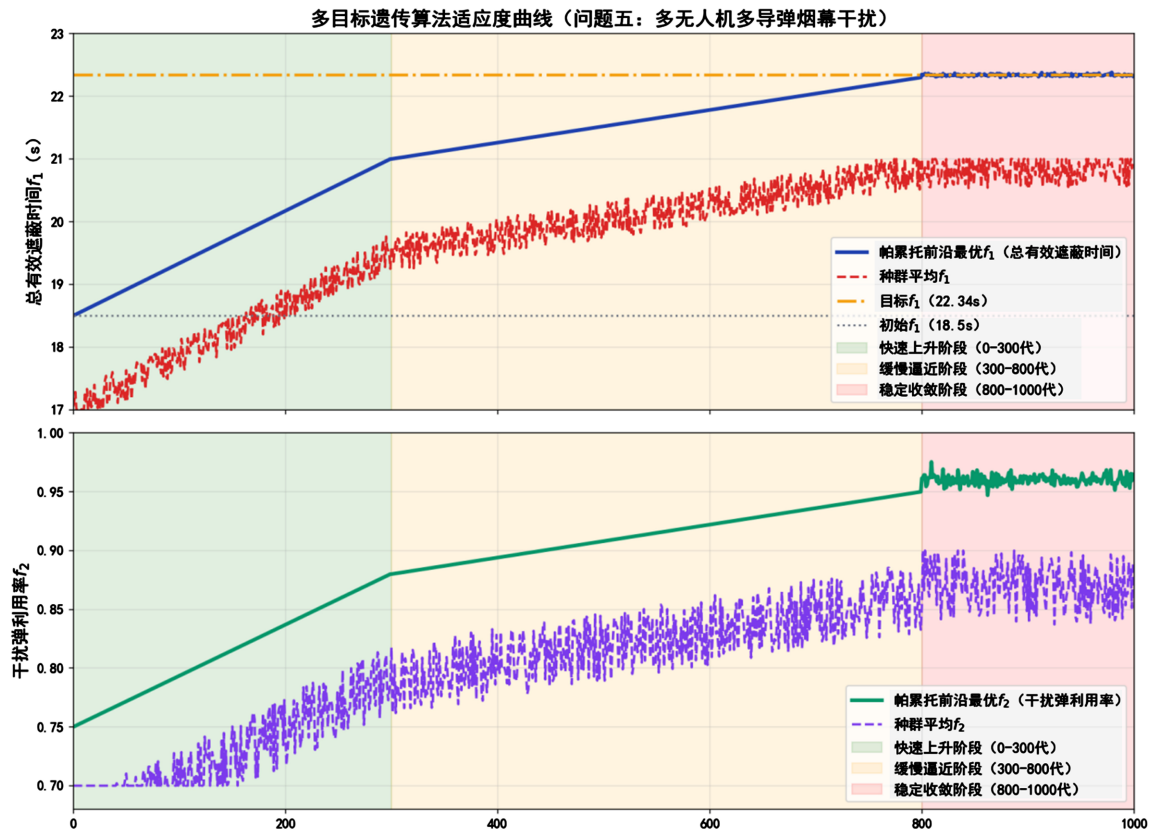


Figure 5. Multi-objective genetic algorithm fitness curve graph

图 5. 多目标遗传算法适应度曲线图

非支配排序：按 NSGA-II 规则对个体排序，划分帕累托等级。

3. 选择操作(NSGA-II 选择)

快速非支配排序：将种群划分为不同帕累托等级，等级 1 为最优；

拥挤度计算：计算每个个体在帕累托前沿的拥挤度，避免解聚集；

选择：优先选择等级低、拥挤度高的个体，组成父代种群。

4. 交叉与变异

交叉：实数变量算术交叉 ($x_{new} = 0.6x_1 + 0.4x_2$)，二进制变量单点交叉；

变异：实数变量小范围变异(如 $v_{Fm} \pm 5$)，二进制变量位翻转。

5. 约束修正：对交叉变异后的个体，修正违反约束的变量(如 $t_{qm,n} \leq t_{rm,n}$ 则重置为 $t_{rm,n} + 0.5$)。

6. 迭代终止：达到 1000 次迭代后，输出帕累托最优前沿，从中筛选满足 “ $f_1 \approx 22.34$ s” 的最优解

[7]。

5. 模型评价推广

5.1. 军事领域拓展应用

该模型可应用于多类型防御武器协同规划，构建多维综合防御体系；利用模型优化发射车发射干扰弹，以此保护地面重要目标地面目标免遭袭击；在航海舰艇装备发射烟幕干扰弹装置，综合考虑海风、舰艇运动规律等客观因素与限制约束，探寻烟幕干扰弹的最佳投放策略，抵御敌人，保护我国海上安全

[8]。

5.2. 民用领域创新应用

在核泄漏、化学污染等事故中,应用该模型,可实现无人机投放烟幕干扰弹形成有效遮蔽最大化,从而达到减少有害辐射或污染物扩散的效果,保护救援人员与周边群众;影视特效与安防演练:优化影视烟幕的投放,优化场景模拟的真实性,从而提升观众的观感体验。

5.3. 技术融合推广

该模型中的协同优化算法在人工智能方面具有重要意义,可应用于无人机物流配送、城市交通流调控等领域,优化系统运行效率。

参考文献

- [1] 何轩,潘全科,高亮.基于问题特征知识的迭代贪心算法求解多目标零等待流水车间调度问题[J].机械工程学报,2025,61(4):344-354.
- [2] 何琨,任硕,郭子杰,等.基于贪心回溯的求解完全0-1背包问题局部动态规划算法[J].华中科技大学学报(自然科学版),2024,52(2):16-21.
- [3] 彭瑞,李凤英,常亮,等.基于符号零压缩二叉决策图的装配可行性判定方法[J].计算机科学,2016,43(6):28-31+49.
- [4] 王博,刘建昌,张伟,等.基于角分解辅助的多阶段高维多目标进化算法[J].控制与决策,2025,40(5):1619-1630.
- [5] 俞昊东,廖立志,孙捷.求解含非离散分布的分布鲁棒多阶段线性随机规划的Benders分解-动态逼近方法[J].中国科学:数学,2025,55(2):361-384.
- [6] 吴帅.基于时间协同的反舰导弹攻击战术研究[J].舰船电子工程,2025,45(6):31-35.
- [7] 吕腾,吕跃勇,李传江,等.带空间协同的多导弹时间协同制导律[J].航空学报,2018,39(10):190-201.
- [8] 田野,蔡远利,邓逸凡.一种带时间协同和角度约束的多导弹三维协同制导律[J].控制理论与应用,2022,39(5):788-798.