

浅析高斯公式在物理中的应用

韩艺兵, 贾瑞玲, 文生兰

信息工程大学基础部, 河南 郑州

收稿日期: 2025年11月25日; 录用日期: 2025年12月19日; 发布日期: 2025年12月29日

摘要

本文运用高斯公式证明了物理学中著名的阿基米德浮力定律, 其中用到了数学建模思想和微元分析法, 旨在为初学者提供一个清晰、详尽的范例, 展示如何运用微积分工具解决经典物理问题, 希望读者通过阅读本文可以进一步加深对高斯公式背后的物理思想和数学技巧的认识, 提升模型构建能力和实际应用能力。

关键词

高斯公式, 阿基米德浮力定律, 数学建模, 微元法

A Brief Analysis of the Application of Gauss's Formula in Physics

Yibing Han, Ruiling Jia, Shenglan Wen

Basis Department of Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: November 25, 2025; accepted: December 19, 2025; published: December 29, 2025

Abstract

This paper uses Gauss's formula to prove Archimedes' law of buoyancy in physics. Mathematical modeling and infinitesimal analysis are employed, aiming to provide beginners with a clear and detailed example demonstrating how to use calculus to solve classic physics problems. It is hoped that readers will gain a deeper understanding of the physical ideas and mathematical techniques behind Gauss's formula, and improve their model-building and practical application abilities.

Keywords

Gauss's Formula, Archimedes' Law of Buoyancy, Mathematical Modeling, Infinitesimal Analysis

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

高斯公式是数学中场论的一个基本公式。在《高等数学》[1]中它建立了空间某一区域 Ω 上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系,即

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{\Sigma_{\text{外}}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

在物理学中常用它的向量形式,设稳定流动的不可压缩的流体的速度场由

$$\mathbf{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad (1)$$

给出, Σ 是速度场中的双侧曲面, $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上连续。在《矢量分析与场论》[2]中,流体在单位时间内由 Σ 的一侧到另一侧的流量 $\Phi = \oiint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_0 dS$,其中 \mathbf{n}_0 是取定侧的单位法向量, Φ

称为向量场 \mathbf{V} 沿指定侧穿过曲面 Σ 的通量,并且可以利用第二类曲面积分来计算通量,即

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_0 dS = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (2)$$

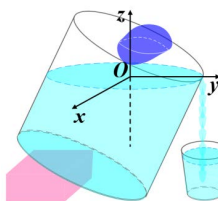
在物理学中,应用高斯公式可以简洁明了地证明某些重要的结论。比如著名的阿基米德浮力定律。该定律是流体静力学中的基石,传统的证明通常依赖于实验或基于柱体模型的几何分析,虽然直观,但难以推广到任意形状的物体。本文旨在提供一个更为普遍和严谨的证明。我们将从一个流体微元所受的压强出发,运用数学建模[3]的思想,将物理问题转化为数学问题。然后,通过微元分析法[4]建立作用在物体表面上的压力积分,并巧妙地引入高斯公式,将复杂的面积分转化为更易计算的体积分,从而推导出浮力定律的普遍形式。这个过程不仅是对一个经典定律的验证,更是对微积分工具在物理学中强大应用能力的一次精彩展示。

2. 模型建立与物理原理分析

定理1 (阿基米德浮力定律)

浸没在液体中的物体表面所受液体的压力的合力(即浮力)的方向竖直向上,其大小等于该物体所排开的液体的重力大小。

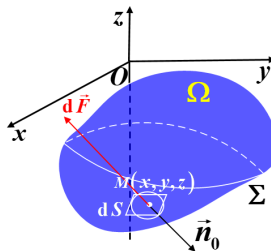
分析:浮力定律告诉我们,物体在液体中所受到的浮力大小,等于它所排出的液体的重力.定理中涉及两个量,一个量是物体表面所受液体的压力,结合曲面积分的知识,即为物体表面对坐标的曲面积分,也称之为第二类曲面积分。第二个量是排开的液体的重力,它等于质量乘以重力加速度 g ,而计算不规则物体的质量可以用三重积分。因此,浮力定律从数学上看,即建立了表面累积效应(曲面积分)和体效应(三重积分)之间的等量关系,正是高等数学中的高斯公式。



根据数学建模的思想，做以下基本的模型假设，

【模型假设】为了研究的方便，模型假设包括三条，一是物体的形状是不规则的，如果形状规则，用初等数学的知识即可解决，不需要高等数学知识。二是物体的表面是光滑的，这对应了高斯公式的条件，即 Σ 是一个光滑的或分片光滑的曲面。三是假设液体密度是均匀不变的，这是一个通常的假设。

【模型建立】将此实际问题数量化，首先建立空间直角坐标系，以水面为 xoy 面， z 轴按习惯取铅直向上建立坐标系。设物体体积(即物体所排开液体的体积)为 V ，表面积为 S ，液体密度为 ρ ，则物体所排开液体的重力大小为 ρgV ，要证定理的结论，问题转化为求物体所受到的压力也即浮力。



设不规则物体 Ω 的边界为 Σ ，假设浮力是 F ，它显然是一个向量，可以分解为沿着三个坐标轴方向的三个分力 F_x 、 F_y 、 F_z ，问题就转化为求此三个分力，下面以在 x 轴上的分力 F_x 为例详细推导。

3. 用微元法和高斯公式进行数学推导

由于物体是不规则的，可利用微元法的思想来分析，任取物体表面上的一小块曲面 dS ，在其上找一点 $M(x, y, z)$ ，下面考察该点所受的压力。显然点 M 所受压力是外部给它的，方向指向它的内侧，因此若定义点 M 的外法向量方向为

$$n_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

那它所受压力的方向跟它相反，是 $-n_0 = (-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma)$ ，压力的大小就等于 ρgh 。注意在此坐标系下 z 是负值，所以点 M 离水面的高度就是 $-z$ ，然后再乘上这个曲面的面积的近似值 dS ，就得到这一小块曲面所受到的压力 $dF = \rho g(-z)dS$ 。

但是我们现在考察的是在 x 轴上的这个分力 dF_x ，把 dF 分解到 x 轴方向，乘上 $-\cos \alpha$ ，化简整理由得到

$$dF_x = \rho g(-z)dS \cdot (-\cos \alpha) = \rho g z \cos \alpha dS$$

有了此压力微元，那么整个表面上的压力在 x 轴上的分力就等于这样的一个曲面积分 $F_x = \iint_{\Sigma} \rho g z \cos \alpha dS$ 。

再有两类曲面积分之间的关系可知

$$F_x = \iint_{\Sigma} \rho g z \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} \rho g z dy dz$$

由于压力仅跟水的深度有关，所以同样的思想方法可以求出压力在 y 轴、 z 轴上的分量分别可以表示成

$$F_y = \iint_{\Sigma} \rho g z dz dx, \quad F_z = \iint_{\Sigma} \rho g z dx dy$$

分别利用高斯公式可得

$$F_x = \iint_{\Sigma} \rho g z \, dy \, dz = \iiint_{\Omega} 0 \, dV, \quad F_y = \iint_{\Sigma} \rho g z \, dz \, dx = \iiint_{\Omega} 0 \, dV$$

$$F_z = \iint_{\Sigma} \rho g z \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \rho g \, dV = \rho g V$$

$F_x = 0$, $F_y = 0$ 说明水平方向上不受力, $F_z > 0$, 方向竖直向上, $F_z = \rho g V$ 即物体所受到的压力即浮力与物体所排开的液体所受到的重力大小相等, 阿基米德浮力定律得证。

4. 讨论与总结

本文通过数学建模思想和微元分析法, 运用高斯公式证明了物理学中著名的阿基米德浮力定律, 旨在为初学者提供一个清晰、详尽的范例, 展示如何运用微积分工具解决经典物理问题, 除此之外, 高斯公式还可以解决其它许多的物理问题, 如电通量[5]、磁通量等等。

本文运用数学工具证明了阿基米德定律的普适性。回顾整个过程, 有几个关键点值得深入体会:

1. 高斯公式的桥梁作用: 它将一个复杂的、依赖于物体具体表面形状的面积分转化为了一个简单的、与物体总体积有关的体积分。这正是数学工具化繁为简威力的体现。

2. 物理思想的数学化: 我们将“各个方向的压力相互抵消, 只剩下向上的合力”这一物理直觉, 精确地翻译成了“水平方向散度为零, 竖直方向散度为常数”的数学语言。

3. 模型的普适性: 整个证明过程没有对物体的形状做任何假设, 因此结论适用于任何形状的物体, 无论是规则还是不规则。这比基于特定几何形状(如柱体)的初等证明更具一般性。

5. 延伸思考

这个证明方法还可以自然地解释浮力定律的另一种表述——浮力来源于物体上下表面的压力差。对于任意形状的物体, 我们可以将其表面 S 在水平面上的投影区域视为“上表面”和“下表面”的某种拓扑组合。高斯公式在计算竖直方向合力时, 本质上就是在对所有这些微元面积在竖直方向的投影进行求和, 最终体现为对整个排开流体体积的积分。

希望这个详尽的范例能够帮助您深刻理解高斯公式背后的物理思想和数学技巧, 并提升您将微积分这一强大工具应用于解决实际物理问题的能力。

参考文献

- [1] 同济大学数学科学学院. 高等数学(下册) [M]. 第八版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [2] 谢树艺. 矢量分析与场论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [3] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [4] 王耀革, 张冬燕, 张宁. 微元分析法探究[J]. 高等数学研究, 2020(11): 7-9.
- [5] 温耐, 王伟峰. 高斯定理在静电场中的应用问题[J]. 物理通报, 2010(11): 9-11.