Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(12), 407-412
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1412517

高等数学中隐秘单侧极限的求法研究

张雯琴，王丽莎*

湖北大学网络空间安全学院，湖北 武汉

收稿日期：2025年11月16日；录用日期：2025年12月9日；发布日期：2025年12月22日

摘　要

单侧极限是学生学习极限概念时的一个难点。本文通过具体题目分析高等数学中最常见的隐秘单侧极限(以 e^{∞} 型极限为代表)出现的一些问题，给出相应的处理方法，并对解题思想进行归纳总结，进而加以推广。

关键词

单侧极限，e^{∞} 型极限，主导项法，考研试题

Methods for Computing Hidden One-Sided Limits in Advanced Mathematics

Wenqin Zhang, Lisha Wang*

School of Cyber Science and Technology, Hubei University, Wuhan Hubei

Received: November 16, 2025; accepted: December 9, 2025; published: December 22, 2025

Abstract

One-sided limits are often a difficult topic for students when they first learn the concept of limits. This paper analyzes some typical problems involving the most common hidden one-sided limits in advanced calculus, with e^{∞}-type limits as a representative example. For these problems, we propose corresponding solution methods, summarize the underlying problem-solving ideas into a unified framework, and further show how this framework can be extended and applied to related situations.

*通讯作者。

文章引用: 张雯琴, 王丽莎. 高等数学中隐秘单侧极限的求法研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(12): 407-412.
DOI: 10.12677/aam.2025.1412517

Keywords

One-Sided Limit, e^{∞}-Type Limit, Dominant Term Method, Examination Questions of the NEEP

1. 引言

极限思想贯穿了整个高等数学，它不仅是重要的概念之一，还是微积分理论的基础[1]，因而要学好高等数学，必须要掌握住极限的思想和极限的求解方法。单侧极限是学生学习极限概念时的一个难点[2]。以下“三类点”的极限可以考虑用单侧极限：绝对值的零点，分段函数的分界点，区间端点。此外，还有一类极限，表面上看不出需要用到单侧极限，但实际上必须用单侧极限才能得到正确结果，我们称之为是隐秘的单侧极限。最常见的隐秘单侧极限就是 e^{∞} 型极限。在高等数学教材和典型例题选编中多以习题形式出现[2] [3]。

从数学分析的角度看，本文讨论的点多是函数的奇点或边界点[4]。例如，当函数中含有 $\ln|x-a|$、$(x-a)^{-\alpha}$、$e^{1/(x-a)}$ 等项时，点 $x=a$ 往往不在函数的定义域内，或者在该点左右邻域的取值范围和变化趋势完全不同。因此，在研究 $x\to a$ 的极限时，必须分别考察 $x\to a^-$ 和 $x\to a^+$ 的单侧极限。以 $e^{1/(x-a)}$ 为例，当 $x\to a^-$ 时，$1/(x-a)\to-\infty$，而当 $x\to a^+$ 时，$1/(x-a)\to+\infty$。由于指数函数在正无穷和负无穷处的极限行为完全不同，这就导致 $e^{1/(x-a)}$ 在同一点左右的极限值往往不相同。

在处理这类 e^{∞} 型极限的过程中，本文主要采用“主导项法”(或最高阶项比较法)：即通过将分子、分母同时除以分母中最高次幂，或提取指数中占主导地位的项，将极限的计算化归为对主导项渐近行为的分析，从而刻画函数在奇点邻域内的单侧极限[5]。e^{∞} 型极限在高等数学的教材或参考书中大多以习题的形式呈现。在 2020 年和 2021 年全国硕士研究生入学考试题目中出现了相似的类型题。本文就主要针对这类型的极限通过实例说明，进而给予推广，方便读者掌握。

同济大学出版(第八版)的《高等数学》第一章总练习题中有关于 e^{∞} 型极限的题目[1]。

2. 连续性与间断点中的隐秘单侧极限

例 1 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　)。

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

分析：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $x=0$ 是其间断点。本题主要考察的是 $x\to0$ 时，函数 $e^{\frac{1}{x}}$ 的变化趋势。对于函数 $e^{\frac{1}{x}}$，我们需要考虑 2 个单侧极限。由于 $x\to0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$；$x\to0^-$ 时，$\frac{1}{x}\to-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=0$。所以自变量 x 从右边趋于 0 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，可按照同除分母的最高次的方法即“主导项法”计算；自变量 x 从左边趋于 0 中的分母不为 0，可按照四则运算法则计算。

解：由于

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

左右极限存在但不相等，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。选(B)。

由上述分析可见，e^{∞} 型极限的实质在于对相关点两侧指数函数行为的把握。一般的对于含指数函数 a^x 的表达式，在处理 $x\to\infty$ 时的极限问题时，需认真分析 2 个“单侧极限”的处理方式。

在间断点类型的判断中，隐秘的单侧极限并不限于 e^{∞} 型。类似地，当函数表达式中包含 $\ln|x-b|$、$(x-b)^{-\alpha}$ 等项时，$x=b$ 往往是函数的奇点，其左右邻域的定义域结构和函数值行为可能截然不同。此时，判断 $x=b$ 处的间断点类型，同样需要结合 $x\to b^-$ 和 $x\to b^+$ 两个单侧极限一并分析。

下面通过 2020 年全国硕士研究生入学考试数学二的一道选择题，进一步说明隐秘单侧极限在间断点类型判定中的具体应用。

例 2 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 第二类间断点的个数（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解：初等函数在其定义区间上连续，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$、$x=2$、$x=1$ 和 $x=-1$ 处无定义，是间断点。

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1}\ln|1+x|}{x(x-2)}=-\frac{e^{-1}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln|1+x|}{x}=-\frac{e^{-1}}{2}$$

左右极限存在且相等，故 $x=0$ 是可去间断点。

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty,\quad \lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(e^x-1)(x-2)}\ln|1+x|=\infty$$

故 $x=2$，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。当 $x=1$ 时，$e^{\frac{1}{x-1}}$ 就是 e^{∞} 型极限。应该分为 2 个单侧极限的计算：

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}\frac{\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}\frac{\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=0$$

右极限不存在，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。综上可知选(C)。

3. 可导性中的隐秘单侧极限

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$，$(a>0,a\neq 1)$。

解：根据幂指函数极限的处理方式，有

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)}$$

当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x-1}{x}=+\infty$，此极限为 ∞^0 型。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{x}+\frac{\ln\left(a^x-1\right)}{x}-\frac{\ln\left(a-1\right)}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(a^x-1\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a^x\left(1-\frac{1}{a^x}\right)}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln a+\ln\left(1-\frac{1}{a^x}\right)}{x}=\ln a\end{aligned}$$

当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x-1}{x}=0$，此极限为 0^0 型，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{x}+\frac{\ln\left(a^x-1\right)}{x}-\frac{\ln\left(a-1\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(a^x-1\right)=0$$

故当 $a>1$ 时，原式 $=\mathrm{e}^{\ln a}=a$，当 $0<a<1$ 时，原式 $=\mathrm{e}^0=1$。

同理，我们可以处理 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ 极限。得到当 $a>1$ 时，极限值为 $\mathrm{e}^0=1$，当 $0<a<1$ 时，极限值为 $\mathrm{e}^{\ln a}=a$。

后续学习分段点处的导数的时候，e^{∞} 型极限也有其相应很好的应用。

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\ln(1+x),x\neq0\\0, \qquad\qquad x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是的可导性。

解：根据导数的定义，我们需要计算极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$$

依照前文关于 e^{∞} 型隐秘单侧极限的处理原则，分为 2 个单侧极限的计算，即判断在 $x=0$ 处左导数和右导数是否相等。由于

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1+0}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1$$

得 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

类似地，函数表达式中含 $a^{\frac{g(x)}{x-b}}$ 或 $a^{\frac{g(x)}{b-x}}$，在判断其间断点类型时，需考虑 $x\to b$ 时的两个单侧极限。在可导性判定中，若待讨论点处的导数存在形式涉及 e^{∞} 型极限，则需要将导数定义中的极限拆分为两个单侧极限。一方面，这能够揭示函数在该点左、右邻域的实际变化趋势；另一方面，也为判断左导数和右导数是否相等提供了清晰的计算路径。特别是当导数表达式中出现 $e^{1/(x-a)}$ 等典型结构时，应首先识别出其隐含的单侧极限性质，再进行具体运算。

4. 渐近线与参数极限中的隐秘单侧极限

在无穷远处的渐近线问题中，隐秘的单侧极限除了 e^{∞} 型极限以外，常见的还有 $\arctan\infty$ 和 $\operatorname{arccot}\infty$ 型极限，我们需要考虑 2 个单侧极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi.$$

在微分学的应用中，$\arctan\infty$、$\operatorname{arccot}\infty$ 和 e^{∞} 型极限可解决曲线的渐近线问题。

例 5 求曲线 $y=\dfrac{x^2+3}{4x}\arctan\dfrac{x}{2}$ 的斜渐进线。

分析：当 $x\to\infty$ 时，函数 $\arctan\dfrac{x}{2}$ 需要考虑 2 个单侧极限。

解：由于

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{4x^2}\arctan\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}y-kx=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{4x}\arctan\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}x\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{1+3t^2}{4t}\arctan\frac{1}{2t}-\frac{\pi}{8t}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1+3t^2\right)\arctan\frac{1}{2t}-\frac{\pi}{2}}{4t}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{6t\arctan\frac{1}{2t}+\left(1+3t^2\right)\frac{-2}{1+4t^2}}{4}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以曲线有斜渐近线 $y=\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{1}{2}$；

同理

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{4x^2}\arctan\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{8}$$

$$\lim_{x\to-\infty}y-kx=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{4x}\arctan\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}x=\lim_{t\to0^-}\frac{1+3t^2}{4t}\arctan\frac{1}{2t}+\frac{\pi}{8t}=-\frac{1}{2}$$

所以曲线有斜渐近线：$y=-\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{1}{2}$。

从以上渐近线的求解过程可以看到，当函数中含有函数表达式中含 $\arctan\dfrac{g(x)}{x-b}$ 或 $\operatorname{arccot}\dfrac{g(x)}{x-b}$，处理极限时需考虑 $x\to b$ 时的两个单侧极限。

下面通过2021年全国硕士研究生入学考试数学三试题中计算题第17题(例6)，说明隐秘单侧极限在“极限存在性判定”中的应用。

例6 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值。

分析：本题主要考察的是 $x\to0$ 时，函数 $\arctan\frac{1}{x}$ 的和 $\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}$ 变化趋势。对于函数 $\arctan\frac{1}{x}$，我们需要考虑 $x\to0$ 时的2个单侧极限。

解：由于

$$\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^-}\left(1-x\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-1},$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}$$

根据题意极限存在，所以在 $x=0$ 处左极限等于右极限，即

$$\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}=-\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}$$

得

$$a=\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{\pi}.$$

5. 结语

本文围绕 e^{∞} 型隐秘单侧极限，结合教材习题和近年来的考研真题，从间断点类型判定、可导性分析以及曲线渐近线与含参数极限等三个场景出发，通过典型例题展示了这类问题的具体处理过程，并在每一部分给出了相应的方法归纳。在教学实践中，教师可以引导学生有意识地识别函数在某点或无穷远处的奇点与渐近行为，主动拆分并比较两个单侧极限，从而更系统地掌握这类隐秘单侧极限题型的本质。

参考文献

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学: 上册[M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 34-71.
[2] 于新凯, 等. 微积分典型问题分析与习题精选[M]. 天津: 天津大学出版社, 2009.
[3] 侯云畅, 冯有前, 刘卫江. 高等数学: 上册[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2009.
[4] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
[5] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2006.