

一类含Logistic项SIS模型平衡解的稳定性及存在性

刘芳君

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2025年11月8日; 录用日期: 2025年12月1日; 发布日期: 2025年12月10日

摘要

近年来,越来越多的研究聚焦于各类反应-扩散型传染病模型,重点考察空间异质性与个体扩散对传染病传播动力学的联合影响。本文主要考虑一类含有Logistic项的反应扩散对流SIS模型解的性质。我们首先给出模型基本再生数的定义,其次证明了无病平衡解(DFE)的线性稳定性,最后证明了在高风险点的条件下地方病平衡解(EE)的存在性。

关键词

SIS传染病模型, 基本再生数, 无病平衡解, 地方病平衡解

Stability and Existence of Equilibrium Solutions for a Class of SIS Model with Logistic Source

Fangjun Liu

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: November 8, 2025; accepted: December 1, 2025; published: December 10, 2025

Abstract

In recent years, an increasing number of studies have focused on various types of reaction-diffusion epidemic models, emphasizing the combined effects of spatial heterogeneity and individual dispersal on the transmission dynamics of infectious diseases. This paper primarily considers the properties of solutions for a class of reaction-diffusion-advection SIS models with a logistic term. We first define the basic reproduction number of the model, then prove the linear stability of the disease-

free equilibrium (DFE), and finally demonstrate the existence of an endemic equilibrium (EE) under conditions of high-risk sites.

Keywords

SIS Epidemic Model, Basic Reproduction Number, Disease-Free Equilibrium, Endemic Equilibrium

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文研究如下含 Logistic 项的 SIS 传染病反应扩散对流模型

$$\begin{cases} \bar{S}_t = (d_s \bar{S}_x + q_s m'(x) \bar{S})_x + a(x) \bar{S} - b(x) \bar{S}^2 - \beta(x) \frac{\bar{S} \bar{I}}{\bar{S} + \bar{I}} + \gamma(x) \bar{I}, & 0 < x < L, t > 0, \\ \bar{I}_t = (d_I \bar{I}_x + q_I m'(x) \bar{I})_x + \beta(x) \frac{\bar{S} \bar{I}}{\bar{S} + \bar{I}} - \gamma(x) \bar{I}, & 0 < x < L, t > 0, \\ d_s \bar{S}_x + q_s m'(x) \bar{S} = d_I \bar{I}_x + q_I m'(x) \bar{I} = 0, & x = 0, L, t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\bar{S}(x, t)$ 和 $\bar{I}(x, t)$ 分别表示区间 $[0, L]$ 上 t 时刻和 x 位置的易感人群和感染人群的密度, 正常数 d_s 和 d_I 分别为易感人群和感染人群的扩散系数, $q_s m'(x)$ 和 $q_I m'(x)$ 分别表示区间 $[0, L]$ 中 t 时刻和 x 位置的对流速率, 正函数 $\beta(x)$ 和 $\gamma(x)$ 是 $[0, L]$ 上的 Hölder 连续函数, 分别表示疾病传播率和恢复率, 非线性项 $a(x)S - b(x)S^2$ (其中 a 与 b 为正的 Hölder 连续函数) 表示易感人群受到 Logistic 增长的约束。

本文中假设初始时刻 S_0 与 I_0 是定义在 $\bar{\Omega}$ 上的非负连续函数, 并且存在一定数量的感染个体, 即

$$\int_{\Omega} I_0(x) dx > 0.$$

文献[1]研究不含对流项及 Logistic 项的传染病模型 DFE 的稳定性及 EE 的存在性, 文献在[2]的基础上加入对流项 q , 讨论了 DFE 和 EE 的性质。上述研究满足总人口守恒的情况。人口不守恒时, 在不包括对流项的情况, 文献[3]引入线性项, 文献[4]引入线性项并考虑一部分比例的感染者无法在疾病的侵袭下生存, 文献[5]引入 Logistic 项, 研究了 DFE 的稳定性以及 EE 的全局吸引性。文献[6]考虑加入对流项 q 及线性项时的 DFE 的稳定性和 EE 的全局吸引性。

本文主要研究无病平衡解(DFE)的稳定性和地方病平衡解(EE)的存在性。首先对基本再生数 R_0 进行刻画。如果 $R_0 > 1$, 那么 DFE 全局渐近稳定; 如果 $R_0 < 1$, 那么 DFE 不稳定。最后讨论了 EE 的存在性和全局吸引性。

2. 基本再生数和无病平衡解(DFE)的稳定性

2.1. 基本再生数

考虑(1)的稳态系统

$$\begin{cases} (d_s S_x + q_s m'(x) S)_x + a(x) S - b(x) S^2 - \beta(x) \frac{SI}{S+I} + \gamma(x) I = 0, & 0 < x < L, \\ (d_I I_x + q_I m'(x) I)_x + \beta(x) \frac{SI}{S+I} - \gamma(x) I = 0, & 0 < x < L, \\ d_s S_x + q_s m'(x) S = d_I I_x + q_I m'(x) I = 0, & x = 0, L, \end{cases} \quad (2)$$

方程(2)存在唯一的半平凡解, 称为无病平衡态(DFE), 记作 $(\bar{S}, 0)$, 其中 $\bar{S}(x)$ 是下列方程的唯一正解:

$$\begin{cases} (d_s S_x + q_s m'(x) S)_x + a(x) S - b(x) S^2 = 0, & 0 < x < L, \\ d_s S_x + q_s m'(x) S = 0, & x = 0, L, \end{cases} \quad (3)$$

方程(2)的正稳态解称为地方性平衡态(EE), 记作 (S^*, I^*) 。

线性化(1.6), 得到

$$\begin{cases} \bar{\xi}_t = (d_s \bar{\xi}_x + q_s \bar{\xi} m'(x))_x + [a(x) - 2b(x) \bar{S}] \bar{\xi} - (\beta(x) - \gamma(x)) \bar{\eta}, & 0 < x < L, t > 0, \\ \bar{\eta}_t = (d_I \bar{\eta}_x + q_I \bar{\eta} m'(x))_x + (\beta(x) - \gamma(x)) \bar{\eta}, & 0 < x < L, t > 0, \end{cases}$$

其中 $\bar{\xi}(x, t) = S(x, t) - \bar{S}$, $\bar{\eta}(x, t) = I(x, t)$ 。设 $\bar{\xi}(x, t) = e^{-\lambda t} \xi(x)$, $\bar{\eta}(x, t) = e^{-\lambda t} \eta$, 则可导出如下特征值问题:

$$\begin{cases} (d_s \xi_x + q_s m'(x) \xi)_x + (a(x) - 2b(x) \bar{S}) \xi - (\beta(x) - \gamma(x)) \eta + \lambda \xi = 0, & 0 < x < L, \\ (d_I \eta_x + q_I m'(x) \eta)_x + (\beta(x) - \gamma(x)) \eta + \lambda \eta = 0, & 0 < x < L, \\ d_s \xi_x + q_s m'(x) \xi = d_I \eta_x + q_I m'(x) \eta, & x = 0, L. \end{cases} \quad (4)$$

边界条件为

$$\begin{cases} d_s \xi_x(0) + q_s m'(0) \xi(0) = 0, & d_s \xi_x(L) + q_s m'(L) \xi(L) = 0, \\ d_I \eta_x(0) + q_I m'(0) \eta(0) = 0, & d_I \eta_x(L) + q_I m'(L) \eta(L) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

考虑以下特征值问题

$$\begin{cases} (d_I \eta_x + q_I m'(x) \eta)_x + (\beta(x) - \gamma(x)) \eta + \lambda \eta = 0, & 0 < x < L, \\ d_I \eta_x + q_I m'(x) \eta = 0, & x = 0, L. \end{cases}$$

设 $\zeta(x) = e^{-\frac{q_I}{d_I} m(x)}$, 则有

$$\begin{cases} -d_I \zeta_{xx} + q_I m'(x) \zeta_x - (\beta(x) - \gamma(x)) \zeta = \lambda \zeta, & 0 < x < L, \\ \zeta_x = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (6)$$

由 Krein-Rutman 定理[7]知, (6)存在唯一的简单实特征值, 其对应的正特征函数也是唯一的。记该主特征对为 (λ_1, ϕ_1) 。

参照文献[2] [8]中的类似方法, 定义系统(1.6)的基本再生数 R_0 如下:

$$\mathcal{R}_0 = \sup_{\varphi \in H^1((0, L)), \varphi \neq 0} \frac{\int_0^L \beta(x) e^{-\frac{q_I}{d_I} m(x)} \varphi^2 dx}{d_I \int_0^L e^{-\frac{q_I}{d_I} m(x)} |\varphi_x|^2 dx + \int_0^L \gamma(x) e^{-\frac{q_I}{d_I} m(x)} \varphi^2 dx}. \quad (7)$$

根据 R_0 的定义存在正函数 $\Phi(x) \in C^2((0, L)) \cap C^1([0, L])$, 使得其满足

$$\begin{cases} -(d_I \Phi_x + q_I m'(x) \Phi)_x + \gamma(x) \Phi = \frac{1}{R_0} \beta(x) \Phi, & 0 < x < L, \\ d_I \Phi_x + q_I m'(x) \Phi = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (8)$$

设 $\psi(x) = e^{-\frac{q_I}{d_I} m(x)} \Phi(x)$, 则有

$$\begin{cases} -d_I \psi_{xx} + q_I m'(x) \psi_x + \gamma(x) \psi = \frac{1}{\mathcal{R}_0} \beta(x) S_N(x) \psi, & 0 < x < L, \\ \psi_x(x) = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (9)$$

2.2. DFE 的稳定性

首先可以得到关于 λ 和 $\mathcal{R}_0$ 的结论:

引理 2.1. 若 $\lambda < 0$, 则 $\mathcal{R}_0 > 1$; 若 $\lambda = 0$, 则 $\mathcal{R}_0 = 1$; 若 $\lambda > 0$, 则 $\mathcal{R}_0 < 1$ 。

证明. 在(8)两边同时乘以 $e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I} \psi}$, 并在 $[0, L]$ 上进行积分, 结合分部积分计算, 可得

$$d_I \int_0^L \zeta_x \psi_x e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx + \int_0^L \gamma(x) \zeta \psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx - \int_0^L \beta(x) \zeta \Psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx = \lambda \int_0^L \zeta \psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx. \quad (10)$$

在(9)两边同时乘以 $e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I} \zeta}$, 并在 $[0, L]$ 上进行积分, 可得

$$d_I \int_0^L \zeta_x \psi_x e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx + \int_0^L \gamma(x) \zeta \psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx = \int_0^L \frac{1}{\mathcal{R}_0} \beta(x) \zeta \Psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx. \quad (11)$$

(10)和(11)两式相减有

$$\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - 1 \right) \int_0^L \beta(x) \beta(x) \zeta \Psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx = \lambda \int_0^L \beta(x) \zeta \Psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx.$$

显然

$$\int_0^L \beta(x) \zeta \Psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx > 0, \int_0^L \beta(x) \zeta \Psi e^{-\frac{q_I m(x)}{d_I}} dx > 0.$$

因此 $1 - \mathcal{R}_0$ 与 λ 符号相同。证毕。

接下来给出 DFE 的线性稳定性。

定理 2.2. 若 $\mathcal{R}_0 < 1$, 则 DFE 是线性稳定的。

证明. 我们首先假设 $\mathcal{R}_0 < 1$, 并将证明 DFE $(\bar{S}, 0)$ 是线性稳定的。也就是说, 如果 (λ, ξ, η) 是特征值问题(4)~(5)的一个解, 且 ξ 或 η 不恒为零, 则有 $\text{Re}(\lambda) > 0$ 。

我们分两种情形讨论: $\eta \equiv 0$ 且 $\xi \neq 0$ 或 $\eta \neq 0$ 。

在第一种情形下, 由(4)及边界条件(5), (λ, ξ) 显然是如下特征值问题的一个特征对

$$\begin{cases} -(d_S \xi_x + q_S m'(x) \xi)_x - (a(x) - 2b(x) \bar{S}) \xi = \lambda \xi, & x \in (0, L), \\ d_S \xi_x + q_S m'(x) \xi = 0, & x = 0, L. \end{cases}$$

作变换 $w(x) = \xi(x) e^{\frac{q_S m(x)}{d_S}}$, 则方程化简为

$$\begin{cases} -\left(d_S w_x e^{\frac{q_S m(x)}{d_S}} \right)_x - (a(x) - 2b(x) \bar{S}) w e^{\frac{q_S m(x)}{d_S}} = \lambda w e^{\frac{q_S m(x)}{d_S}}, & 0 < x < L, \\ w_x = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (12)$$

由于 $\bar{S}$ 是方程(3)的解, 作变换 $\phi(x) = \bar{S}(x) e^{\frac{q_S m(x)}{d_S}}$ 得

$$\begin{cases} -\left(d_s \phi_x e^{-\frac{q_S m(x)}{d_s}}\right) x - a(x) \phi e^{-\frac{q_S m(x)}{d_s}} - b(x) \phi^2 e^{-\frac{q_S m(x)}{d_s}} = 0, & 0 < x < L, \\ \phi_x = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (13)$$

对(12)和(13)的第一个等式两边分别同乘 $\phi(x)$ 和 $w(x)$ ，并在 $[0, L]$ 积分，计算并化简可得

$$\lambda \int_0^L w \phi e^{-\frac{q_S m(x)}{d_s}} dx = \int_0^L b w \phi^2 e^{-\frac{2q_S m(x)}{d_s}} dx. \quad (14)$$

因此 $\lambda > 0$ 。

若出现第二种情形，即 $\eta \neq 0$ ，则 (λ, ξ, η) 是特征值问题

$$\begin{cases} (d_I \eta_x + q_I m'(x) \eta)_x + (\beta(x) - \gamma(x)) \eta + \lambda \eta = 0, & x \in (0, L), \\ d_I \eta_x + q_I m'(x) \eta = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (15)$$

的特征对，因此 λ 是实数，且由引理 2.1 可知 $\lambda \geq \lambda^* > 0$ 。综上证明了无病平衡解(DFE)的线性稳定性。

3. 地方病平衡解(EE)的存在性

本节讨论地方病平衡解的存在性。我们注意到，在强假设的条件下，EE 的全局吸引力是可证的，因此假设 $\beta(x) > \gamma(x)$ ，其中 $x \in [0, L]$ 。

首先建立系统(1)解的一致有界性。

定理 3.1. 对于方程组(1)的任意正解 $(\bar{S}, \bar{I})$ ，存在一个和初值条件有关的正常数 C 使得

$$\|\bar{S}(\cdot, t)\|_{L^\infty((0, L))} + \|\bar{I}(\cdot, t)\|_{L^\infty((0, L))} \leq C, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (16)$$

证明. 定义

$$H(t) = \int_0^L [\bar{S}(x, t) + 2\bar{I}(x, t)] dx.$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \int_0^L a(x) \bar{S} dx - \int_0^L b(x) \bar{S}^2 dx + \int_0^L \beta(x) \frac{\bar{S}\bar{I}}{\bar{S} + \bar{I}} dx - \int_0^L \gamma(x) \bar{I} dx \\ &\leq \beta^* \int_0^L \bar{S} dx - \gamma_* \int_0^L \bar{I} dx + \int_0^L (a^* \bar{S} - b_* \bar{S}^2) dx \\ &\leq (\beta^* + a^*) \int_0^L \bar{S} dx - \gamma_* \int_0^L \bar{I} dx - b_* \int_0^L \left(\epsilon \bar{S} - \frac{\epsilon^2}{4} \right) dx \\ &\leq \mu - \nu \int_0^L (\bar{S} + 2\bar{I}) dx \\ &\leq \mu - \nu H(t) \end{aligned}$$

其中

$$\epsilon > 0, \mu = \frac{b_* \epsilon^2 L}{4}, \quad \nu = \min \left\{ \frac{\gamma_*}{2}, \epsilon b_* - \beta^* - a^* \right\}.$$

上式的第二个不等号成立是用到了 $\bar{S}^2 + \frac{\epsilon^2}{4} \geq \epsilon \bar{S}$ 这一不等式。

由 Gronwall 不等式可得

$$H(t) \leq H(0) e^{-\nu t} + \frac{\mu}{\nu} (1 - e^{-\nu t}), \quad \forall t \geq 0. \quad (17)$$

显然, 对于任意解 $(\bar{S}(x, t), \bar{I}(x, t))$ 都在 $t \in [0, \infty)$ 上 L^1 一致有界。

应用类似的 Moser 型迭代方法(参考文献[9][10]), 可以推导出 $\|\bar{S}(\cdot, t)\|_\infty$ 和 $\|\bar{I}(\cdot, t)\|_\infty$ 在 $t \in [0, \infty)$ 上一致有界。

由(17)进一步推出

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^L [\bar{S}(x, t) + \bar{I}(x, t)] dx \leq \frac{\mu}{\nu}.$$

由类似推理可知(16)成立。证毕。

下面研究一个特例下 EE 的全局吸引力。对于系统(1)的任意正解 $(\bar{S}, \bar{I})$, 通过变量变换

$$u(x, t) = \bar{S}(x, t)e^{\frac{q_S}{d_S}m(x)}, \quad v(x, t) = \bar{I}(x, t)e^{\frac{q_I}{d_I}m(x)},$$

可以将系统(1)转换为以下形式

$$\begin{cases} u_t = d_S u_{xx} - q_S m'(x) u_x + a(x)u - b(x)ue^{-\frac{q_S}{d_S}m(x)} \\ \quad - \beta(x) \frac{e^{-\frac{q_I}{d_I}m(x)}}{e^{-\frac{q_S}{d_S}m(x)}u + e^{-\frac{q_I}{d_I}m(x)}v} uv + \gamma(x)e^{\left(\frac{q_S}{d_S} - \frac{q_I}{d_I}\right)m(x)} v, & 0 < x < L, t > 0, \\ v_t = d_I v_{xx} - q_I m'(x) v_x + \beta(x) \frac{e^{-\frac{q_S}{d_S}m(x)}}{e^{-\frac{q_S}{d_S}m(x)}u + e^{-\frac{q_I}{d_I}m(x)}v} uv - \gamma(x)v, & 0 < x < L, t > 0, \\ u_x = v_x = 0, & x = 0, L, t > 0, \\ u(x, 0) = \bar{S}(x, 0)e^{\frac{q_S}{d_S}m(x)}, \quad v(x, 0) = \bar{I}(x, 0)e^{\frac{q_I}{d_I}m(x)}, & 0 < x < L. \end{cases} \quad (18)$$

根据定理 2.2 可知, 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(1)不存在地方病平衡。因此, 我们始终假设 $R_0 > 1$ 并且 $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $a(x)$ 和 $b(x)$ 为正函数。

假设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 满足

$$\frac{a(x)}{b(x)e^{-\frac{q_S}{d_S}m(x)}} = \kappa, \quad \kappa \in (0, +\infty),$$

$\beta(x)$ 和 $\gamma(x)$ 满足在 $[0, L]$ 上 $\beta(x) > \gamma(x)$, 且

$$\frac{(\beta(x) - \gamma(x))e^{-\frac{q_S}{d_S}m(x)}}{\gamma(x)e^{-\frac{q_I}{d_I}m(x)}} = r, \quad r \in (0, +\infty).$$

其中 κ, r 为常数。在这种情况下, 方程组(18)存在唯一的正的常数 EE, 其显式表达式为

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (\kappa, \kappa r).$$

定理 3.2. 假设 $\beta(x) > \gamma(x)$ 在 $[0, L]$ 上成立, 则系统(1.6)的 EE 是全局吸引的。

证明. 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \int_0^L \left[e^{-\frac{q_S}{d_S}m(x)} \left(u - u_* - u_* \ln \frac{u}{u_*} \right) + e^{-\frac{q_I}{d_I}m(x)} \left(v - v_* - v_* \ln \frac{v}{v_*} \right) \right] dx,$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \int_0^L \left[d_S \left(1 - \frac{\bar{u}}{u} \right) \left(e^{\frac{-q_S m(x)}{d_S}} u_x \right)_x + d_I \left(1 - \frac{\bar{v}}{v} \right) \left(e^{\frac{-q_I m(x)}{d_I}} v_x \right)_x \right] dx \\ &\quad + \int_0^L \left(1 - \frac{\bar{u}}{u} \right) \left[a(x) - b(x) e^{\frac{-q_S m(x)}{d_S}} u \right] dx - \int_0^L e^{\frac{-q_I m(x)}{d_I}} v \left[\beta(x) \left(\frac{\bar{v}}{e^{\frac{-q_S m(x)}{d_S}} u + e^{\frac{-q_I m(x)}{d_I}} v} \right) - \gamma(x) \right] dx \\ &= - \int_0^L \left[d_S e^{\frac{-q_S m(x)}{d_S}} \bar{u} \left(\frac{u_x}{u} \right)^2 + d_I e^{\frac{-q_I m(x)}{d_I}} \bar{v} \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 \right] dx - \int_0^L b(x) e^{\frac{-q_S m(x)}{d_S}} \frac{(\bar{u} - u)^2}{u} dx \\ &\quad - \int_0^L \beta(x) e^{\frac{-(2q_I + q_S)m(x)}{d_I}} \frac{uv^2}{\left(e^{\frac{-q_S m(x)}{d_S}} u + e^{\frac{-q_I m(x)}{d_I}} \bar{v} \right)^2} \left(\frac{\bar{v}}{v} - \frac{\bar{u}}{u} \right)^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

注意到当且仅当 $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ 时, 对所有 $t > 0$, $V'(t) = 0$ 成立。因此, $V(t)$ 是方程组(18)的一个 Lyapunov 函数, 这意味着除 $(\bar{u}, \bar{v})$ 外的所有 (u, v) 都满足 $V'(t) < 0$ 。因此由标准推理可得当 $t \rightarrow \infty$ 时, 在 $[L^2((0, L))]^2$ 内有

$$(u(x, t), v(x, t)) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v}).$$

利用定理 3.1 中解的一致有界性, 结合抛物方程的 L^p 理论、Sobolev 嵌入定理和标准紧性论证(如文献[11]中的定理 A2), 我们知道存在常数 $M > 0$ 和 $T_0 > 0$, 对任意 $t \geq T_0$ 都有

$$\|u(\cdot, t)\|_{C^2([0, L])} + \|v(\cdot, t)\|_{C^2([0, L])} \leq M.$$

根据 Sobolev 嵌入定理可以得到当 $t \rightarrow \infty$ 时, 在 $[L^\infty((0, L))]^2$ 内有

$$(u(x, t), v(x, t)) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v}).$$

因此, $(\bar{u}, \bar{v})$ 吸引了(18)的所有解。这意味着系统(1.6)的 $EE(\bar{S}(x), \bar{I}(x))$ 是全局渐近稳定的。证毕。

注 3.1. 定理 3.2 的结论强烈依赖于系统在变换后所呈现的对称结构与常数系数假设。在更一般的空间异质性环境中, 特别是当扩散、对流与 Logistic 项均为非平凡函数时, EE 的全局稳定性分析将变得十分复杂, 目前尚未有普适的理论工具。因此, 本节所给出的全局吸引性结果应视为一个高度理想化情形下的特例, 其分析方法难以直接推广至一般情形。未来工作需要发展新的工具来处理高维或强异质环境下的全局动力学问题。

4. 总结与展望

关于传染病模型 DFE 的稳定性和 EE 解的存在性已有许多研究, 但加入空间异质性函数对流项及 Logistic 项后相应的结果比较少, 因此本文证明了加入空间异质性函数对流项及 Logistic 项后 DFE 的稳定性和高风险点下 EE 解的存在性。但是本文只考虑了一维情况下传染病模型解的性质, 对于高维情况的没有限制条件下的 EE 解的存在性的理论证明要复杂得多, 仍需进一步研究。

参考文献

- [1] Allen, L.J.S., Bolker, B.M., Lou, Y. and Nevai, A.L. (2008) Asymptotic Profiles of the Steady States for an SIS Epidemic Reaction-Diffusion Model. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **21**, 1-20.

- <https://doi.org/10.3934/dcds.2008.21.1>
- [2] Cui, R. and Lou, Y. (2016) A Spatial SIS Model in Advective Heterogeneous Environments. *Journal of Differential Equations*, **261**, 3305-3343. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.05.025>
- [3] Li, H., Peng, R. and Wang, Z. (2018) On a Diffusive Susceptible-Infected-Susceptible Epidemic Model with Mass Action Mechanism and Birth-Death Effect: Analysis, Simulations, and Comparison with Other Mechanisms. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **78**, 2129-2153. <https://doi.org/10.1137/18m1167863>
- [4] Li, H., Peng, R. and Wang, F. (2017) Varying Total Population Enhances Disease Persistence: Qualitative Analysis on a Diffusive SIS Epidemic Model. *Journal of Differential Equations*, **262**, 885-913. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.09.044>
- [5] Li, B., Li, H. and Tong, Y. (2017) Analysis on a Diffusive SIS Epidemic Model with Logistic Source. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **68**, Article No. 96. <https://doi.org/10.1007/s00033-017-0845-1>
- [6] Chen, X. and Cui, R. (2022) Qualitative Analysis on a Spatial SIS Epidemic Model with Linear Source in Advective Environments: I Standard Incidence. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **73**, Article No. 150. <https://doi.org/10.1007/s00033-022-01795-9>
- [7] Du, Y. (2006) Order Structure and Topological Methods in Nonlinear Partial Differential Equations—Vol 1: Maximum Principles and Applications. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. <https://doi.org/10.1142/9789812774446>
- [8] Wang, W. and Zhao, X. (2012) Basic Reproduction Numbers for Reaction-Diffusion Epidemic Models. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **11**, 1652-1673. <https://doi.org/10.1137/120872942>
- [9] Dung, L. (1997) Dissipativity and Global Attractors for a Class of Quasilinear Parabolic Systems. *Communications in Partial Differential Equations*, **22**, 413-433. <https://doi.org/10.1080/03605309708821269>
- [10] Peng, R. and Zhao, X. (2012) A Reaction-Diffusion SIS Epidemic Model in a Time-Periodic Environment. *Nonlinearity*, **25**, 1451-1471. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/25/5/1451>
- [11] Brown, K.J., Dunne, P.C. and Gardner, R.A. (1981) A Semilinear Parabolic System Arising in the Theory of Superconductivity. *Journal of Differential Equations*, **40**, 232-252. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(81\)90020-6](https://doi.org/10.1016/0022-0396(81)90020-6)
- [12] 陈亚浙, 吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 56-62.