

具有小/大扩散系数的二维线性二阶椭圆算子的主特征值的渐近行为

潘 越

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2025年11月11日; 录用日期: 2025年12月5日; 发布日期: 2025年12月12日

摘 要

本文研究一类带有强/弱扩散和对流项的二维线性二阶椭圆算子在Neumann边界条件下的主特征值问题: $-D\Delta\varphi - 2\alpha\nabla m(x) \cdot \nabla\varphi + V(x)\varphi = \lambda\varphi$ 。我们重点分析主特征值在扩散系数趋于零或对流强度趋于无穷时的渐近行为, 特别关注特征函数的集中位置、局域结构及其与几何特征之间的关系。为此, 本文在奇异曲线邻域引入适应局部几何的移动坐标系, 并结合一致渐近展开、局部曲率及势函数的精细估计, 系统建立了主特征函数在极限情形下出现的结构以及主特征值的显式渐近式。所得结果揭示了扩散、对流与几何曲率之间的潜在耦合机制, 为理解参数依赖型椭圆算子的谱性质提供了统一框架, 并对已有文献中的相关结论进行了自然推广。

关键词

椭圆算子, 主特征值, 弱扩散, 强对流, 移动坐标方法, 渐近分析

Asymptotic Behavior of the Principal Eigenvalues of Two-Dimensional Linear Second-Order Elliptic Operators with Small/Large Diffusion Coefficients

Yue Pan

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: November 11, 2025; accepted: December 5, 2025; published: December 12, 2025

文章引用: 潘越. 具有小/大扩散系数的二维线性二阶椭圆算子的主特征值的渐近行为[J]. 应用数学进展, 2025, 14(12): 257-268. DOI: 10.12677/aam.2025.1412505

Abstract

This paper investigates the principal eigenvalue problem for a class of two-dimensional linear second-order elliptic operators with strong/weak diffusion and convection terms under Neumann boundary conditions: $-D\Delta\varphi - 2\alpha\nabla m(x) \cdot \nabla\varphi + V(x)\varphi = \lambda\varphi$. We focus on analyzing the asymptotic behavior of the principal eigenvalues as the diffusion coefficient approaches zero or the convection intensity tends to infinity, paying particular attention to the localization of eigenfunctions, their local structure, and their relationship with geometric parameters. To this end, we introduce a moving coordinate system adapted to the local geometry in the vicinity of singular curves. By combining uniform asymptotic expansions, local curvature estimates, and refined estimates for the potential function, we systematically establish the structure of the principal eigenfunction in the limit cases and derive explicit asymptotic formulas for the principal eigenvalues. The results reveal underlying coupling mechanisms among diffusion, convection, and geometric curvature, providing a unified framework for understanding the spectral properties of parameter-dependent elliptic operators and offering a natural extension of related conclusions in the existing literature.

Keywords

Elliptic Operator, Principal Eigenvalue, Weak Diffusion, Strong Convection, Moving Coordinate Method, Asymptotic Analysis

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

关于椭圆方程及协同椭圆系统在小或大扩散率极限下主特征值的渐近行为, 长期以来一直是研究热点[1]-[7]。从多种视角考察扩散对种群动力学、生态学与进化的影响已有大量研究成果[8]-[18]。主特征值在反应-扩散系统的稳定性分析、模式形成以及长期动力学行为中具有核心作用, 是线性算子谱理论与非线性偏微分方程研究中的基本对象[5] [19]。对于具有扩散与对流项的二阶椭圆算子, 其主特征值的大小不仅反映势函数的局部结构, 还受到扩散尺度、对流强度以及区域几何性质的共同影响。近年来, 围绕主特征值对参数的依赖性展开的一系列研究显著推动了多类偏微分方程模型的理论发展, 包括抛物方程的时间周期情形[5] [19]、具有漂移项的椭圆问题[18]以及与生态模型相关的扩散-迁移演化问题[11] [12]。其中, 在大对流或小扩散极限下给出主特征值的渐近行为[1], 是理解局域化现象与几何影响的重要途径。

对小扩散参数的特征值问题, 经典结果可追溯至 Friedman [2]与 Wentzell [6], 他们证明主特征函数在势函数局部极值点附近集中, 并建立了高阶近似的基本框架。随后, Donsker-Varadhan [20]及其后续研究进一步揭示了扩散弱化时特征函数的集中机制, 其主特征值的主导项由势函数的局部结构控制。在强对流极限方面, Berestycki-Hamel-Nadirashvili [18]以及 Chen-Lou [3]的研究表明, 漂移项驱动特征函数沿特征流线或能量最小化路径实现空间集中, 主特征值的极限行为可通过漂移场的旋转结构或局部几何不变量进行描述。

然而, 现有研究在处理二维区域中“曲线型奇异结构”时仍较为有限。大部分偏微分方程文献主要

聚焦于点状或离散奇异集的集中现象[8] [21], 而对于由闭合光滑曲线主导的特征函数集中行为, 理论上仍缺少系统性的处理方法。特别是在 Neumann 边界条件下, 当扩散趋于零或对流强度趋于无穷时, 主特征值如何由曲线的局部曲率、势函数的切向结构以及对流项的变化共同决定, 这一问题目前仅在零星文献中出现, 仍有待进一步深入。

基于上述背景, 本文考虑定义在二维光滑区域上的一类线性二阶椭圆算子, 其奇异结构由一条闭合光滑曲线给出。为了捕捉曲线附近的局部几何效应, 我们在奇异曲线邻域构造适应曲率变化的移动坐标系, 将算子局域化到窄带区域中, 并通过一致渐近展开与多尺度分析的方法, 推导主特征值在大对流与小扩散极限下的渐近式。所得结果刻画了扩散、对流与曲率之间的耦合机制, 并为非自伴算子背景下的参数依赖型谱理论提供了可推广的技术框架。该分析不仅在结构上统一了大对流与小扩散两类极限情形, 也对已有文献中关于集中现象的讨论形成自然补充与拓展。

我们考虑如下线性化的特征值问题,

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi - 2\alpha\nabla m \cdot \nabla\varphi + V\varphi = \lambda\varphi, & \text{in } \Omega, \\ \partial_n\varphi = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

本文中假设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界 C^3 光滑域, 势函数 $V, m \in C^3(\bar{\Omega})$, 由经典椭圆正则性理论, 文中涉及的泰勒展开、曲率坐标构造等均在上述正则性框架内严格成立。其中常数 $D > 0$, α 为扩散与对流系数; $m(x)$ 与 $v(x)$ 为定义在闭域 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数。

设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中一条光滑的闭曲线, 其总长度记为 $l = |\Gamma|$ 。曲线上任意一点 x 满足条件 $|\nabla m(x)| = 0$ 。我们取 Γ 的标准参数化 $\gamma(\theta)$, 一般自然是正向的, 且以长度为参数, 其中 θ 表示从曲线上某一固定点起量的弧长参数。记 $v(\theta)$ 为曲线 Γ 的外侧单位法向量。若点 (x, y) 足够靠近 Γ , 即距离小于某一充分小的常数 $\delta_0 > 0$, 则可表示为

$$x = \gamma_1(\theta) + t\nu_1(\theta), \quad y = \gamma_2(\theta) + t\nu_2(\theta)$$

其中 $|t| < \delta_0$, $\theta \in [0, l)$ 。同时映射 $(x, y) \mapsto (\theta, t)$ 在该邻域内为局部微分同胚。向量 $\gamma'(\theta)$ 与 $v(\theta)$ 分别为曲线 Γ 的切向量与法向量。

首先给出一个引理。

引理 1.1. 切向量 $\gamma_1'(\theta), \gamma_2'(\theta)$ 与法向量 $\nu_1(\theta), \nu_2(\theta)$, 满足下述关系:

$$\gamma_1'(\theta)\nu_2(\theta) - \gamma_2'(\theta)\nu_1(\theta) = 1.$$

证明. 根据叉乘(或二维向量的外积/行列式)定义, 有

$$|\gamma'(\theta) \times v(\theta)| = |\gamma'(\theta)| |v(\theta)| \sin \angle(\gamma'(\theta), v(\theta)) = 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad (2)$$

因为切向量与法向量互相垂直且均为单位向量。

用坐标表示有

$$\gamma'(\theta) = \gamma_1'(\theta)\mathbf{i} + \gamma_2'(\theta)\mathbf{j}, \quad v(\theta) = \nu_1(\theta)\mathbf{i} + \nu_2(\theta)\mathbf{j}. \quad (3)$$

因此 $\gamma'(\theta) \times v(\theta) = (\gamma_1'(\theta)\nu_2(\theta) - \gamma_2'(\theta)\nu_1(\theta))(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$ 。

注意到 $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{j} = 1$, 于是得到

$$|\gamma'(\theta) \times v(\theta)| = \gamma_1'(\theta)\nu_2(\theta) - \gamma_2'(\theta)\nu_1(\theta).$$

将(2)与(3)联立, 可得所需结论 $\gamma_1'(\theta)\nu_2(\theta) - \gamma_2'(\theta)\nu_1(\theta) = 1$, 证明完毕。

由 $|\gamma'(\theta)| = 1$, 且满足 $v'(\theta) = k(\theta)\gamma'(\theta)$ 、 $\gamma''(\theta) = k(\theta)v(\theta)$ 及 $\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 = 1$, 其中 $k(\theta)$ 表示曲线 Γ 的曲

率, 故可以将方程重写为以变量 θ 与 t 表示的形式:

$$\begin{cases} -D \left[\varphi_{\theta\theta} \frac{1}{(1+kt)^2} + \varphi_{tt} - \varphi_{\theta t} \frac{k't}{(1+kt)^3} - \varphi_t \frac{k}{1+kt} \right] + 2\alpha \left(m_{\theta} \varphi_{\theta} \frac{1}{(1+kt)^2} + m_t \varphi_t \right) + V\varphi = \lambda\varphi & \text{in } \Omega, \\ \partial_n \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

将方程(4)乘以 $e^{2\alpha m/D}$, 可写成散度形式:

$$\begin{cases} -D\nabla \cdot (e^{2\alpha m/D} \nabla \varphi) + e^{2\alpha m/D} V\varphi = \lambda e^{2\alpha m/D} \varphi & \text{in } \Omega, \\ \partial_n \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

定义算子 L 为 $Lu = -D\Delta u - \alpha \nabla m \cdot \nabla u + V(x)u$, 通过代换 $u = w\varphi$ 、 $w = e^{\frac{\alpha}{2D}m}$, 可将 L 转化为无一阶项的算子 $\tilde{L} = -D\Delta + \tilde{V}$, 该算子在 $L^2(\Omega)$ 上是自伴的, 因此 L 与其相似。又问题(5)的所有特征值为实数, 其最小特征值记为 $\lambda(\alpha, D)$, 并且主特征值具有如下表征:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha, D) &= \inf_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega), \varphi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} e^{\frac{2\alpha m}{D}} (D|\nabla \varphi|^2 + V\varphi^2) dx}{\int_{\Omega} e^{\frac{2\alpha m}{D}} \varphi^2 dx} \\ &= \inf_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega), \varphi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} e^{\frac{2\alpha m}{D}} \left[D \left(\frac{\varphi_{\theta}^2}{(1+kt)^2} + \varphi_t^2 \right) + V\varphi^2 \right] (1+kt) d\theta dt}{\int_{\Omega} e^{\frac{2\alpha m}{D}} \varphi^2 (1+kt) d\theta dt} \end{aligned} \quad (6)$$

2. 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 且 D 固定的情形

陈和楼在文献[1]中给出了下述重要结果:

引理 2.1. 假设 $m(x)$ 的所有临界点均为非退化的。则当 $\frac{\alpha}{(1+D)\ln(2+D)} \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lim \lambda(\alpha, D) = \min_{x \in \mathcal{M}} V(x),$$

其中 $\mathcal{M}$ 表示 m 的局部极大点集合。

证明. 做变量代换

$$\tilde{\theta} = \sqrt{\alpha}(\theta - \theta_0), \quad \tilde{t} = \sqrt{\alpha}(t - t_0) \quad (7)$$

其中取 $t_0 = 0$, 在点 (θ_0, t_0) 处对二元函数 $m(\theta, t)$ 以及在 θ_0 处对曲率函数 $k(\theta)$ 作泰勒展开, 并将 $m(\theta, t)$ 用 $\tilde{\theta}, \tilde{t}$ 表示、将 $k(\theta)$ 用 $\tilde{\theta}$ 表示, 得到:

$$\begin{aligned} m(\theta, t) &= m(\theta_0, t_0) + \frac{1}{2} m_{\theta\theta} (\theta - \theta_0)^2 + \frac{1}{2} m_{tt} (t - t_0)^2 + m_{\theta t} (\theta - \theta_0)(t - t_0) \\ &= m(0, 0) + \frac{1}{2\alpha} m_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} \tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\alpha} m_{\tilde{t}\tilde{t}} \tilde{t}^2 + \frac{1}{\alpha} m_{\tilde{\theta}\tilde{t}} \tilde{\theta}\tilde{t} + O(\alpha^{-3/2}) \end{aligned} \quad (8)$$

以及

$$\begin{aligned} k(\theta) &= k(\theta_0) + k'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2} k''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2 + O((\theta - \theta_0)^3) \\ &= k(0) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} k'(0) \tilde{\theta} + \frac{1}{2\alpha} k''(0) \tilde{\theta}^2 + O(\alpha^{-1} \tilde{\theta}^2) \end{aligned} \quad (9)$$

在上述展开中我们利用了 $m_\theta(\theta_0, t_0) = m_t(\theta_0, t_0) = 0$ 。

将 $m(\theta, t)$ 与 $k(\theta)$ 的结果代入公式(5)，我们注意到当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时， α 的变化与 $k(\theta)$ 的变化相互独立，因此在闭曲线 Γ 上仍然得到相同的结论：

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda(\alpha, D) = \min_{x \in \mathcal{M}} V(x).$$

定理 2.1. 假设在 Σ_1^* 上有 $D^2m < 0$ ，则

$$\lim_{\substack{\alpha \\ (1+D)\ln(2+D) \rightarrow \infty}} \lambda(\alpha, D) = \min_{\Sigma_1^*} V.$$

其中 $\Sigma_1^* := \{x \in \bar{\Omega} : |\nabla m(x)| = 0, D^2m(x) \leq 0\}$ 。

证明. 我们先来证明上界的部分。

令 $x_0 \in \Sigma_1^*$ 。则存在正的常数 c 与 R_1 ，使得

$$m(x_0) - m(x) \geq c|x - x_0|^2 \quad (10)$$

当 $x_0 \in \Sigma_1^*$ 且 $\forall x \in B(x_0, R_1) \cap \bar{\Omega}$ 成立。

事实上，当 $x_0 \in \Sigma_1^*$ 时，由于 $D^2m(x_0) < 0$ ，有

$$m(x) - m(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T (D^2m(x_0) + o(1))(x - x_0) \leq \left[\frac{\kappa^*(x_0)}{2} + o(1) \right] |x - x_0|^2$$

其中 $\kappa^*(x_0) \leq 0$ 为 $D^2m(x_0)$ 的最大特征值。取 $c = -\frac{1}{4}\kappa^*(x_0)$ 并选择足够小的 R_1 ，即可得到上述不等式。

我们还有

$$m(x) - m(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T (D^2m(x_0) + o(1))(x - x_0) \geq \left[\frac{\bar{\kappa}(x_0)}{2} + o(1) \right] |x - x_0|^2$$

其中 $\bar{\kappa}(x_0) \leq 0$ 为 $D^2m(x_0)$ 的最小特征值。取 $C = 2|\bar{\kappa}(x_0)|$ ，并令 R_1 足够小，即得到相应的不等式。

固定任一 $R \in (0, R_1/2]$ 并定义

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x - x_0| < R, \\ 2 - \frac{|x - x_0|}{R}, & |x - x_0| \in [R, 2R], \\ 0, & |x - x_0| > 2R, \end{cases}$$

以及

$$\zeta(x) = e^{\alpha[m(x) - m(x_0)]/D} \eta(x), \quad c_{\alpha, D} = \int_{\Omega} \zeta^2(x) dx, \quad w(x) = \frac{\zeta(x)}{\sqrt{c_{\alpha, D}}}.$$

注意到

$$\nabla w - \frac{\alpha w}{D} \nabla m = e^{\alpha[m(x) - m(x_0)]/D} \frac{\nabla \eta}{\sqrt{c_{\alpha, D}}}.$$

在 $\bar{B}(x_0, R) \cup (\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, 2R))$ 上有 $|\nabla \eta| = 0$ ，而在 $\bar{\Omega} \cap B(x_0, 2R) \setminus \bar{B}(x_0, R)$ 上有 $|\nabla \eta| = 1/R$ 。因此，

$$\begin{aligned} D \left(\nabla w - \frac{\alpha w}{D} \nabla m \right)^2 &= \frac{D}{c_{\alpha, D}} e^{2\alpha[m(x) - m(x_0)]/D} |\nabla \eta|^2 = \frac{1}{c_{\alpha, D}} \frac{D}{R^2} e^{2\alpha[m(x) - m(x_0)]/D} \\ &\leq \frac{1}{c_{\alpha, D}} e^{\alpha[m(x) - m(x_0)]/D} e^{-c\alpha R^2/D + \ln[D/R^2]}, \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

接下来估计

$$\frac{1}{c_{\alpha,D}} \int_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} e^{\alpha[m(x)-m(x_0)]/D} dx = O(1).$$

我们知道在 Σ_1^* 中 $D^2m(x_0) \leq 0$, 因此需要分别估计 $D^2m(x_0) < 0$ 与 $D^2m(x_0) = 0$ 两种情况。

首先, 当 $D^2m(x_0) < 0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{\alpha,D}} \int_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} e^{\alpha[m(x)-m(x_0)]/D} dx &\leq \frac{1}{c_{\alpha,D}} \int_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} e^{-C\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - x_i^0)^2} dx \\ &= \frac{1}{c_{\alpha,D} \cdot \sqrt{c\alpha}} \int_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} e^{-\sum_{i=1}^2 y_i^2} dy \\ &\leq \frac{\pi}{c_{\alpha,D} \cdot \sqrt{c\alpha}} \end{aligned}$$

其中 $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, 并令 $y = \sqrt{c\alpha}(x - x_0)$ 。当 $\alpha \rightarrow \infty$ 且 D 固定时, 上述给出所需估计。

接下来证明当 $D^2m(x_0) = 0$ 时也成立。设 κ_i 为 $D^2m(x_0)$ 的特征值, 且假设 $\kappa_1 = 0$, 则

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c_{\alpha,D}} \int_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} e^{\alpha[m(x)-m(x_0)]/D} dx \\ &= \frac{1}{c_{\alpha,D}} \int_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} \exp\left(\frac{\alpha}{D} \left[\frac{1}{2} \kappa_1 (x - x_1^0)^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 (x - x_2^0)^2 \right] + O(|x - x_0|^3) \right) / D dx \\ &= \frac{1}{c_{\alpha,D}} \int_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} \exp\left(\frac{\alpha}{D} \left[\frac{1}{2} \kappa_2 (x - x_2^0)^2 \right] + O(|x - x_0|^3) \right) / D dx \\ &\leq \frac{1}{c_{\alpha,D}} \int_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} \exp\left(\frac{\alpha}{4D} \kappa_2 (x - x_2^0)^2\right) dx \end{aligned}$$

同样令 $\alpha \rightarrow \infty$, 可得所需估计。

因此,

$$\lambda(\alpha, D) \leq \int_{\Omega} \left\{ D \left| \nabla w - \frac{\alpha}{D} w \nabla m \right|^2 + V w^2 \right\} dx \leq O(1) e^{-c\alpha R^2/D + \ln[D/R^2]} + \max_{B(x_0, 2R)} V$$

于是

$$\overline{\lim_{\alpha/(D \ln[D+2]) \rightarrow \infty}} \lambda(\alpha, D) \leq \max_{\bar{B}(x_0, 2R)} V.$$

令 $R \rightarrow 0$, 得

$$\overline{\lim_{\alpha/(D \ln[D+2]) \rightarrow \infty}} \lambda(\alpha, D) \leq V(x_0).$$

由于 x_0 是 Σ_1^* 中任意一点, 故得

$$\lim_{\alpha/(D \ln[D+2]) \rightarrow \infty} \lambda(\alpha, D) \leq \min_{\Sigma_1^*} V.$$

在继续证明下界之前, 先引入后文将会使用的一些记号。

设 φ_α 为与主特征值 $\lambda_1(\alpha)$ 对应的特征函数, 令 $w_\alpha = e^{\alpha m} \varphi_\alpha$, 不失一般性, 假设对任意 α 有 $\int_{\Omega} w_\alpha^2 dx = 1$ 。

对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$, 通过在 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ 上令 $w_\alpha \equiv 0$, 将 w_α 扩展为定义在全空间 $\mathbb{R}^2$ 上的函数。定义测度 μ_α 为 $\mu_\alpha(A) = \int_A w_\alpha^2 dx$ 。

则 μ_α 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的 Radon 测度, 且 $\text{supp}(\mu_\alpha) \subset \bar{\Omega}$ 且 $\mu_\alpha(\bar{\Omega}) = 1$, 其中 $\text{supp}(\mu_\alpha)$ 表示 μ_α 的紧支集。由 Radon 测度的弱紧性, 存在一个序列 $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 与一个 Radon 测度 μ , 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\alpha_k \rightarrow \infty$ 且 μ_{α_k} 在弱*意义下收敛到 μ , 即对任意 $\zeta \in C(\bar{\Omega})$ 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w_{\alpha_k}^2(x) \zeta(x) dx = \int_{\Omega} \zeta(x) d\mu,$$

并满足 $\text{supp}(\mu) \subset \bar{\Omega}$ 且 $\mu(\bar{\Omega}) = 1$ 。

接下来我们将证明

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty, \alpha/D \rightarrow \infty} \lambda(\alpha, D) \geq \min_{\Sigma_1} V(x).$$

自然地,

$$\text{supp}(\mu) \subset \Sigma_1$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty, \alpha/D \rightarrow \infty} \inf \lambda_1(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty, \alpha/D \rightarrow \infty} \inf \frac{\int_{\Omega} e^{2\alpha m} |\nabla \varphi_\alpha|^2 dx + \int_{\Omega} e^{2\alpha m} V \varphi_\alpha^2 dx}{\int_{\Omega} e^{2\alpha m} \varphi_\alpha^2 dx} \\ &\geq \lim_{\alpha \rightarrow \infty, \alpha/D \rightarrow \infty} \inf \frac{\int_{\Omega} e^{2\alpha m} V \varphi_\alpha^2 dx}{\int_{\Omega} e^{2\alpha m} \varphi_\alpha^2 dx} \\ &= \liminf_{\alpha \rightarrow \infty, \alpha/D \rightarrow \infty} \frac{\int_{\Omega} V w_\alpha^2 dx}{\int_{\Omega} w_\alpha^2 dx} = \frac{\int_{\Omega} V d\mu}{\mu(\Omega)} \geq \min_{\Sigma_1} V(x) \end{aligned}$$

从而得到所需的下界结论。

在大对流极限下, 主特征值的渐近行为由定理 2.1 叙述给出。这表明, 强烈的对流驱动特征函数沿流线方向局域化, 其集中位置由沿切向的势能梯度的极小值决定。在此过程中, 尽管几何曲率出现在局部坐标的表达式中, 但其影响在对切向变量的变化进行平均后被完全抵消。可以看出在大对流主导的系统中, 其主特征值在主导阶上仅依赖于势能函数沿曲线的切向梯度, 而与曲线自身的几何曲率无关。

3. 当 $D \rightarrow 0^+$ 且 α 固定时的情形

现考虑 $m(\theta, t)$ 的二阶导数, 设

$$A = D^2 m(\theta, t) = \begin{pmatrix} m_{\theta\theta} & m_{\theta t} \\ m_{t\theta} & m_{tt} \end{pmatrix}.$$

考虑 $m(x, y)$ 的二阶导数, 设 $B = D^2 m(x, y)$, 有如下形式:

$$\begin{pmatrix} m_{\theta\theta} \left(\frac{v_2}{1+kt} \right)^2 + m_{tt} \gamma_{2'}^2 & m_{\theta\theta} \frac{-v_1 v_2}{(1+kt)^2} - m_{tt} \gamma_{1'} \gamma_{2'} + m_{\theta t} \frac{\gamma_{2'} v_1 + \gamma_{1'} v_2}{1+kt} \\ m_{\theta\theta} \frac{-v_1 v_2}{(1+kt)^2} - m_{tt} \gamma_{1'} \gamma_{2'} + m_{\theta t} \frac{\gamma_{2'} v_1 + \gamma_{1'} v_2}{1+kt} & m_{\theta\theta} \left(\frac{v_1}{1+kt} \right)^2 + m_{tt} \gamma_{1'}^2 \end{pmatrix}$$

当 $t=0$ 时, 存在过渡矩阵

$$C = \begin{pmatrix} -v_2 & v_1 \\ \gamma_{2'} & \gamma_{1'} \end{pmatrix}$$

使得 $B = C^T A C$ ，且 $|C| = \gamma_1 \nu_2 - \gamma_2 \nu_1 = 1$ 。

我们注意到当 $D \rightarrow 0$ 且 α 固定时， D 的变化与 $k(\theta)$ 的变化相互独立，因此在闭曲线 Γ 上得到如下结论。

定理 3.1. 假设在 Γ 上有 $|\nabla m| = 0$ ，令 α 为一固定的正数。则

$$\lim_{D \rightarrow 0} \lambda(\alpha, D) = \min_{x \in \Gamma} \left\{ V(x) + \alpha \sum_{i=1}^N (|\kappa_i(x)| + \kappa_i(x)) \right\}$$

其中 $\mathcal{M}^* = \left\{ x \in \Gamma \mid V(x) + \alpha \sum_{i=1}^N (|\kappa_i(x)| + \kappa_i(x)) = \min \right\}$ 。

证明. 证明分为两部分，我们先来处理上界。

通过在等式(5)中作代换 $\varphi = e^{-\alpha m/D} w$ 可得到相应方程。注意到 $w = e^{\alpha m/D} \varphi$ 满足

$$\begin{cases} -D\Delta w + \left(\frac{\alpha^2}{D} |\nabla m|^2 + \alpha \Delta m + V - \lambda \right) w = 0 & \text{in } \Omega, \\ D\partial_n w = \alpha w \partial_n m & \text{on } \partial\Omega, \\ w > 0 \text{ on } \bar{\Omega}, \quad \int_{\Omega} w^2 dx = 1. \end{cases}$$

注意主特征值 $\lambda(\alpha, D)$ 亦可由变分表征给出：

$$\lambda(\alpha, D) = \min_{\int_{\Omega} w^2 dx = 1} \int_{\Omega} \left\{ D \left| \nabla w - \frac{\alpha}{D} w \nabla m \right|^2 + V w^2 \right\} dx. \quad (11)$$

令 $x_0 \in \Gamma$ ，并记为 $D^2 m(x_0)$ 的特征值， $i = 1, 2$ 。经过适当旋转，可假设 $D^2 m(x_0) = \text{diag}(k_1, k_2)$ ，这里 $k_i = \kappa_i(x_0)$ ，且

$$m_{x_i}(x) = k_i(x - x_0)_i + O(|x - x_0|^2)$$

选择一固定且足够小的正数 δ ，令

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{D}{\alpha}}, \quad \zeta(x) = \frac{1}{\varepsilon^{N/2}} \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{i=1}^N (|k_i| + \delta)(x - x_0)_i^2 \right),$$

并设 $c_{\varepsilon, \delta} = \int_{\Omega} \zeta^2(x) dx$ ， $w(x) = \frac{\zeta(x)}{\sqrt{c_{\varepsilon, \delta}}}$ 。

由于 x_0 为内点，有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{\varepsilon, \delta} = \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left(-\sum_{i=1}^N (|k_i| + \delta) y_i^2 \right) dy = \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\pi}{|k_i| + \delta}} =: c(\delta).$$

由(6)，有

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha, D) &\leq \int_{\Omega} \left\{ D \left| \nabla \ln w - \frac{\alpha}{D} \nabla m \right|^2 + V \right\} w^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^N (|k_i| + \delta + k_i)^2 (x - x_0)_i^2 + O(|x - x_0|^3) + V(x) \right\} w^2 dx \end{aligned}$$

设 $y = (x - x_0)/\varepsilon$ ，并定义 $\Omega_{\varepsilon} = \{(x - x_0)/\varepsilon : x \in \Omega\}$ ，则

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_{D \rightarrow 0} \lambda(\alpha, D) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\zeta^2(x_0 + \varepsilon y)}{c_{\varepsilon, \delta}} \left\{ V(x_0 + \varepsilon y) + \alpha \sum_{i=1}^N (|k_i| + \delta + k_i)^2 y_i^2 + O(\varepsilon) |y|^3 \right\} \varepsilon^N dy \\
&= \frac{1}{c(\delta)} \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left(- \sum_{i=1}^N (|k_i| + \delta) y_i^2 \right) \left\{ V(x_0) + \alpha \sum_{i=1}^N (|k_i| + \delta + k_i)^2 y_i^2 \right\} dy \\
&= V(x_0) + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(|k_i| + \delta + k_i)^2}{|k_i| + \delta}.
\end{aligned}$$

最后令 $\delta \rightarrow 0$ ，并在求和时分别考虑 $k_i > 0$ 与 $k_i \leq 0$ 的情形，可得

$$\overline{\lim}_{D \rightarrow 0} \lambda(\alpha, D) \leq V(x_0) + \alpha \sum_{i=1}^N (|\kappa_i(x_0)| + \kappa_i(x_0)).$$

下面来证明下界，为方便起见，记

$$\Theta(x) := \sum_{i=1}^2 (|\kappa_i(x)| + \kappa_i(x)), \quad \forall x \in \Sigma.$$

这里 $\Sigma_1 = \{x \in \bar{\Omega} : |\nabla m(x)| = 0\}$ ，若 $x \in \Sigma_1$ ，则 κ_1, κ_2 为 $D^2 m(x)$ 的特征值。

定义 3.1. {离散临界集}

假设集合

$$\mathcal{M}^* = \left\{ x \in \Gamma : V(x) + \alpha \sum_{i=1}^N (|\kappa_i| + \kappa_i) = \lambda^* \right\}$$

仅含单一点 x_0 ，且 x_0 是我们所取上界的最小值点。

令 ω 为归一化的特征函数，满足 $\int_{\Omega} \omega^2 dx = 1$ ，并取一个小常数 $R > 0$ 。用开球 $B(x_0, \frac{R}{3})$ 覆盖 x_0 ，并取与该开覆盖相适应的分区单位 $\{\zeta_k\}_{k=0,1}$ ，满足

在 $\mathbb{R}^2 \setminus B(x_0, R)$ 中 $\sum_{k=0}^1 \zeta_k^2 = 1, \zeta_1 \equiv 0$ ，这里 $|\nabla \zeta_1| \leq C/R$ 。

在 $\mathbb{R}^2 \setminus B(x_0, R/2)$ 中 $\zeta_0 \equiv 0$ 。

注意对任意 $x \in \mathbb{R}^2$ 至少存在一个 $\zeta_k \neq 0$ 。因此对任意 $x \in \mathbb{R}^2$ ，

$$\sum_{k=0}^1 (\nabla \zeta_k)^2 \leq \frac{C(N)}{R^2}$$

我们定义 $W_k = \zeta_k \omega$ ， $k = 0, 1$ 。

定理 3.2. 假设 $B(x_0, R) \subset \Omega$ ，且记 $W = \Omega \setminus B(x_0, R)$ 。设 $\kappa_1(x_0), \dots, \kappa_N(x_0)$ 为 $D^2 m(x_0)$ 的特征值。令常数 $C = 2N \|D^3 m\|_{L^\infty(\Omega)}$ ，则有

$$E(W) \geq \alpha \left\{ \sum_{i=1}^N (|\kappa_i(x_0)| + \kappa_i(x_0)) - CR \right\} \int_{\Omega} W^2 dx. \quad (12)$$

证明. 设 $\{e_1(x_0), \dots, e_N(x_0)\}$ 为 $D^2 m(x_0)$ 的一组正交归一特征基，对应的特征值为 $\kappa_1(x_0), \dots, \kappa_N(x_0)$ 。引入符号函数

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ -1, & s \leq 0. \end{cases}$$

由定义有

$$\begin{aligned} E[W] &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D \left(e_i \cdot \left(\nabla W - \frac{\alpha W}{D} \nabla m \right) \right)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N D \left(e_i \cdot \nabla W + \operatorname{sgn}(\kappa_i) \frac{\alpha W}{D} e_i \cdot \nabla m \right)^2 dx + J \geq J \end{aligned}$$

其中

$$J := - \sum_{\kappa_i > 0} \int_{\Omega} 2e_i \cdot \alpha \nabla m \nabla W^2 dx.$$

记 $e_i \cdot \nabla W = W_i$ ，类似地定义 m_i ，并处理 m_{ii} ：

$$m_{ii} = \partial_{ii} \left(m(x_0) + \nabla m(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 m(x_0) [x - x_0]^2 + O(|x - x_0|^3) \right) = e_i^T D^2 m e_i$$

由矩阵理论可知

$$\kappa_i(x_0) = e_i^T D^2 m(x_0) e_i.$$

利用散度定理，并结合 ∇m 在边界上的性质，可导出

$$\int_{\Omega} \nabla W_i^2 \cdot \nabla m_i dx = \int_{\partial\Omega} W^2 \nabla m_i \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} W^2 m_{ii} dx.$$

因此

$$\begin{aligned} J &= \sum_{\kappa_i > 0} \int_{\Omega} 2\alpha W^2 e_i^T D^2 m e_i dx \\ &= \alpha \sum_{\kappa_i > 0} \int_{\Omega} \left(2e_i^T D^2 m(x_0) e_i + 2e_i^T [D^2 m(x) - D^2 m(x_0)] e_i \right) W^2 dx \\ &= \alpha \sum_{\kappa_i > 0} \int_{\Omega} \left(2\kappa_i + 2e_i^T [D^3 m(x_0) + O(R)] e_i \right) W^2 dx \\ &\geq \alpha \left\{ \sum_{i=1}^N \Theta(x_0) - 2N \|D^3 m\|_{L^\infty(\Omega)} R \right\} \int_{\Omega} W^2 dx \end{aligned}$$

其中 $\Theta(x_0)$ 是与 $\kappa_i(x_0)$ 相关的度量。由此得出所述不等式。

我们据此完成 λ 的分离估计，先做如下计算：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda \omega^2 \zeta^2 dx &= -\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(\omega^2 \zeta^2 \nabla m) dx + D \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla(\omega \zeta^2) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} V \omega^2 \zeta^2 dx + \int_{\Omega} \alpha \nabla m \cdot (\omega^2 \zeta^2) dx + \int_{\Omega} \frac{\alpha^2 (\nabla m)^2}{D} \omega^2 \zeta^2 dx \\ &= -\alpha \int_{\Omega} \Delta m W^2 dx - 2\alpha \int_{\Omega} W \nabla m \cdot (\omega \nabla \zeta + \zeta \nabla \omega) dx \\ &\quad + D \int_{\Omega} (\nabla \omega)^2 \zeta^2 dx + 2D \int_{\Omega} W \nabla \omega \cdot \nabla \zeta dx \\ &\quad + \int_{\Omega} V W^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \Delta m W^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\alpha^2 (\nabla m)^2}{D} W^2 dx \end{aligned} \quad (13)$$

整理上述公式可得

$$\int_{\Omega} \left(D \left(\nabla W - \frac{\alpha W}{D} \nabla m \right)^2 + V W^2 \right) dx = \lambda \int_{\Omega} W^2 dx + D \int_{\Omega} \omega^2 (\nabla \zeta)^2 dx \quad (14)$$

应用上述结论，我们得到

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^1 \lambda(\alpha, D) \int_{\Omega} W_k^2 dx + D \int_{\Omega} \omega^2 (\nabla \zeta_k)^2 dx = \sum_{k=0}^1 \int_{\Omega} \left(D \left(\nabla W_k - \frac{\alpha W_k}{D} \nabla m \right)^2 + V W_k^2 \right) dx \\
& \geq \sum_{k=0}^1 (\Theta(x_0) - CR) \int_{\Omega} W_k^2 dx + \int_{\Omega} V W_k^2 dx = (\Theta(x_0) - CR + V) \sum_{k=0}^1 \int_{\Omega} W_k^2 dx \\
& \geq \left(\min_{x \in B(x_0, R)} \{ \Theta(x_0) + V(x_0) \} - CR \right) \sum_{k=0}^1 \int_{\Omega} W_k^2 dx
\end{aligned} \tag{15}$$

由上式估计可得

$$\left(\lambda(\alpha, D) - \min_{x \in B(x_0, R)} \{ \Theta(x_0) + V(x_0) \} \right) \int_{\Omega} \omega^2 \sum_{k=0}^1 \zeta_k^2 dx \geq -CR - \frac{C(N)D}{R^2}.$$

因此

$$\int_{\Omega} \omega^2 \zeta_0^2 dx \leq \int_{\Omega \setminus B(x_0, R)} \omega^2 dx \leq \frac{DC(R)(1+\alpha)}{\alpha^2}.$$

于是

$$\int_{\Omega} \omega^2 \sum_{k=0}^1 \zeta_k^2 dx = 1 - \int_{\Omega} \omega^2 \zeta_0^2 dx \geq 1 - \frac{DC(R)(1+\alpha)}{\alpha^2}.$$

令 $D \rightarrow 0$ 且 $R \rightarrow 0$, 得到

$$\lim_{D \rightarrow 0} \lambda(\alpha, D) \geq \min_{x \in B(x_0, R)} \{ \Theta(x_0) + V(x_0) \}$$

在小扩散极限下, 主特征值的渐近行为由定理 3.1 给出。分析得到, 极弱的扩散导致了一个“吸附”过程: 特征函数被紧紧束缚在势能最高点附近的极小邻域内。其沿法向的分布由扩散与势能的局域平衡所主导, 而曲率在此局域化过程中的贡献在积分后被吸收为一个全局常数。因此, 在弱扩散主导的系统中, 主特征值在主导阶上由势函数在局部极大值点处的函数值及其 Hessian 矩阵在法向上的形式共同决定, 而几何曲率仅贡献一个整体的尺度因子。

4. 总结与展望

本文旨在探究二维线性二阶椭圆算子的主特征值在奇异极限下如何受区域几何影响。研究表明, 尽管在大对流与小扩散两种极限下, 主特征值的渐近主项均不明显依赖于曲线的几何曲率, 但本文采用的基于曲率的移动坐标法却是得出这一结论所不可或缺的理论工具。为提供直观阐释, 考虑这样一个例子: 在椭圆区域 Ω 中, 其内奇异曲线 Γ 为一同心圆, 势函数在 Γ 上非均匀分布。在大对流情况下, 主特征函数并不集中于势能最高处, 而是在势能沿流向下最快下降的位置变得尖锐, 系统行为由势能梯度主导, 与曲线几何形状无关。在小扩散的情况下, 主特征函数表现为环绕 Γ 的完整窄带, 最大值位于势能最高点。系统行为由势能极值点控制, 几何曲率的影响被吸收到常数中。在这样的系统里, 扩散导致基于势能极值的全局集中, 而对流引发基于势能梯度的局部集中。

本工作构建的统一理论框架, 不仅严格推导了渐近公式, 更阐明了几何曲率在移动坐标系中的基础性作用及其在极限下的特殊表现, 统一了对两类极限行为的理解, 揭示了曲率贡献如何在不同物理机制下被吸收或压制的规律。

未来值得进一步研究的方向包括: 弱扩散与强对流同时变化时的耦合极限; 时间周期性或随机对流场下的主特征值行为; 多曲线结构或更高维流形上的局域化机制; 以及将本文方法拓展到非线性模型, 以分析由主特征值主导的稳定性与分岔行为。上述问题的深入研究将有助于推动参数依赖型椭圆算子谱

理论的发展, 并加深对复杂扩散 - 对流系统长期动力学特征的理解。

参考文献

- [1] Chen, X. and Lou, Y. (2012) Effects of Diffusion and Advection on the Smallest Eigenvalue of an Elliptic Operator and Their Applications. *Indiana University Mathematics Journal*, **61**, 45-80. <https://doi.org/10.1512/iumj.2012.61.4518>
- [2] Friedman, A. (1973) The Asymptotic Behavior of the First Real Eigenvalue of a Second Order Elliptic Operator with a Small Parameter in the Highest Derivatives. *Indiana University Mathematics Journal*, **22**, 1005-1015. <https://doi.org/10.1512/iumj.1973.22.22084>
- [3] Chen, X. and Lou, Y. (2008) Principal Eigenvalue and Eigenfunctions of an Elliptic Operator with Large Advection and Its Application to a Competition Model. *Indiana University Mathematics Journal*, **57**, 627-658. <https://doi.org/10.1512/iumj.2008.57.3204>
- [4] Chen, X., Hambrock, R. and Lou, Y. (2008) Evolution of Conditional Dispersal: A Reaction-Diffusion-Advection Model. *Journal of Mathematical Biology*, **57**, 361-386. <https://doi.org/10.1007/s00285-008-0166-2>
- [5] Peng, R. and Zhao, X. (2015) Effects of Diffusion and Advection on the Principal Eigenvalue of a Periodic-Parabolic Problem with Applications. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54**, 1611-1642. <https://doi.org/10.1007/s00526-015-0838-x>
- [6] Vent-Tsel', A.D. (1976) On the Asymptotic Behavior of the First Eigenvalue of a Second-Order Differential Operator with Small Parameter in Higher Derivatives. *Theory of Probability & Its Applications*, **20**, 599-602. <https://doi.org/10.1137/1120064>
- [7] Berestycki, H., Nirenberg, L. and Varadhan, S.R.S. (1994) The Principal Eigenvalue and Maximum Principle for Second-order Elliptic Operators in General Domains. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **47**, 47-92. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160470105>
- [8] Lam, K., Lou, Y. and Lutscher, F. (2014) Evolution of Dispersal in Closed Advective Environments. *Journal of Biological Dynamics*, **9**, 188-212. <https://doi.org/10.1080/17513758.2014.969336>
- [9] McPeck, M.A. and Holt, R.D. (1992) The Evolution of Dispersal in Spatially and Temporally Varying Environments. *The American Naturalist*, **140**, 1010-1027. <https://doi.org/10.1086/285453>
- [10] Cosner, C. and Lou, Y. (2003) Does Movement toward Better Environments Always Benefit a Population? *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **277**, 489-503. [https://doi.org/10.1016/s0022-247x\(02\)00575-9](https://doi.org/10.1016/s0022-247x(02)00575-9)
- [11] Dockery, J., Hutson, V., Mischaikow, K. and Pernarowski, M. (1998) The Evolution of Slow Dispersal Rates: A Reaction Diffusion Model. *Journal of Mathematical Biology*, **37**, 61-83. <https://doi.org/10.1007/s002850050120>
- [12] Belgacem, F. and Cosner, C. (1995) The Effects of Dispersal along Environmental Gradients on the Dynamics of Populations in Heterogeneous Environments. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, **3**, 379-397.
- [13] Lou, Y., Zhao, X.-Q. and Zhou, P. (2019) Global Dynamics of a Lotka-Volterra Competition-Diffusion-Advection System in Heterogeneous Environments. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **121**, 47-82. <https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.06.010>
- [14] Zhou, P. and Zhao, X.-Q. (2018) Evolution of Passive Movement in Advective Environments: General Boundary Condition. *Journal of Differential Equations*, **264**, 4176-4198. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.12.005>
- [15] Lou, Y. and Lutscher, F. (2013) Evolution of Dispersal in Open Advective Environments. *Journal of Mathematical Biology*, **69**, 1319-1342. <https://doi.org/10.1007/s00285-013-0730-2>
- [16] Cantrell, R.S. and Cosner, C. (2003) Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley and Sons.
- [17] Li, Y., Jiang, D. and Wang, Z.-C. (2024) Concentration Phenomenon of Single Phytoplankton Species with Changing-Sign Advection Term. *Journal of Differential Equations*, **381**, 101-150. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.11.008>
- [18] Berestycki, H., Hamel, F. and Nadirashvili, N. (2004) Elliptic Eigenvalue Problems with Large Drift and Applications to Nonlinear Propagation Phenomena. *Communications in Mathematical Physics*, **253**, 451-480. <https://doi.org/10.1007/s00220-004-1201-9>
- [19] Liu, S., Lou, Y., Peng, R. and Zhou, M. (2021) Asymptotics of the Principal Eigenvalue for a Linear Time-Periodic Parabolic Operator I: Large Advection. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **53**, 5243-5277. <https://doi.org/10.1137/20m1379563>
- [20] Donsker, M.D. and Varadhan, S.R.S. (1976) On the Principal Eigenvalue of Second-Order Elliptic Differential Operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **29**, 595-621. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160290606>
- [21] Del Pino, M., Kowalczyk, M. and Wei, J.-C. (2006) Concentration on Curves for Nonlinear Schrödinger Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **60**, 113-146. <https://doi.org/10.1002/cpa.20135>