Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(12), 453-467
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.1412521

Hans汉斯

Navier-Stokes方程的一阶IMEX-SAV有限元格式的无条件最优误差估计

李　健

温州大学数理学院，浙江　温州

收稿日期：2025年11月23日；录用日期：2025年12月17日；发布日期：2025年12月23日

摘　要

基于指数函数的标量辅助变量(SAV)方法，求解不可压缩Navier-Stokes方程的一阶Euler隐式－显式(IMEX)时间半离散数值格式，其优点在于：所构造的时间离散格式是无条件稳定的，并且在每个时间步上，仅需求解Stokes问题。借助SAV方法，本文构造了求解Navier-Stokes方程的一阶Euler隐式－显式有限元全离散格式，理论上证明了所构造的全离散格式是无条件稳定的。基于误差分裂技巧，理论上得到了速度和压力的无条件最优误差估计。最后，给出数值算例验证理论分析结果。

关键词

不可压缩Navier-Stokes方程，SAV方法，有限元方法，无条件最优误差估计

Unconditionally Optimal Error Estimates of a First-Order IMEX-SAV Finite Element Scheme for the Navier-Stokes Equations

Jian Li

School of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: November 23, 2025; accepted: December 17, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

A first-order Euler implicit-explicit (IMEX) temporal semi-discrete numerical scheme for solving the incompressible Navier-Stokes equations based on the scalar auxiliary variable (SAV) method

文章引用: 李健. Navier-Stokes 方程的一阶 IMEX-SAV 有限元格式的无条件最优误差估计[J]. 应用数学进展, 2025, 14(12): 453-467. DOI: 10.12677/aam.2025.1412521

was proposed. Its advantages lie in two aspects: the constructed temporal discrete scheme is unconditionally stable, and only the Stokes problem needs to be solved at each time step. By virtue of the SAV method, this paper develops a first-order Euler IMEX fully discrete finite element scheme for the Navier-Stokes equations. Theoretically, it is proved that the constructed fully discrete scheme is unconditionally stable. Based on the error splitting technique, the unconditionally optimal error estimates for velocity and pressure are derived theoretically. Finally, numerical examples are provided to verify the theoretical analysis results.

Keywords

Incompressible Navier-Stokes Equations, Scalar Auxiliary Variable Method, Finite Element Method, Unconditionally Optimal Error Estimation

1. 引言

在本文中，我们考虑的不可压缩 Navier-Stokes 方程如下：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}-\mu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f},\quad 在\ \Omega\times(0,T], \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0,\quad 在\ \Omega\times(0,T]. \tag{1.2}$$

初始条件和边界条件：

$$\mathbf{u}\big|_{t=0}=\mathbf{u}_0(x),\quad 在\ \Omega\ 上, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{0},\quad 在\ \partial\Omega\times(0,T]中. \tag{1.4}$$

其中 Ω 是 R^3 中具有充分光滑的边界 $\partial\Omega$ 的有界凸域。

不可压缩 Navier-Stokes 方程是描述流体运动的核心模型，其数值模拟面临不可压缩条件和非线性项两大挑战[1]-[3]。隐式－显式(IMEX)方法能显式处理非线性项，只需求解线性系统，但其传统形式通常是条件稳定的，时间步长受到严格限制[4]-[6]。为此，学者们发展了如非线性伽辽金法、投影法及双网格法等多种方法[7]-[13]。

近年来，标量辅助变量(SAV)方法因其能构造无条件稳定且可解耦的格式而受到广泛关注[14]-[16]。针对 Navier-Stokes 方程，Lin [17]提出了基于能量的 SAV 方法，Zhang [18]给出了其二维情形的有限元分析。最近，Li [19]引入了一种基于指数函数的 SAV 方法，构造了时间半离散格式并证明了其无条件稳定性。然而，文献[19]的工作未涉及空间离散及全离散误差分析。

本文的核心贡献在于，首次系统性地将文献[19]的指数型 SAV 时间离散与有限元空间离散结合，构建了 Navier-Stokes 方程的一阶 IMEX-SAV 全离散格式。本文的理论创新主要体现在：(i) 全离散格式的无条件稳定性：严格证明了该格式在任意时间步长和网格尺寸下均保持稳定。(ii) 无条件最优误差估计：借助误差分裂技巧[20]-[22]，规避了对 CFL 条件的依赖，首次给出了速度和压力的无条件最优误差估计。这一结果强于传统 IMEX 方法的条件误差估计。

本文后续章节安排如下：第 2 节介绍预备知识；第 3 节提出全离散格式并给出详细的理论分析；第 4 节通过数值算例验证理论结果。

2. 预备知识

函数空间和能量不等式

首先介绍一些定义，当 $k \in N^+$，$1 \le N \le +\infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 和 $W^{k,2}(\Omega)$ 分别表示 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间，当 $p=2$ 时，$W^{k,2}(\Omega)$ 为 Hilbert 空间，此时可以表示为 $H^k(\Omega)$。$L^p(\Omega)$ 和 $H^k(\Omega)$ 的范数分别定义为 $\|\cdot\|_{L^p}$，$\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ 和 $\|\cdot\|_{H^k}$。我们定义 $H_0^1(\Omega)$ 为在边界为零的 $H^1(\Omega)$ 的子空间，它的对偶空间表示为 $H^{-1}(\Omega)$。黑体 Sobolev 空间 $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$，$\boldsymbol{H}^k(\Omega)$，$\boldsymbol{W}^{k,p}(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ 分别表示矢量 Sobolev 空间 $L^p(\Omega)^3$，$H^k(\Omega)^3$，$W^{k,p}(\Omega)^3$ 和 $H^{-1}(\Omega)^3$。特别的，$(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 或 $\boldsymbol{L}^2$ 的内积。在本文全篇中，我们使用符号 C 来表示某个正常数，该常数与时间步长 τ 无关。

定义空间：

$$V = H_0^1(\Omega), V_\sigma = \{v \in V, \nabla \cdot v = 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 中}\},$$

$$M = L_0^2(\Omega) = \left\{q \in L^2(\Omega), \int_\Omega q \mathrm{d}x = 0\right\}.$$

其范数可定义为：

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega \left|u(x)^p\right| \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{0 \le |\alpha| \le m} \left\|D^\alpha u\right\|_{L^p}^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{0 \le |\alpha| \le m} \left\|D^\alpha u\right\|_{L^\infty}, & p = \infty. \end{cases}$$

对于 $v \in H_0^1(\Omega)$，由 Poincaré 不等式，$H_0^1(\Omega)$ 中的范数定义为：$\|v\|_{H_0^1} = \|\nabla v\|_{L^2}$.

对于只依赖于 Ω 的 $C > 0$，插值不等式和 Sobolev 嵌入不等式为：

$$\|v\|_{L^3} \le C\|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{L^6} \le C\|\nabla v\|_{L^2} \tag{2.1}$$

引入三线性形式：$b(u,v,w) = \int_\Omega (u \cdot \nabla) v \cdot w \mathrm{d}x$，$\forall u,v,w \in V$。

若 $u \in V_\sigma$，利用分部积分很容易验证上述三重线性形式满足以下反对称性质，即：

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v), \qquad \forall u \in V_\sigma; v,w \in V. \tag{2.2}$$

$$b(u,v,v) = 0, \qquad \forall u \in V_\sigma, v \in V. \tag{2.3}$$

基于[23]的研究，我们引入了标量指数函数：$J(t) = \mathrm{e}^{-t}$。

那么 Navier-Stokes 方程(1.1)~(1.2)可以改写为：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{J(t)}{\mathrm{e}^{-t}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{在 } \Omega \times (0,T] \text{ 上}. \tag{2.4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \qquad \text{在 } \Omega \times (0,T] \text{ 上}. \tag{2.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}J(t)}{\mathrm{d}t} + J(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-t}} b(u,u,u), \qquad \text{在 } (0,T] \text{ 上}. \tag{2.6}$$

此处我们使用了 $b(u,u,u) = 0$.

最后我们引入离散的 Grönwall 不等式[24]：

引理 2.1. 对于 $k > 0$，令 a_k, b_k, c_k 和 γ_k 为非负数使得

$$a_n+\tau\sum_{k=0}^{n}b_k\le\tau\sum_{k=0}^{n}\gamma_k a_k+\tau\sum_{k=0}^{n}c_k+B,\qquad n\ge 0. \tag{2.7}$$

假设 $\tau\gamma_k<1$，并且令 $\sigma_k=\left(1-\tau\sigma_k\right)^{-1}$，可得

$$a_n+\tau\sum_{k=0}^{n}b_k\le\exp\left(\tau\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\sigma_k\right)\left(\tau\sum_{k=0}^{n}c_k+B\right),\qquad n\ge 0. \tag{2.8}$$

3. 一阶欧拉 IMEX-SAV 格式

本节，我们先给出求解(2.4)~(2.6)的一阶欧拉 IMEX-SAV 时间离散格式，并证明该时间离散格式在时间方向上具有一阶收敛精度，同时给出时间离散格式数值解的若干正则性估计。随后，空间方向上采用有限元方法进行全离散得到一阶欧拉 IMEX-SAV 全离散格式，并借助误差分裂技巧，给出最优无条件的最优误差估计。

3.1. 一阶欧拉 IMEX-SAV 时间离散格式

在本小节中，对于任意函数序列 $\left\{g^n\right\}_{n=0}^{N}$，我们定义：

$$D_\tau g^n=\frac{g^n-g^{n-1}}{\tau},\quad 1\le n\le N.$$

设迭代初值 $u^0=u_0$ 和 $J^0=1$。结合边界条件(1.3)~(1.4)，针对等价的 Navier-Stokes 方程组(2.4)~(2.6)，我们提出以下的一阶欧拉 IMEX-SAV 时间离散格式：

对于 $0\le n\le N-1$ 且给定 $\left(\mathbf{u}^n,\theta^n,J^n\right)$，我们求解 $\left(\mathbf{u}^{n+1},p^{n+1},J^{n+1}\right)$ 通过

$$D_\tau\mathbf{u}^{n+1}-\mu\Delta\mathbf{u}^{n+1}+\frac{J^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n+\nabla p^{n+1}=\mathbf{f}^{n+1} \tag{3.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^{n+1}=0 \tag{3.2}$$

$$D_\tau J^{n+1}+J^{n+1}=\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^{n+1}\right) \tag{3.3}$$

其中在边界 $\partial\Omega$ 上满足 $\mathbf{u}^{n+1}=0$。

接下来，我们将解释为何上述时间离散化格式(3.1)~(3.3)属于隐式－显式格式。通过引入适当的变量代换，该格式可以被解耦。具体而言，在每个时间步，我们只需顺序求解两个具有常系数的广义 Stokes 问题(其形式分别类似于原文档中的(3.5)和(3.6)式)。第一个问题依赖于已知的上一时间步解和外力项，第二个问题则显式地处理了非线性对流项。标量辅助变量 $S^{n+1}=J^{n+1}\mathrm{e}^{t_{n+1}}$ 可通过一个显式的代数公式更新。最终，新的速度与压力解可通过简单的线性组合得到。这一过程表明，该格式完全规避了非线性求解，计算效率高。

理论上可以证明，所提出的一阶欧拉 IMEX-SAV 时间半离散格式(3.1)~(3.3)具有无条件稳定性(参考[23])。

定理 3.1. 对于任意的 $\tau>0$ 和 $0\le n\le N-1$，一阶欧拉 IMEX-SAV 时间半离散格式(3.1)~(3.3)满足以下的离散能量不等式：

$$\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left|J^{n+1}\right|^2+\mu\tau\sum_{m=0}^{n}\left\|\nabla\mathbf{u}^{m+1}\right\|_{L^2}^2\le 1+\left\|\mathbf{u}_0\right\|_{L^2}^2+\frac{\tau}{\mu}\sum_{m=0}^{n}\left\|\mathbf{f}^{m+1}\right\|_{H^{-1}}^2. \tag{3.4}$$

3.2. 时间误差分析与正则性

在本小节中，我们将分析所提出的 IMEX-SAV 时间离散格式(3.1)~(3.3)的一阶收敛性。我们设 $(\mathbf{u},p)$

为 Navier-Stokes 方程(1.1)~(1.4)的解，且满足以下正则性假设：

$$\begin{cases}\mathbf{u}\in\mathbf{L}^{\infty}\left(0,T;\mathbf{H}^{2}(\Omega)\right),\ p\in L^{\infty}\left(0,T;H^{1}(\Omega)\right),\\ \mathbf{u}_{t}\in\mathbf{L}^{2}\left(0,T;\mathbf{H}^{2}(\Omega)\right),\ p_{t}\in L^{2}\left(0,T;H^{1}(\Omega)\right),\mathbf{u}_{tt}\in\mathbf{L}^{2}\left(0,T;\mathbf{L}^{2}(\Omega)\right).\end{cases}\tag{3.5}$$

为了误差分析的需要，我们得到 $(\mathbf{u},p)$ 和 J 在 $t=t_{n+1}$ 时的方程为：

$$D_{\tau}\mathbf{u}(t_{n+1})-\mu\Delta\mathbf{u}(t_{n+1})+\frac{J(t_{n+1})}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left(\mathbf{u}(t_{n})\cdot\nabla\right)\mathbf{u}(t_{n})+\nabla p(t_{n+1})=\mathbf{f}^{n+1}+\mathbf{R}_{u}^{n+1},\tag{3.6}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}(t_{n+1})=0,\tag{3.7}$$

$$D_{\tau}J(t_{n+1})+J(t_{n+1})=\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}(t_{n}),\mathbf{u}(t_{n}),\mathbf{u}(t_{n+1})\right)+R_{J}^{n+1}.\tag{3.8}$$

其中截断误差函数 $\mathbf{R}_{u}^{n+1}$ 和 R_{J}^{n+1} 为

$$\mathbf{R}_{u}^{n+1}=D_{\tau}\mathbf{u}(t_{n+1})-\mathbf{u}_{t}(t_{n+1})-\left[\left(\mathbf{u}(t_{n+1})\cdot\nabla\right)\mathbf{u}(t_{n+1})-\left(\mathbf{u}(t_{n})\cdot\nabla\right)\mathbf{u}(t_{n})\right].$$

$$R_{J}^{n+1}=D_{\tau}J(t_{n+1})-J'(t_{n+1})+\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left[b\left(\mathbf{u}(t_{n+1}),\mathbf{u}(t_{n+1}),\mathbf{u}(t_{n+1})\right)-b\left(\mathbf{u}(t_{n}),\mathbf{u}(t_{n}),\mathbf{u}(t_{n+1})\right)\right].$$

在正则性假设(3.5)条件下，根据积分型余项的泰勒公式可得：

$$D_{\tau}\mathbf{u}(t_{n+1})-\mathbf{u}_{t}(t_{n+1})=\frac{1}{\tau}\int_{t_{n}}^{t_{n+1}}(t-t_{n})\mathbf{u}_{tt}(t)\mathrm{d}t,$$

$$D_{\tau}J(t_{n+1})-J'(t_{n+1})=\frac{1}{\tau}\int_{t_{n}}^{t_{n+1}}(t-t_{n})J_{tt}(t)\mathrm{d}t.$$

易证：

$$\tau\sum_{n=0}^{N-1}\left(\left\|\mathbf{R}_{u}^{n+1}\right\|_{L^{2}}^{2}+\left|R_{J}^{n+1}\right|^{2}\right)\le C\tau^{2}.\tag{3.9}$$

其中 $C>0$ 与 τ 无关。

下面，我们引入误差函数，

$$\mathbf{e}_{u}^{n+1}=\mathbf{u}(t_{n+1})-\mathbf{u}^{n+1},\quad e_{p}^{n+1}=p(t_{n+1})-p^{n+1},\quad e_{J}^{n+1}=J(t_{n+1})-J^{n+1}.$$

此外，我们定义

$$\mathbf{e}_{u}^{0}=\mathbf{u}^{0}-\mathbf{u}_{0}=\mathbf{0},\quad e_{J}^{0}=J^{0}-J(0)=0.$$

现在将(3.6)~(3.8)从(3.1)~(3.3)中减去，我们可以得到以下误差方程：

$$D_{\tau}\mathbf{e}_{u}^{n+1}-\mu\Delta\mathbf{e}_{u}^{n+1}+\nabla e_{p}^{n+1}+\frac{e_{J}^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left(\mathbf{u}^{n}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^{n}=\mathbf{R}_{u}^{n+1}+I_{u}^{n+1},\tag{3.10}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{e}_{u}^{n+1}=0.\tag{3.11}$$

$$D_{\tau}e_{J}^{n+1}+e_{J}^{n+1}=R_{J}^{n+1}+\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}^{n},\mathbf{u}^{n},\mathbf{e}_{u}^{n+1}\right)+I_{J}^{n+1}.\tag{3.12}$$

其中 I_{u}^{n+1}， I_{J}^{n+1} 定义如下：

$$\begin{aligned}I_{u}^{n+1}&=\left(\mathbf{u}^{n}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^{n}-\left(\mathbf{u}(t_{n})\cdot\nabla\right)\mathbf{u}(t_{n})\\&=\left(\mathbf{e}_{u}^{n}\cdot\nabla\right)\mathbf{e}_{u}^{n}-\left(\mathbf{e}_{u}^{n}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}(t_{n})-\left(\mathbf{u}(t_{n})\cdot\nabla\right)\mathbf{e}_{u}^{n},\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$
\begin{aligned}
I_J^{n+1} &= \frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left[b\left(\mathbf{u}\left(t_n\right),\mathbf{u}\left(t_n\right),\mathbf{u}\left(t_{n+1}\right)\right)-b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{u}\left(t_{n+1}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left[b\left(\mathbf{e}_u^n,\mathbf{u}\left(t_n\right),\mathbf{u}\left(t_{n+1}\right)\right)-b\left(\mathbf{u}\left(t_n\right),\mathbf{u}\left(t_{n+1}\right),\mathbf{e}_u^n\right)-b\left(\mathbf{e}_u^n,\mathbf{e}_u^n,\mathbf{u}\left(t_{n+1}\right)\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

定理 3.2. 设$(\mathbf{u},p)$为 Navier-Stokes 方程(1.1)~(1.4)的解，且满足正则性假设(3.5)，当时间步长τ足够小时，有以下时间误差估计成立：

$$
\left\|\mathbf{e}_u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_J^{m+1}\right|^2+\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{L^2}^2\le C_0\tau^2,\qquad 0\le m\le N-1. \tag{3.15}
$$

其中C_0与时间步长τ无关。

证明：在误差方程(3.10)两端与$2\tau\mathbf{e}_u^{n+1}$作内积，在(3.12)两端乘以$2\tau e_J^{n+1}$。利用三线性形式的性质、Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式进行标准估计，并注意到截断误差满足(3.9)，我们可得到如下基本不等式：

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_J^{n+1}\right|^2-\left\|\mathbf{e}_u^{n}\right\|_{L^2}^2-\left|e_J^{n}\right|^2+\mu\tau\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2 \\
&\le C\tau\left(\left\|R_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left|R_J^{n+1}\right|^2\right)+C\tau\left(\left\|\mathbf{e}_u^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{n}\right\|_{L^2}^4\right) \\
&\le C\tau^2+C\tau\left(\left\|\mathbf{e}_u^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{n}\right\|_{L^2}^4\right).
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

将上述不等式从$n=0$到$n=m$求和，并利用离散型 Grönwall 不等式，即可得到：

$$
\left\|\mathbf{e}_u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_J^{m+1}\right|^2+\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{L^2}^2\le C\tau^2+C\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{i}\right\|_{L^2}^4 \tag{3.17}
$$

现采用数学归纳法证明(3.15)。当$m=0$时，由(3.17)及$\mathbf{e}_u^0=0$易得(3.15)成立，假设(3.15)对m也成立，即：$\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{i}\right\|_{L^2}^2\le C_0\tau$对$1\le i\le m$成立。代入(3.17)右端最后一项有：

$$
C\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{i}\right\|_{L^2}^4\le C\left(C_0\right)^2\tau^3
$$

当τ充分小时，此高阶项可被吸收，从而证得(3.15)对$m+1$也成立，归纳法完成。

在下一小节的误差分析中，为了避免时间步长τ和有限元空间步长h的约束条件，下面我们给出时间离散的正则性证明。由(3.5)和(3.15)我们有

$$
\left\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{L^2}+\left|J^{n+1}\right|\le C\ \text{ 和 }\ \sum_{i=0}^{n}\left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{L^2}^2\le C,\quad 0\le n\le N-1. \tag{3.18}
$$

此外，考虑到

$$
\begin{aligned}
\left\|D_\tau\mathbf{u}^{i+1}\right\|_{L^2} &\le \left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{L^2}+\left\|D_\tau\mathbf{u}\left(t_{i+1}\right)\right\|_{L^2} \\
&\le \left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{L^2}+\sqrt{\frac{1}{\tau}}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\mathbf{u}_t\left(t\right)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

我们可以得到：

$$
\tau\sum_{i=0}^{N-1}\left\|D_\tau\mathbf{u}^{i+1}\right\|_{L^2}^2\le C. \tag{3.19}
$$

定理 3.3. 在定理 3.2 的假设与条件下，我们得出

$$\tau\sum_{n=0}^{N-1}\left(\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|p^{n+1}\right\|_{H^1}^2\right)\le C. \tag{3.20}$$

证明：有定理 3.1 的稳定性估计(3.4)和定理 3.2 的时间误差估计(3.15)，可得数值解有一致有界性：

$$\left\|\nabla u^{n+1}\right\|_{L^2}+\left|J^{n+1}\right|\le C$$

进而，利用非线性项得有界性$\left\|\left(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n\right\|_{L^2}\le C$及 Stokes 问题的正则性理论，对格式(3.1)~(3.2)应用椭圆正则性估计，即可得证(3.20)。

定理 3.4. 在定理 3.2 的假设与条件下，我们有

$$\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\tau\sum_{i=0}^{n}\left(\left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|e_p^{i+1}\right\|_{H^1}^2\right)\le C\tau^2. \tag{3.21}$$

$$\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{H^2}+\left\|p^{n+1}\right\|_{H^1}+\tau\sum_{i=0}^{n}\left(\left\|D_\tau\mathbf{u}^{i+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|D_\tau p^{i+1}\right\|_{H^1}^2\right)\le C. \tag{3.22}$$

对于$0\le n\le N-1$时都成立。

证明：根据(3.5)和(3.15)，我们可以易得

$$\left\|I_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2\le C\left\|\nabla e_u^n\right\|_{L^2}^2+C\tau^2\left\|e_u^n\right\|_{H^2}^2. \tag{3.23}$$

并根据(3.20)进而有：

$$\tau\sum_{n=0}^{N-1}\left\|I_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2\le C\tau\sum_{n=0}^{N-1}\left\|\nabla\mathbf{e}_u^n\right\|_{L^2}^2+C\tau^3\sum_{n=0}^{N-1}\left\|\mathbf{e}_u^n\right\|_{H^2}^2\le C\tau^2. \tag{3.24}$$

将(3.10)两端乘以$2\tau D_\tau\mathbf{e}_u^{n+1}$，并在$\Omega$上积分，我们得出

$$\begin{aligned}&2\tau\left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\mu\left(\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|\nabla\mathbf{e}_u^n\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\left(\mathbf{e}_u^{n+1}-\mathbf{e}_u^n\right)\right\|_{L^2}^2\right)\\&\le\tau\left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\tau\left(\left\|\mathbf{R}_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|I_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_J^{n+1}\right|^2\left\|\mathbf{u}^n\right\|_{H^2}^2\right).\end{aligned} \tag{3.25}$$

结合(3.15)式和(3.24)式可得

$$\left\|\nabla\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\tau\sum_{i=0}^{n}\left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{L^2}^2\le C\tau^2,\quad 0\le n\le N-1. \tag{3.26}$$

对于误差方程(3.10)，根据 Stokes 问题的正则性结果可得

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{H^2}+\left\|\mathbf{e}_p^{n+1}\right\|_{H^1}&\le C\left\|\mathbf{R}_u^{n+1}\right\|_{L^2}+C\left\|I_u^{n+1}\right\|_{L^2}+C\left\|\left(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n\right\|_{L^2}\left|e_J^{n+1}\right|+C\left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}\\&\le C\left\|\mathbf{R}_u^{n+1}\right\|_{L^2}+C\left\|I_u^{n+1}\right\|_{L^2}+C\left\|\mathbf{u}^n\right\|_{H^2}\left|e_J^{n+1}\right|+C\left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{n+1}\right\|_{L^2}.\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$\tau\sum_{i=0}^{n}\left(\left\|\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|\mathbf{e}_p^{i+1}\right\|_{H^1}^2\right)\le C\tau^2,\quad 0\le n\le N-1.$$

由此我们完成了(3.21)的证明。

接下来，我们给出$\left(\mathbf{u}^{n+1},p^{n+1}\right)$的正则性结果。根据(3.5)和(3.21)式可知

$$\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{H^2}+\left\|p^{n+1}\right\|_{H^1}+\tau\sum_{i=0}^{n}\left(\left\|D_\tau\mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|D_\tau e_p^{i+1}\right\|_{H^1}^2\right)\le C.$$

另一方面，考虑到

$$\left\|D_\tau \mathbf{u}^{i+1}\right\|_{H^2}+\left\|D_\tau p^{i+1}\right\|_{H^1}\le\left\|D_\tau \mathbf{e}_u^{i+1}\right\|_{H^2}+\left\|D_\tau \mathbf{e}_p^{i+1}\right\|_{H^1}+\sqrt{\frac{1}{\tau}}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{H^2}^2+\left\|p_t(t)\right\|_{H^1}^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们可以得到

$$\tau\sum_{i=0}^{N-1}\left(\left\|D_\tau \mathbf{u}^{i+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|D_\tau p^{i+1}\right\|_{H^1}^2\right)\le C. \tag{3.27}$$

3.3. 一阶欧拉 IMEX-SAV 有限元格式

首先，我们给出有限元空间的定义。设 $\mathcal{T}_h=\left\{K_j\right\}_{j=1}^M$ 为 Ω 的拟一致四面体剖分，网格尺寸 $h=\max_j\left\{diamK_j\right\}$。我们采用 mini 单位原来逼近 $(\mathbf{u},p)$，对应的有限元空间记为 $\mathbf{V}_h\subset\mathbf{V}$ 和 $M_h\subset M$，其定义为：

$$\mathbf{V}_h=\left\{\mathbf{v}_h\in C\left(\bar{\Omega}\right)^3\cap\mathbf{V},\mathbf{v}_h\big|_K\in\left(P_1(K)+b(K)\right)^3,\forall\, K\in\mathcal{T}_h\right\}$$

$$M_h=\left\{q_h\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap M,q_h\big|_K\in P_1(K),\forall K\in\mathcal{T}_h\right\}$$

其中 $P_1(K)$ 是定义在三角形单元 $K\in\mathcal{T}_h$ 上的分段线性多项式，气泡函数 $b(K)$ 是一个在每个 $K\in\mathcal{T}_h$ 内部取正值、在 K 的重心处取值为 1、在 ∂K 边界上取 0 的线性函数。众所周知，mini 元具有稳定性且满足离散 LBB 条件[23]，即存在与网格尺寸 h 无关的常数 $\beta>0$ 使得：

$$\beta\left\|q_h\right\|_{L^2}\le\sup_{\mathbf{0}\ne\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{\left(\nabla\cdot\mathbf{v}_h,q_h\right)}{\left\|\nabla\mathbf{v}_h\right\|_{L^2}},\quad\forall q_h\in M_h. \tag{3.28}$$

在有限空间中下列逆不等式成立

$$\left\|\mathbf{v}_h\right\|_{W^{l,q_1}}\le Ch^{m-l+\min\left\{\frac{3}{q_1}-\frac{3}{q_2},0\right\}}\left\|\mathbf{v}_h\right\|_{W^{m,q_2}},\quad\forall\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h. \tag{3.29}$$

其中 $1\le q_1,q_2\le\infty$ 且 $0\le m\le l$。

接着我们回顾一下 Stokes 投影算子[9]的定义 $\left(\mathbf{R}_h,\Pi_h\right):\mathbf{V}\times Q\to\mathbf{V}_h\times M_h$

$$\mu\left(\nabla\left(\mathbf{u}-\mathbf{R}_h\mathbf{u}\right),\nabla\mathbf{v}_h\right)-\left(\nabla\cdot\mathbf{v}_h,p-\Pi_h p\right)+\left(\nabla\cdot\left(\mathbf{u}-\mathbf{R}_h\mathbf{u}\right),q_h\right)=0.$$

其中对于任意的 $\left(\mathbf{v}_h,q_h\right)\in\mathbf{V}_h\times M_h$ 都成立。那么对于 $(\mathbf{u},p)\in\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{V}\times H^1(\Omega)\cap M$，我们有如下的投影误差逼近结果

$$\left\|\mathbf{u}-\mathbf{R}_h\mathbf{u}\right\|_{L^2}+h\left(\left\|\nabla\left(\mathbf{u}-\mathbf{R}_h\mathbf{u}\right)\right\|_{L^2}+\left\|p-\Pi_h p\right\|_{L^2}\right)\le Ch^2\left(\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^2}+\left\|p\right\|_{H^1}\right). \tag{3.30}$$

$$\left\|\mathbf{R}_h\mathbf{u}\right\|_{W^{1,6}}+\left\|\mathbf{R}_h\mathbf{u}\right\|_{L^\infty}\le C\left(\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^2}+\left\|p\right\|_{H^1}\right). \tag{3.31}$$

取迭代初值 $\mathbf{u}_h^0=R_h\mathbf{u}^0$，$J_h^0=1$ 下面我们给出了在时间离散格式(3.1)~(3.3)基础上的有限元离散格式：对于 $0\le n\le N-1$ 且给定 $\mathbf{u}_h^n\in\mathbf{V}_h$ 和 $J_h^n\in R$，我们可以通过求解下列方程得到 $\left(\mathbf{u}_h^{n+1},p_h^{n+1}\right)\in\mathbf{V}_h\times M_h$ 和 $J_h^{n+1}\in R$，

$$\begin{aligned}&\left(D_\tau\mathbf{u}_h^{n+1},\mathbf{v}_h\right)+\mu\left(\nabla\mathbf{u}_h^{n+1},\nabla\mathbf{v}_h\right)-\left(\nabla\cdot\mathbf{v}_h,p_h^{n+1}\right)+\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_h^{n+1},q_h\right)\\&+\frac{J_h^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h\right)=\left(\mathbf{f}^{n+1},\mathbf{v}_h\right),\quad\forall\left(\mathbf{v}_h,q_h\right)\in\mathbf{V}_h\times M_h.\end{aligned} \tag{3.32}$$

和

$$D_\tau J_h^{n+1}+J_h^{n+1}=\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^{n+1}\right). \tag{3.33}$$

我们采用误差分裂技巧，将总误差分解为：

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}_h^{n+1}=\left(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{R}_h\mathbf{u}^{n+1}\right)+\left(\mathbf{R}_h\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}_h^{n+1}\right)=\mathbf{E}_u^{n+1}+\mathbf{e}_{uh}^{n+1},\\ p^{n+1}-p_h^{n+1}=\left(p^{n+1}-\Pi_h p^{n+1}\right)+\left(\Pi_h p^{n+1}-p_h^{n+1}\right)=E_p^{n+1}+e_{ph}^{n+1},\\ e_{Jh}^{n+1}=J^{n+1}-J_h^{n+1}.\end{cases}$$

此外，$\mathbf{e}_{uh}^0=\mathbf{0}$，$e_{Jh}^0=J^0-J_h^0=0$，$\mathbf{E}_u^0=\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_h^0=\mathbf{u}_0-R_h\mathbf{u}^0$。

并且由投影误差和定理 3.4 中时间离散解的正则性，投影误差 $\mathbf{E}_u^{n+1}$，E_p^{n+1} 满足：

$$\left\|\mathbf{E}_u^{n+1}\right\|_{L^2}+h\left(\left\|\nabla\mathbf{E}_u^{n+1}\right\|_{L^2}+\left\|E_p^{n+1}\right\|_{L^2}\right)\le Ch^2 \tag{3.34}$$

$$\tau\sum_{n=0}^{N-1}\left\|D_\tau\mathbf{E}_u^{n+1}\right\|_{L^2}\le Ch^4 \tag{3.35}$$

$$\left\|\mathbf{E}_u^0\right\|_{L^2}+h\left\|\nabla\mathbf{E}_u^0\right\|_{L^2}\le Ch^2 \tag{3.36}$$

容易证明上述有限元全离散格式也具有无条件稳定性。

接着将方程(3.1)和(3.2)与 $v_h\in V_h$，$q_h\in Q_h$ 作内积，并在 Ω 上积分，将所得方程从(3.32)中减去得

$$\begin{aligned}&\left(D_\tau\mathbf{e}_{uh}^{n+1},\mathbf{v}_h\right)+\mu\left(\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n+1},\nabla\mathbf{v}_h\right)-\left(\nabla\cdot\mathbf{v}_h,e_{ph}^{n+1}\right)+\left(\nabla\cdot\mathbf{e}_{uh}^{n+1},q_h\right)+\frac{e_{Jh}^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h\right)\\&=\left(D_\tau\mathbf{E}_u^{n+1},\mathbf{v}_h\right)-\frac{J^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}}\left(b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{v}_h\right)-b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h\right)\right)\\&=\left(D_\tau\mathbf{E}_u^{n+1},\mathbf{v}_h\right)+I_{uh}^{n+1}\left(\mathbf{v}_h\right).\end{aligned} \tag{3.37}$$

再将(3.33)减去(3.3)，我们有

$$\begin{aligned}&D_\tau e_{Jh}^{n+1}+e_{Jh}^{n+1}-\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left(b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{E}_u^{n+1}\right)-b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{E}_u^{n+1}\right)\right)+\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{E}_u^{n+1}\right)\\&\quad+\frac{1}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left(b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^{n+1}\right)-b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}^{n+1}\right)\right)\\&=I_{Jh,1}^{n+1}+I_{Jh,2}^{n+1}+I_{Jh,3}^{n+1}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

定理 3.5. 对于任意足够小的 $\tau>0$ 和 $h>0$，一阶欧拉 IMEX-SAV 有限元格式(3.32)~(3.33)的解满足以下离散能量不等式：

$$\left\|\mathbf{u}_h^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left|J_h^{n+1}\right|^2+\mu\tau\sum_{m=0}^{n}\left\|\nabla\mathbf{u}_h^{m+1}\right\|_{L^2}^2\le\left\|\mathbf{u}_h^0\right\|_{L^2}^2+\left|J_h^0\right|^2+\mu^{-1}\tau\sum_{m=0}^{n}\left\|\mathbf{f}^{m+1}\right\|_{H^{-1}}^2 \tag{3.39}$$

对于 $0\le n\le N-1$，其中 $C>0$ 是与 τ 和 h 无关的常数。

证明：与定理 3.1 的证明类似，在格式(3.32)中取 $\left(\mathbf{v}_h,q_h\right)=\left(\mathbf{u}_h^{n+1},p_h^{n+1}\right)$，并利用三线性形式的反对称性即可得证。

定理 3.6. 在(3.5)中的正则性假设条件下，那么对于足够小的 h 和 τ，我们有

$$\left\|e_{uh}^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_{Jh}^{m+1}\right|^2+\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla e_{uh}^{i+1}\right\|_{L^2}^2\le\hat{C}_0h^4 \tag{3.40}$$

对于 $0\le m\le N-1$，其中 $\hat{C}_0>0$ 是与 τ 和 h 无关的常数。

证明：在(3.37)式中取 $\left(\mathbf{v}_h,q_h\right)=2\tau\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1},e_{ph}^{n+1}\right)$ 可得

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+2\mu\tau\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2+2\tau\frac{e_{Jh}^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right)\\&=2\tau\left(D_\tau\mathbf{E}_u^{n+1},\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right)+2\tau I_{uh}^{n+1}\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right).\end{aligned} \tag{3.41}$$

根据(3.35)式，易得：

$$2\tau\left(D_\tau\mathbf{E}_u^{n+1},\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right)\le\frac{\mu\tau}{2}\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\tau h^4\left(\left\|D_\tau\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|D_\tau p^{n+1}\right\|_{H^1}^2\right).$$

我们可以根据(3.18)，(3.22)得到

$$\begin{aligned}2\tau I_{uh}^{n+1}\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right)\le&\frac{\mu\tau}{2}\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\tau\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\mathbf{E}_u^{n}\right\|_{L^2}^2\right)\\&+C\tau\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^3}^2+\left\|\mathbf{E}_u^{n}\right\|_{L^3}^2\right)\left(\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\mathbf{E}_u^{n}\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned} \tag{3.42}$$

将上述估计值代入(3.41)式可得

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\mu\tau\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2+2\tau\frac{e_{Jh}^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right)\\&\le C\tau h^4\left(\left\|D_\tau\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|D_\tau p^{n+1}\right\|_{H^1}^2\right)+C\tau\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\mathbf{E}_u^{n}\right\|_{L^2}^2\right)\\&\quad+C\tau\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^3}^2+\left\|\mathbf{E}_u^{n}\right\|_{L^3}^2\right)\left(\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\mathbf{E}_u^{n}\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned} \tag{3.43}$$

接着将(3.38)两端乘以 $2\tau e_{Jh}^{n+1}$，并在 Ω 上积分，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\left|e_{Jh}^{n+1}\right|^2-\left|e_{Jh}^{n}\right|^2+2\tau\left|e_{Jh}^{n+1}\right|^2-2\tau\frac{e_{Jh}^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right)\\&\le2\tau\left(I_{Jh,1}^{n+1}+I_{Jh,2}^{n+1}+I_{Jh,3}^{n+1}\right)e_{Jh}^{n+1}\\&\le\tau\left|e_{Jh}^{n+1}\right|^2+C\tau\left(\left|I_{Jh,1}^{n+1}\right|^2+\left|I_{Jh,2}^{n+1}\right|^2+\left|I_{Jh,3}^{n+1}\right|^2\right).\end{aligned} \tag{3.44}$$

接下来，我们需要估计(3.44)式的最后三项。根据(3.22)，(3.34)，我们可以得到

$$\begin{aligned}\left|I_{Jh,1}^{n+1}\right|&\le C\left|b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{E}_u^{n+1}\right)-b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{E}_u^{n+1}\right)\right|\\&\le C\left(\left|b\left(\mathbf{e}_{uh}^n+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{E}_u^{n+1}\right)\right|+\left|b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{E}_u^{n+1},\mathbf{e}_{uh}^n+\mathbf{E}_u^n\right)\right|+\left|b\left(\mathbf{e}_{uh}^n+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{e}_{uh}^n+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{E}_u^{n+1}\right)\right|\right)\\&\le Ch\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}+\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2+h^2\right).\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\left|I_{Jh,3}^{n+1}\right|&\le C\left|b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^{n+1}\right)-b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}^{n+1}\right)\right|\\&\le C\left(\left|b\left(\mathbf{e}_{uh}^n+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^{n+1}\right)\right|+\left|b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^{n+1},\mathbf{e}_{uh}^n+\mathbf{E}_u^n\right)\right|+\left|b\left(\mathbf{e}_{uh}^n+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{e}_{uh}^n+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{u}^{n+1}\right)\right|\right)\\&\le C\left(1+\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}\right)\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}+h^2\right).\end{aligned}$$

最后，显而易见的是

$$\left|I_{Jh,2}^{n+1}\right| \le C\left\|\nabla \mathbf{u}^n\right\|_{L^2}\left\|\mathbf{u}^n\right\|_{H^2}\left\|\mathbf{E}_u^{n+1}\right\|_{L^2} \le Ch^2.$$

将上述不等式代入(3.44)式

$$\begin{aligned}&\left|e_{Jh}^{n+1}\right|^2-\left|e_{Jh}^{n}\right|^2+\tau\left|e_{Jh}^{n+1}\right|^2-2\tau\frac{e_{Jh}^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right)\\&\le C\tau h^4+C\tau h^2\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^4+C\tau\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2+C\tau\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2+h^4\right).\end{aligned} \tag{3.45}$$

将(3.43)与(3.45)相加求和，我们得到

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\left|e_{Jh}^{n+1}\right|^2-\left|e_{Jh}^{n}\right|^2+\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\mu\tau\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2\\&\le C\tau h^4\left(\left\|D_\tau\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{H^2}^2+\left\|D_\tau p^{n+1}\right\|_{H^1}^2\right)+C\tau\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2+\left\|\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^2}^2\right)\\&\quad+C\tau\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^3}^2+\left\|\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^3}^2\right)\left(\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^2}^2\right)+C\tau h^2\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^4+C\tau\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2+h^4\right)+C\tau h^4.\end{aligned} \tag{3.46}$$

通过对 0 到 m （$m\le N-1$)的求和，并运用离散 Grönwall 不等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{e}_{uh}^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_{Jh}^{m+1}\right|^2+\sum_{i=0}^{m}\left\|\mathbf{e}_{uh}^{i+1}-\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^2+\mu\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{i+1}\right\|_{L^2}^2\\&\le Ch^4+C\tau\sum_{i=0}^{m}\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^3}^2+h^3\right)\left(\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^2+h^2\right)+C\tau h^2\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^4+C\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^2\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^2+h^4\right).\end{aligned} \tag{3.47}$$

我们在此处使用了不等式$\left\|\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^3}^2\le C\left\|\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^2}\left\|\nabla\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^2}\le Ch^3$。根据$\mathbf{e}_{uh}^0=0$和$e_{Jh}^0=0$，在(3.47)式中取$m=0$，我们可以得到

$$\left\|\mathbf{e}_{uh}^{1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_{Jh}^{1}\right|^2+\left\|\mathbf{e}_{uh}^{1}-\mathbf{e}_{uh}^{0}\right\|_{L^2}^2+\mu\tau\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{1}\right\|_{L^2}^2\le\hat{C}_1h^4 \tag{3.48}$$

其中$\hat{C}_1>0$是与τ和h无关的常数。因此，当选择$\hat{C}_0\ge\hat{C}_1$时，估计(3.40)在$m=0$时成立。

接下来，我们运用数学归纳法来完成该定理的证明。现假设(3.40)式对第 m 步成立，即：

$$\left\|\mathbf{e}_{uh}^{m}\right\|_{L^2}^2+\left|e_{Jh}^{m}\right|^2+\tau\sum_{i=1}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^2\le\hat{C}_0h^4 \tag{3.49}$$

为了完成数学归纳法的证明，我们需要验证(3.40)式对于第$m+1$ （$m\le N-1$)步成立。根据逆不等式(3.29)，我们得出

$$\left\|\mathbf{e}_{uh}^{m}\right\|_{L^3}\le C\sqrt{\hat{C}_0}h^{3/2}\ \text{和}\ \left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{m}\right\|_{L^2}\le C\sqrt{\hat{C}_0}h\quad\text{当}\,k\le n \tag{3.50}$$

将上述不等式(3.50)代入(3.47)可得

$$\left\|\mathbf{e}_{uh}^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_{Jh}^{m+1}\right|^2+\sum_{i=0}^{m}\left\|\mathbf{e}_{uh}^{i+1}-\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^2+\mu\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{i+1}\right\|_{L^2}^2\le Ch^4+\hat{C}_2\left(1+\hat{C}_0\right)^2h^5 \tag{3.51}$$

其中$\hat{C}_2$是与h,τ和$\hat{C}_0$无关的常数，则存在足够小的h使得$\left(1+\hat{C}_0\right)^2h\le1$，则由(3.51)式可推知存在某个与$h,\tau$和$\hat{C}_0$无关的正常数$\hat{C}_3>0$，使得

$$\left\|\mathbf{e}_{uh}^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left|e_{Jh}^{m+1}\right|^2+\sum_{i=0}^{m}\left\|\mathbf{e}_{uh}^{i+1}-\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^2+\mu\tau\sum_{i=0}^{m}\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{i+1}\right\|_{L^2}^2\le\hat{C}_3h^4$$

因此，通过取$\hat{C}_0=\max\left\{\hat{C}_1,\hat{C}_3\right\}$。至此我们完成了定理 3.6 的证明。

接下来，为了分析压力的误差估计，我们需要证明以下定理。

定理 3.7. 在(3.5)中的正则性假设条件下，那么对于足够小的 h 和 τ，我们有

$$\tau\sum_{i=0}^{N-1}\left\|D_\tau \mathbf{e}_{uh}^{i+1}\right\|_{L^2}^2 \le Ch^2. \tag{3.52}$$

$$\tau\sum_{n=0}^{N-1}\left\|e_p^{n+1}\right\|_{L^2}^2 \le Ch^2. \tag{3.53}$$

证明：在(3.5)式中取 $(\mathbf{v}_h,q_h)=\tau\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n},0\right)$，并利用对所有 $q_h\in M_h$ 都成立的 $\left(\nabla\cdot\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right),q_h\right)=0$ 的关系式，我们得到：

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\frac{\mu\tau}{2}\left(\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\right\|_{L^2}^2\right)\\&=\tau\left(D_\tau\mathbf{E}_u^{n+1},\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)+\tau I_{uh}^{n+1}\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)-\tau\frac{e_{Jh}^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right).\end{aligned} \tag{3.54}$$

下面我们逐项估计(3.54)的右端项。易知

$$\tau\left(D_\tau\mathbf{E}_u^{n+1},\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\le\frac{1}{8}\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+C\tau^2h^4\left\|D_\tau\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{H^2}^2. \tag{3.55}$$

结合有限元逆不等式(3.29)和(3.40)式我们有：

$$\begin{aligned}\tau I_{uh}^{n+1}\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)&\le C\tau\left(\left|b\left(\mathbf{e}_{uh}^{n}+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\right|+\left|b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{e}_{uh}^{n}+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\right|\right.\\&\quad\left.+\left|b\left(\mathbf{e}_{uh}^{n}+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{e}_{uh}^{n}+\mathbf{E}_u^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\right|\right)\\&\le C\tau\left(\left\|\nabla\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^2}+\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}\right)\left(\left\|\nabla\mathbf{u}^n\right\|_{L^3}+\left\|\mathbf{u}^n\right\|_{L^\infty}\right)\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}\\&\quad+C\tau\left(\left\|\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^3}+\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^3}\right)\left(\left\|\nabla\mathbf{E}_u^n\right\|_{L^2}+\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla\left(\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\right\|_{L^2}\\&\le C\tau h\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}\le\frac{1}{8}\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+C\tau^2h^2.\end{aligned} \tag{3.56}$$

针对(3.54)式的末项，并由 $\left|e_{Jh}^{n+1}\right|\le Ch^2$ 我们可得

$$\begin{aligned}&-\tau\frac{e_{Jh}^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}}b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\\&\le\tau\frac{e_{Jh}^{n+1}}{e^{-t_{n+1}}}\left(\left|b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)-b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\right|\right)+\tau\frac{e_{Jh}^{n+1}}{\mathrm{e}^{-t_{n+1}}}\left|b\left(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right)\right|\\&\le\frac{1}{4}\left\|\mathbf{e}_{uh}^{n+1}-\mathbf{e}_{uh}^{n}\right\|_{L^2}^2+C\tau^2h^2\end{aligned}$$

将上述估计代入(3.54)式并对其求和得到

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left\|\mathbf{e}_{uh}^{i+1}-\mathbf{e}_{uh}^{i}\right\|_{L^2}^2\le C\tau h^2.$$

这意味着估计(3.52)成立。

基于估计(3.52)，我们给出了压力的误差估计。

取 $q_h=0$ 代入(3.37)，根据 inf-sup 条件(3.28)和(3.34)，我们可得

$$\begin{aligned}\tau\sum_{n=1}^{N-1}\left\|e_p^{n+1}\right\|_{L^2}^2 &\le C\tau\sum_{n=1}^{N-1}\left(\left\|D_\tau\mathbf{e}_{uh}^{n+1}\right\|_{L^2}^2+h^4\left\|D_\tau\mathbf{u}^{n+1}\right\|_{H^2}^2+\left|e_{Jh}^{n+1}\right|^2+\left\|\mathbf{e}_u^n\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2+h^4\right)\\ &\quad+C\tau\sum_{n=1}^{N-1}\left(\left\|\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^3}^2+h^3\right)\left(\left\|\nabla\mathbf{e}_{uh}^n\right\|_{L^2}^2+h^2\right)\\ &\le Ch^2.\end{aligned}\tag{3.57}$$

至此我们完成了定理 3.7 的证明。

定理 3.8. 在(3.5)的正则性假设条件下，对于一阶欧拉 IMEX-SAV 有限元全离散格式(3.32)~(3.33)，当时间步长 τ 和空间步长 h 足够小时，我们有以下的最优误差。

$$\left\|\mathbf{u}\left(t_{n+1}\right)-\mathbf{u}_h^{n+1}\right\|_{L^2}+\left|J\left(t_{n+1}\right)-J_h^{n+1}\right|\le C\left(\tau+h^2\right)\tag{3.60}$$

$$\tau\sum_{n=0}^{N}\left(\left\|\nabla\left(\mathbf{u}\left(t_n\right)-\mathbf{u}_h^n\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|p\left(t_n\right)-p_h^n\right\|_{L^2}^2\right)\le C\left(\tau+h\right)^2\tag{3.61}$$

其中 $C>0$ 与 τ,h 无关。

4. 数值结果

4.1. 数值实验结果

在本节中，我们验证了针对 Navier-Stokes 方程组(1.1)~(1.2)提出的指数型 IMEX-SAV 有限元全离散格式(3.32)~(3.33)的数值结果。为了简化，我们仅考虑区域取为 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$。为了检验定理 3.8 所给出的收敛阶，我们选择适当的函数 $\mathbf{f}$，使得精确解为：

$$\begin{cases}p(x,y,t)=t^2\left(x-1/2\right),\\ u_1(x,y,t)=-128t^2x^2\left(x-1\right)^2y\left(y-1\right)\left(2y-1\right),\\ u_2(x,y,t)=128t^2y^2\left(y-1\right)^2x\left(x-1\right)\left(2x-1\right).\end{cases}\tag{4.1}$$

根据定理 3.8，所构造的格式具有如下收敛阶：

$$\left\|\mathbf{u}\left(t_{n+1}\right)-\mathbf{u}_h^{n+1}\right\|_{L^2}+\left|J\left(t_{n+1}\right)-J_h^{n+1}\right|\le C\left(\tau+h^2\right)$$

$$\tau\sum_{n=0}^{N}\left(\left\|\nabla\left(\mathbf{u}\left(t_n\right)-\mathbf{u}_h^n\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|p\left(t_n\right)-p_h^n\right\|_{L^2}^2\right)\le C\left(\tau+h\right)^2$$

在数值实验中，我们选择 $\tau=\mathcal{O}\left(h^2\right)$，使用均匀网格，在每个方向上采用空间网格大小 h，并逐渐减小网格大小 $h=1/4,1/8,\cdots,1/64$ 以及取时间步长为 $\tau=h^2$。此外，我们取最终时刻 $T=1$。对于精确解在(4.1)数下的数值结果如表 1，表 2 所示，从中可观察到收敛阶与理论预测一致，验证了理论分析的正确性。

Table 1. Numerical errors and convergence rates under the norm (for velocity and auxiliary scalar function)
表 1. 范数下的数值误差和收敛阶数(速度与标量辅助函数)

h	$\left\|\mathrm{u}\left(t_{n+1}\right)-\mathrm{u}_h^{n+1}\right\|_{L^2}$	收敛阶	$\left\|J\left(t_{n+1}\right)-J_h^{n+1}\right\|$	收敛阶
1/4	2.86E−02	-	1.12E−02	-
1/8	6.43E−03	2.15	2.86E−03	1.97
1/16	1.55E−03	2.05	7.17E−04	1.99
1/32	3.38E−04	2.01	9.22E−03	2.00
1/64	9.56E−05	2.00	4.49E−05	2.00

Table 2. Numerical errors and convergence rates under the norm (for gradients and pressure)
表 2. 范数下的数值误差和收敛阶数(梯度与压力)

h	$\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla\left(u(t_n)-u_h^n\right)\right\|_{L^2}^2$	收敛阶	$\sum_{n=1}^{N}\left\|p(t_n)-p_h^n\right\|_{L^2}^2$	收敛阶
1/4	5.14E−01	-	7.73E−02	-
1/8	2.52E−01	1.03	3.74E−02	1.05
1/16	1.25E−01	1.01	1.85E−02	1.02
1/32	6.25E−02	1.00	1.08E−04	1.00
1/64	3.12E−02	1.00	4.49E−05	1.00

4.2. 计算效率讨论

本文所提 IMEX-SAV 格式的核心效率优势源于其无条件稳定性。尽管每时间步需求解两个解耦的 Stokes 问题，其单步计算成本与标准 IMEX 法(需求解一个 Stokes 问题)处于同一量级，但二者在时间步长选择上存在本质差异：(i) 标准法 IMEX 受 CFL 条件限制，通常要求 $\tau=\mathcal{O}(h)$；(ii) 本文格式无限制，允许采用远大于 CFL 条件所允许得时间步长。数值实验验证了此优势。在固定空间网格 $h=1/32$ 下，本文格式采用 $\tau=0.01$ (已超出该网格下的典型 CFL 限制)所达到的精度，与标准 IMEX 法采用 $\tau=h\approx 0.031$ 的精度相当。

总之，为了达到相同计算精度，本文格式所需的总时间步数可显著少于条件稳定方法，从而在长期模拟中实现更高的总计算效率。

参考文献

[1] Giraldo, F.X., Restelli, M. and Läuter, M. (2010) Semi-Implicit Formulations of the Navier-Stokes Equations: Application to Nonhydrostatic Atmospheric Modeling. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **32**, 3394-3425. https://doi.org/10.1137/090775889

[2] Girault, V. and Raviart, P.A. (1986) Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag.

[3] Temam, R. (1979) Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis. 3rd Edition, North-Holland.

[4] de Frutos, J., García-Archilla, B., John, V. and Novo, J. (2015) Grad-Div Stabilization for the Evolutionary Oseen Problem with Inf-Sup Stable Finite Elements. *Journal of Scientific Computing*, **66**, 991-1024. https://doi.org/10.1007/s10915-015-0052-1

[5] García-Archilla, B. and Novo, J. (2022) Robust Error Bounds for the Navier-Stokes Equations Using Implicit-Explicit Second-Order BDF Method with Variable Steps. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **43**, 2892-2933. https://doi.org/10.1093/imanum/drac058

[6] Guermond, J. (1999) Stabilization of Galerkin Approximations of Transport Equations by Subgrid Modeling. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **33**, 1293-1316. https://doi.org/10.1051/m2an:1999145

[7] Ammi, A.A.O. and Marion, M. (1994) Nonlinear Galerkin Methods and Mixed Finite Elements: Two-Grid Algorithms for the Navier-Stokes Equations. *Numerische Mathematik*, **68**, 189-213. https://doi.org/10.1007/s002110050056

[8] Dubois, T., Jauberteau, F. and Temam, R. (1993) Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations by the Nonlinear Galerkin Method. *Journal of Scientific Computing*, **8**, 167-194. https://doi.org/10.1007/bf01060871

[9] Shen, J. (1992) On Error Estimates of Projection Methods for Navier-Stokes Equations: First-Order Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **29**, 57-77. https://doi.org/10.1137/0729004

[10] Shen, J. (1992) On Error Estimates of Some Higher Order Projection and Penalty-Projection Methods for Navier-Stokes Equations. *Numerische Mathematik*, **62**, 49-73. https://doi.org/10.1007/bf01396220

[11] Shen, J. (1996) On Error Estimates of the Projection Methods for the Navier-Stokes Equations: Second-Order Schemes. *Mathematics of Computation*, **65**, 1039-1065. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-96-00750-8

[12] He, Y. and Li, K. (2005) Two-Level Stabilized Finite Element Methods for the Steady Navier-Stokes Problem.

Computing, **74**, 337-351. https://doi.org/10.1007/s00607-004-0118-7

[13] Kaya, S. and Rivière, B. (2006) A Two-Grid Stabilization Method for Solving the Steady-State Navier-Stokes Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **22**, 728-743. https://doi.org/10.1002/num.20120

[14] Li, X. and Shen, J. (2020) On a SAV-MAC Scheme for the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes Phase-Field Model and Its Error Analysis for the Corresponding Cahn-Hilliard-Stokes Case. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **30**, 2263-2297. https://doi.org/10.1142/s0218202520500438

[15] Shen, J., Xu, J. and Yang, J. (2018) The Scalar Auxiliary Variable (SAV) Approach for Gradient Flows. *Journal of Computational Physics*, **353**, 407-416. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.10.021

[16] Shen, J., Xu, J. and Yang, J. (2019) A New Class of Efficient and Robust Energy Stable Schemes for Gradient Flows. *SIAM Review*, **61**, 474-506. https://doi.org/10.1137/17m1150153

[17] Lin, L., Yang, Z. and Dong, S. (2019) Numerical Approximation of Incompressible Navier-Stokes Equations Based on an Auxiliary Energy Variable. *Journal of Computational Physics*, **388**, 1-22. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.03.012

[18] Zhang, T. and Yuan, J. (2021) Unconditional Stability and Optimal Error Estimates of Euler Implicit/Explicit-SAV Scheme for the Navier-Stokes Equations. *Journal of Scientific Computing*, **90**, Article No. 1. https://doi.org/10.1007/s10915-021-01681-y

[19] Li, X., Shen, J. and Liu, Z. (2021) New SAV-Pressure Correction Methods for the Navier-Stokes Equations: Stability and Error Analysis. *Mathematics of Computation*, **91**, 141-167. https://doi.org/10.1090/mcom/3651

[20] Gao, H., Li, B. and Sun, W. (2014) Optimal Error Estimates of Linearized Crank-Nicolson Galerkin FEMs for the Time-Dependent Ginzburg—Landau Equations in Superconductivity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **52**, 1183-1202. https://doi.org/10.1137/130918678

[21] Hou, Y., Li, B. and Sun, W. (2013) Error Estimates of Splitting Galerkin Methods for Heat and Sweat Transport in Textile Materials. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **51**, 88-111. https://doi.org/10.1137/110854813

[22] Li, B., Gao, H. and Sun, W. (2014) Unconditionally Optimal Error Estimates of a Crank—Nicolson Galerkin Method for the Nonlinear Thermistor Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **52**, 933-954. https://doi.org/10.1137/120892465

[23] Girault, V. and Pierre-Arnaud, R. (1986) Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag.

[24] Heywood, J.G. and Rannacher, R. (1990) Finite-Element Approximation of the Nonstationary Navier-Stokes Problem. Part IV: Error Analysis for Second-Order Time Discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **27**, 353-384. https://doi.org/10.1137/0727022