Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(1), 370-378**
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.151036

Hans汉斯

高斯与双纽线的划分

张子扬

西北大学科学史高等研究院，陕西 西安

收稿日期：2025年12月21日；录用日期：2026年1月16日；发布日期：2026年1月23日

摘 要

高斯继承法尼亚诺和欧拉对双纽线划分的研究，为了获得等分点满足的方程，在三角函数的启示下将双纽线积分反演，而方程的次数超过有实际意义的根的个数促使他将双纽线函数的定义域扩充至虚数，获得了历史上第一个双周期函数，为了解释这些周期，高斯考虑了复积分，先于柯西拥有了留数概念。

关键词

高斯，双纽线积分，双周期，留数

Gauss and the Division of Lemniscate

Ziyang Zhang

Institute for Advanced Study in History of Science, Northwest University, Xi'an Shaanxi

Received: December 21, 2025; accepted: January 16, 2026; published: January 23, 2026

Abstract

Building upon the work of Fagnano and Euler on the division of the lemniscate, Gauss sought to derive equations satisfying the condition of equal division points. Inspired by trigonometric functions, he reversed the lemniscate integral. However, the degree of the resulting equation exceeded the number of practically meaningful roots, prompting him to extend the domain of the lemniscate function to include imaginary numbers. This yielded the first double-periodic function in history. To explain these periods, Gauss considered complex integration, thus anticipating Cauchy's development of the residue concept.

Keywords

Gauss, Lemniscate Integral, Doubly Periodic, Residue

文章引用：张子扬. 高斯与双纽线的划分[J]. 应用数学进展, 2026, 15(1): 370-378. DOI: 10.12677/aam.2026.151036

1. 问题的提出

数学在 19 世纪初期经历了重大的变革，虚数进入分析就是一个典型的例子，这分别由柯西(Augustin-Louis Cauchy, 1789~1857)的复积分理论和阿贝尔(Niels Henrik Abel, 1802~1829)、雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804~1851)的椭圆函数理论实现。而高斯(Carl Friedrich Gauß, 1777~1855)先于阿贝尔和雅可比创立了椭圆函数理论，也先于柯西研究了虚限积分。这些工作极大地扩充了分析学的疆域，使拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange, 1736~1813)在 18 世纪晚期对数学未来所作的悲观预言烟消云散。

通常的数学史文献告诉了我们这些历史事实，但它们往往仅限于叙述这些工作本身的内容，强调了它们与 18 世纪的工作的区别，却不充分讨论这种转变是怎样发生的[1]-[8]。比如《古今数学思想》中说，欧拉(Leonhard Euler, 1707~1783)和勒让德(Adrien-Marie Legendre, 1752~1833)只考虑实数，椭圆积分的意义本身是受到限制的。可这是在拥有了椭圆函数理论后才能意识到的，而不会是促使高斯他们创立椭圆函数的因素。这些历史研究给我们这样的印象：将旧的领域研究得足够久，以至无法再继续研究了，新的领域就会水到渠成地出现在人们眼前。可无论如何，后人能够突破前人的局限性，总是受到了一些前人没有遇到的驱动因素，对数学上那些公认的转折点，弄清这种因素是什么，是数学史研究的重要任务。

就包括椭圆函数与复积分在内的复分析而言，要弄清这种因素是什么，就需要回到高斯的早期工作，用当时的知识思考他们所解决的问题。由于高斯的早年活动留下了较丰富的线索，且他在这两方面都有所贡献，以高斯为例进行探究是最合适的。

2. 背景：十八世纪的先导性研究

1. 法尼亚诺和欧拉对双纽线积分的研究

雅各布·伯努利(Jakob Bernoulli, 1654~1705)在研究弹性问题时获得了方程：

$$\mathrm{d}y=\frac{\left(x^2+ab\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-\left(x^2+ab\right)^2}},$$

他不能用初等函数来求这个积分。联系到这项工作，他引入了双纽线，其直角坐标方程是 $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$，其极坐标方程是 $r^2=a^2\cos 2\theta$，从双纽线的顶点到曲线上任一点的弧长为：

$$\int_0^r \frac{a^2}{\sqrt{a^4-r^4}}\mathrm{d}r,$$

雅各布·伯努利猜测这也不能用初等函数积出来[1]。

虽然如此，但是雅各布·伯努利的弟弟约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667~1748)偶然发现，立方抛物线 $y=x^3$ 的两段弧的差是可积出来的，这促使法尼亚诺(Ululio Carlo Fagnano dei Toschi, 1682~1766)对双纽线积分作类似的研究，他发现，若

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{2\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}},$$

则

$$x=\frac{-1+2y^2+y^4}{1+2y-y^4}\text{。}$$

欧拉推广了法尼亚诺的工作，他得到双纽线积分的加法定理：

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\int_0^v \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\int^{\frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\text{。}$$

欧拉还得到了更一般的椭圆积分(即根号中为一般的一元四次多项式)的加法定理。后来勒让德沿着欧拉的工作继续做下去，他在形式上发展了椭圆积分理论，但没有获得可与欧拉的加法定理相比的进步[1]。

2. 欧拉的初等函数理论

我们今天知道，双纽线积分的进一步发展的关键在于引入虚数，欧拉借助三角函数、对数函数和指数函数系统地完成了这件事。

约翰·伯努利与莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716)利用部分分式法计算

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c},$$

当$b^2-4ac<0$时，这会导致虚数的对数，而这个积分也可表示为反正切函数，这给出了定义虚数的对数的一种途径。可他们对一般的对数的认识仍然是非常混乱的：莱布尼兹认为不可能有负数的对数，因为，假如−1 有一个对数，那么$\sqrt{-1}$的对数就是它的一半，而$\sqrt{-1}$是肯定没有对数的；伯努利则由

$$\frac{\mathrm{d}(-x)}{-x}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得到$\ln(-x)=\ln x$，但莱布尼兹反驳，$\mathrm{d}(\ln x)=\mathrm{d}x/x$只对正的$x$成立[1]。

实际上，无论怎么定义负数和虚数的对数都谈不上错误，但负数与虚数的对数最好与正数的对数有共同的性质，到底应该取哪些性质来扩充对数的定义范围，并没有一个绝对的标准，今天人们普遍采用的是欧拉的定义[9]。

欧拉考虑对数函数的反函数指数函数e^z (z为实数)，其幂级数展开式为

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,$$

将z换为$\mathrm{i}z$，得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=1+\mathrm{i}z-\frac{z^2}{2!}-\mathrm{i}\frac{z^3}{3!}+\cdots,$$

将它与三角函数的展开式比较，可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z,$$

而$\cos z+\mathrm{i}\sin z$也确实具有指数函数的性质，即$\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$，所以，可以将纯虚数$\mathrm{i}y$的指数函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$定义为$\cos y+\mathrm{i}\sin y$，而一般地可定义$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$为$\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$。

同时，应该注意到，欧拉之前三角函数并不是定义在全体实数上的，但现在，既然已经将指数函数的定义域扩充至虚数，就没有必要再限制它的范围，相应地，三角函数的定义域也应扩充，这由三角函数的和差角公式

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

容易实现，扩充后的正余弦函数具有周期 2π，相应地，复指数函数具有周期 $2\mathrm{i}\pi$。作为复指数函数的反函数的复对数函数 $\ln(x+\mathrm{i}y)$ 的值为 $\ln\sqrt{x^2+y^2}+\mathrm{i}\left(\arctan\frac{y}{x}+2k\pi\right)$ (k 为整数) ($x>0$ 时)，$\ln\sqrt{x^2+y^2}+\mathrm{i}\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi+2k\pi\right)$ (k 为整数) ($x<0$ 时)，或 $\ln|y|+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ ($x=0$，$y>0$ 时)，$\ln|y|+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ ($x=0$，$y<0$ 时)，它是无穷多值的，这是值得注意的，不过欧拉没有进一步讨论这一点。

我们可以看到，双纽线积分理论进一步发展的两个要素——反演与引入虚数，在欧拉这里已经具备了，欧拉缺乏的，是用这种方式处理双纽线积分的动机，这种动机，首先是由高斯获得的。

3. 高斯的工作

1. 十九世纪初数学的面貌

十八世纪数学的主流是分析，数学家们尤其关心探索自然时提出的各种微分方程。他们发展了求解微分方程的大量技巧，但是，这些技巧往往比较孤立，有时略微不同的方程也需要极不相同的技巧，在层出不穷的具体问题面前，最有能力的数学家也难免捉襟见肘。这种矛盾或许在一定程度上促使数学家们自觉或不自觉地发展分析的一般理论，十九世纪初，数学物理中出现了傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768~1830)分析和格林(George Green, 1793~1841)、高斯的位势理论，而纯粹分析，同在十八世纪不受重视的数论、代数等一起，发生了巨大的变革，更确切地说，就是数学家们不像十八世纪时那样，几乎仅仅关心问题本身，而开始将计算或证明的技巧作为实实在在的对象进行处理，代数数论、解析数论就是最好的例子。而在分析学中，虚数的引入使得过去的一些难以处理的问题被解决，而复分析也由此获得了独立的地位，逐步发展为一个庞大的学科，而这，同十九世纪数学的大多数分支一样，就要追溯到高斯的工作。

2. 高斯与双纽线积分的反演

高斯在他的日记[10]中提到，他发现了何以在双纽线的 n 等分方程中会出现指数 n^2 (1797 年 3 月 19 日) [11]。这一工作是对他关于分圆方程的研究的延续，他在《算术研究》中也提到，分圆方程理论的原理也能应用于与积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ 有关的那些超越函数[12]。考虑到双纽线积分与反三角函数 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在形式上的类似，高斯的这句话中的超越函数应当指双纽线积分的反函数(双纽线函数)。可问题是，高斯为什么会想到研究双纽线函数要好过研究双纽线积分？

我们可能会说，高斯是从反三角函数中得到启发的，但欧拉也注意到了双纽线积分与反三角函数在形式上的类似，但他并没有因此就去反演双纽线积分。这是可以理解的，因为一个函数与它的反函数不会有本质上的不同，欧拉会觉得，双纽线函数的任何性质与双纽线积分的任何性质都能显然地相互转化。人们主要讨论三角函数而不是反三角函数只是因为三角函数更早被发现，而十八世纪的人讨论双纽线积分而不是双纽线函数的理由也是如此，很难想象双纽线函数会比双纽线积分更适合研究。

高斯有所突破得益于他提出的一个新的小任务：写出双纽线的 n 等分点满足的方程。根据欧拉的加法定理，对于任一具体的 n，都可以得到使得

$$n\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

的 a 应满足的代数方程，也可以得到剩下的几个 n 等分点与 a 的关系，但要得到以所有这些值为根的方

程，还要进行不少计算。但是获得圆的 n 等分点满足的方程却不用这么麻烦，θ 等于 $\frac{2\pi}{n}$ 的任意整数倍时，$\sin n\theta = 0$，当 n 为奇数时，可以立即得到圆的 n 等分点对应的角的正弦满足的 n 次方程，这是因为正弦函数以 2π 为周期。反正弦函数 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的值不会超过 $\frac{\pi}{2}$，正弦函数超出反正弦函数的值域的定义域是从三角函数的加法定理自然地延拓出来的。同样，若将双纽线积分的加法定理转化为双纽线函数的加法定理，可以类似地将双纽线函数的定义域延拓至全体实数，这样得到的双纽线函数具有周期 $4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$。

具体地说，高斯[13]将从 $x=0$ 到 $x=1$ 的积分值记为 $\frac{1}{2}\varpi$，定义

$$\sin\operatorname{lemn}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = x，$$

$$\cos\operatorname{lemn}\left(\frac{1}{2}\varpi - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\right) = x。$$

为简便，记 $\sin\operatorname{lemn}$ 为 s，$\cos\operatorname{lemn}$ 为 c，有

$$1 = ss + cc + sscc$$

$$\sin\operatorname{lemn}(a \pm b) = \frac{sc' \pm s'c}{1 \mp scs'c'}，$$

$$\cos\operatorname{lemn}(a \pm b) = \frac{cc' \mp ss'}{1 \pm ss'cc'}。$$

由此，可将双纽线函数延拓至全体实数，它们具有周期 2ϖ。进而，双纽线的 n 等分点对应方程 $\mathrm{sl}\ \mathrm{na} = 0$，当 n 为奇数时，$\mathrm{sl}\ \mathrm{na}$ 是 $\mathrm{sl}\ \mathrm{a}$ 的多项式函数，由此可解出 $\mathrm{sl}\ \mathrm{a}$。

3. 虚数的引入与双周期性

高斯[13]发现，$\mathrm{sl}\ \mathrm{na}$ 是 $\mathrm{sl}\ \mathrm{a}$ 的 n^2 次多项式函数，可是，我们现在只能看出，方程 $\mathrm{sl}\ \mathrm{na}(\mathrm{sl}\ \mathrm{a}) = 0$ 有 n 个实解 $\mathrm{sl}\ 2\varpi\frac{k}{n}$ （$k = 0,1,2,\cdots,n-1$），多出来的虚根应当如何解释，是高斯面临的一个问题。$\mathrm{sl}\ \mathrm{na}$ 与 $\mathrm{sl}\ \mathrm{a}$ 的多项式函数关系，是加法定理的结果，所以，应当从加法定理出发，将双纽线函数的定义域扩充至全体复数。

首先，应当研究，纯虚数的双纽线函数应该是多少，这难以从加法定理中获得，而应该回到双纽线积分。$\int_0^{ia} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}(\mathrm{i}t)}{\sqrt{1-(\mathrm{i}t)^4}} = \mathrm{i}\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$，则 $\sin\operatorname{lemn}\mathrm{i}y = \mathrm{i}\sin\operatorname{lemn}y$，$\cos\operatorname{lemn}\mathrm{i}y = \frac{1}{\cos\operatorname{lemn}y}$。进而，

$$\sin\operatorname{lemn}(x+\mathrm{i}y) = \frac{s + \mathrm{i}s'cc'}{c' - \mathrm{i}ss'c}。$$

于是可以知道，复双纽线函数具有实周期 2ϖ 和虚周期 $2\mathrm{i}\varpi$，n^2 次方程 $\mathrm{sl}\ \mathrm{na}(\mathrm{sl}\ \mathrm{a}) = 0$ 的根为 $\mathrm{sl}\left(2\varpi\frac{k}{n} + 2\mathrm{i}\varpi\frac{j}{n}\right)$ （k, j 为整数）。这就回答了高斯的问题。不过，这个回答有一个缺陷，那就是没有证明满足加法定理的复双纽线函数是唯一的，按照现存的资料，我们并不清楚高斯是否仔细考虑过这一点。

4. 周期的解释：留数

在高斯的时代，三角函数作为周期函数已经出现很久了，人们也清楚，$\arcsin x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$。可是，

这个反正弦函数的自变量只能−1 和 1 之间取，它只是定义在 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的正弦函数的反函数，完整的正弦函数是由加法定理延拓得到的，它的反函数是无穷多值的。十八世纪的人们似乎没有仔细考虑过这一点，高斯通过反演双纽线积分并引入虚数获得了一个双周期函数，这和三角函数的情况不同，高斯不能满足于上面所述的为了获得复双纽线函数而进行的对复双纽线积分的粗浅考虑。高斯要研究的是，双纽线积分究竟是不是复双纽线函数的反函数，也就是说，在复数范围内，从一个值出发，以不同方式到另一个给定的值积分，结果是否可能不同？

高斯在 1811 年给贝塞尔的一封信中叙述了他的研究结果：

> 当上限为 $a+bi$ 时 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$ 的意义应当是什么？显然，如果要求具有清楚的概念，那就必须假定 x 取小的增量，从使积分为零的 x 值到 x 为 $a+bi$ 的值，再将所有 $\varphi(x)\mathrm{d}x$ 加起来……但是在复平面上从 x 的一个值到另一个值的连续过程发生在一条曲线上，所以通过许多条路径是可能的。现在我断言，即使通过不同的路径，只要在两条路径所围的空间内 $\varphi(x)$ 是单值的，并且不变为无穷，那么积分 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$ 只有一个值。这是一条很美妙的定理，它的证明并不难，我将在一个适当的机会给出这个证明……如果 $\varphi(x)$ 变为无穷，那么 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$ 可以有许多值，取决于所取闭路径围绕 $\varphi(x)$ 变为无穷的点一次、二次或更多次。[14]

可以看到，高斯先于柯西拥有了柯西积分定理与留数概念[15]，这封信也因此成为了高斯最有名的一封信。通常的数学史文献都将这件工作作为高斯的一项孤立成就加以引述，而不讨论它与高斯的其他工作的联系。根据上面的讨论，我们可以认为，它是由高斯对双纽线积分与双纽线函数的研究引起的。

高斯在信中特别讨论了积分 $\int\mathrm{d}x/x$，从 $x=1$ 出发，走到某一个值 $a+bi$，如果路径不包围 $x=0$，就得出积分的唯一的一个值；但是如果路径包围 $x=0$，积分值就会变化 $2\pi i$。这就解释了欧拉从指数函数出发发现的现象。

再以正弦函数 $u=\sin x$ 与反正弦函数 $x=\int_0^u\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ 为例，对一个小于 $\frac{\pi}{2}$ 的正数 x，$\int_0^{\sin x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ 可能等于 x，也可能等于 $\pi-x$，也可能等于 $x+2k\pi$ （k 为整数)，正常地从 0 积到 $\sin x$ 则得到 x，从 0 积到 1 (被积函数取正值)再折返回 $\sin x$ （被积函数取负值)得到 $\pi-x$，绕−1 与 1 中的一个一圈积分，积分值变化 2π，多次环绕，得到 $x+2k\pi$，也可得到 $\pi-x+2k\pi$。而双纽线积分，被积函数有四个无穷点±1，±i，若环绕 1 或−1 一次，积分值变化 2ϖ，若环绕 i 或 –i 一次，积分值变化 $2\varpi i$。这样，尽管还有一些不严密之处，但我们可以说，三角函数就是积分 $\int_0^u\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ 的名副其实的反函数，复双纽线函数也是复双纽线积分的名副其实的反函数。

我们已经看到，欧拉已对全体复数定义了指数函数，并发现它的反函数是无穷多值的，而且，研究虚对数本来就是由积分引起的。可是，这些都没有促使欧拉研究虚积分。高斯能够迈出这一步，应当是因为，双纽线函数尚不能像指数函数和三角函数那样被独立定义，而需要作为双纽线积分的反函数出现，仅仅利用加法定理，就算在实数范围内考虑，也是难以获得函数值的。所以，研究虚数的双纽线函数就会导致研究虚限双纽线积分。

5. 阿贝尔和雅可比对椭圆函数的研究

阿贝尔早年从事代数方程的研究，后在他人的建议下研究椭圆函数，他阅读过高斯的《算术研究》，并在后来，在高斯的分圆方程理论的启发下，证明了源自椭圆函数的一类更加广泛的方程是根式可解的。阿贝尔发表他关于椭圆函数的第一篇论文后，高斯在给贝塞尔的信中说，“他的道路恰恰是我 1798 年所走的道路，我们的结果如此相似，毫不足怪。使我惊奇的是，这种相似性还拓展到形式，甚至部分记号

的选择，好多次他的公式就像我的公式的复制品那样出现。”[12]

雅可比的情况有些不同，他早期受勒让德的影响，主要关心椭圆函数的变换问题，也就是说，寻找 x 的有理函数 y，满足：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-\lambda^2y^2\right)}}=\frac{\mathrm{d}x}{M\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}\text{。}$$

这是一个纯粹的代数问题，而给定 y 的次数，它的具体形式也能利用初等代数方法获得，但要获得一般的变换公式，却极为困难。雅可比定义，若

$$u=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}\text{，}$$

则

$$x=\sin\mathrm{am}\,u\text{，}$$

此外，

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}=K\text{，}$$

$$\mathrm{am}\left(K-u\right)=\mathrm{coam}\,u\text{，}$$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k'^2x^2\right)}}=K',\left(k^2+k'^2=1\right)\text{。}$$

雅可比将 $x=\sin\mathrm{am}\,u$ 的定义域拓展到复数之后，证明，变换

$$y=\frac{\frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\,4\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\,8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\,2\left(n-1\right)\omega}\right)}{\left(1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\,4\omega\right)\left(1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\,8\omega\right)\cdots\left(1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\,2\left(n-1\right)\omega\right)}\text{，}$$

其中

$$\omega=\frac{mK+m'\mathrm{i}K'}{n}\quad(m\text{ 和 }m'\text{ 为任意正整数})$$

满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-\lambda^2y^2\right)}}=\frac{\mathrm{d}x}{M\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}\text{，}$$

其中

$$\lambda=k^n\left(\sin\mathrm{coam}\,4\omega\sin\mathrm{coam}\,8\omega\cdots\sin\mathrm{coam}\left(2n-1\right)\omega\right)^4\text{，}$$

$$M=\left(-1\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\sin\mathrm{coam}\,4\omega\sin\mathrm{coam}\,8\omega\cdots\sin\mathrm{coam}\left(2n-1\right)\omega}{\sin\mathrm{am}\,4\omega\sin\mathrm{am}\,8\omega\cdots\sin\mathrm{am}\left(2n-1\right)\omega}\right)^2\text{。}$$

雅可比的工作鲜明地展现了椭圆函数理论的价值，它一定使勒让德大为欣喜，两人因此建立了友谊，而勒让德不久后给出了雅可比的定理的一个新证明[16]。需要指出的是，我们并不能从这一工作中看出雅

可比是怎样想到反演椭圆积分并扩充它可以解决变换问题的，鉴于雅可比同阿贝尔一样，熟悉高斯的《算术研究》，我们可以猜测，雅可比也是在高斯《算术研究》中的暗示的启发下发展其椭圆函数理论的。

6. 高斯不发表其工作的可能原因

高斯从未发表他在复分析方面的研究，表面上看，我们似乎应将其归因于高斯对待虚数的保守态度，毕竟，高斯在其关于代数基本定理的博士论文中，为了避免提到虚数而保留了二次因子。可同样是高斯，为了推广二次互反律而将虚数引入数论。那么，为了分析的需要，高斯也应当敢于公开他的复分析工作。而且，在阿贝尔的工作发表后，高斯仍然有发表其工作的打算。所以，高斯最终没有发表他的工作，要么是一种偶然，要么是因为它还是没有达到高斯满意的程度。

椭圆函数理论的起点是扩充函数的定义域(延拓)，我们之前叙述了延拓的三种方式，第一是利用加法定理，第二是利用幂级数，第三是利用复积分，前两种是欧拉曾使用过的，第三种是高斯的新发现。可是，那时，即便是前两种方式，也远未成熟，它们之间的关系也模糊不清。比如，为什么延拓正弦函数要利用余弦函数而不是仅仅使用正的平方根，而对一般的函数，加法定理是否唯一？复积分和加法定理分别用于椭圆积分和它的反函数，可它们似乎并不“相反”。而一般地说，究竟应该采用什么方式延拓函数？我们现在知道，后来魏尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815~1897)利用幂级数，而黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826~1866)利用柯西－黎曼方程进行延拓，高斯的时代，魏尔斯特拉斯和黎曼工作的基础还在被建立，高斯虽然有超越时代的才智，却没有足够的时间，去回答刚才提到的那些问题。没有合适的延拓理论，椭圆函数理论就不完备，或许这就是高斯没有发表其工作的原因。

高斯一生完成而未发表的工作远不止椭圆函数与复积分理论，著名的还有非欧几何与二元二次型的类数公式，这些都是高斯同时或之后的那一代数学家的代表性成就。后世的数学家无不为高斯未发表这些工作而遗憾，但我们也应当注意到，有时，正是高斯在一些公开作品中对这些研究的暗示或简短说明，促使那些数学家转向这些研究，椭圆函数理论就是一个例子。

4. 总结

本文在原始文献的基础上，分析出高斯从双纽线的划分问题出发，开始了他对函数论的改造。和欧拉等前人不同，高斯受他的分圆方程研究的影响，希望确切地获得双纽线的等分点对应的方程，这促使他将双纽线积分反演以获得一个类似三角函数的周期函数。n 等分点对应的方程是 n^2 次的，这使得他考虑复变量的双纽线函数，得到了一个虚周期。这些工作又促使他回过头全面地考虑复变量积分，先于柯西拥有了柯西积分定理与留数概念。

作为十九世纪初数学变革的一部分，复分析的出现长期是人们关注的重点，本文以高斯的工作为研究对象，初步揭示了复分析诞生的驱动因素。本文讨论的，只是分析学的这一变革的开端，而非其全貌，而复分析也只是高斯工作以及十九世纪初数学的一部分，详细地探讨这场变革究竟是怎样发生的，受到哪些具体问题和一般观念的推动，无疑是重要的。

同时，还应看到，今日数学多分支的局面，正是在十九世纪初开始形成的，将数学的不同分支联系起来，这种今天人们习以为常的思想，也是那时成型的。在高斯、阿贝尔和雅可比的工作中，分析、数论和代数是相互关联的，后来，一代又一代的数学家深化并理解这种联系，这种工作从未间断。所以，回到十九世纪初期的这些工作，也有助于理解今天的数学，甚至有益于数学的未来。

参考文献

[1] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想: 第三册[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002.

[2] 李文林. 数学史概论[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[3] 胡作玄. 近代数学史[M]. 济南: 山东教育出版社, 2006.

[4] 王昌. 留数概念的起源[J]. 广西民族大学学报(自然科学版), 2008, 14(4): 14-16.

[5] 石丽仙. 柯西复分析思想探究[D]: [硕士学位论文]. 太原: 山西师范大学, 2013.

[6] 潘丽云, 潘丽娜. 雅可比建立椭圆函数理论的历史分析[J]. 西安电子科技大学学报(社会科学版), 2006, 16(4): 149-152.

[7] 陆源. 阿贝尔对椭圆函数论的贡献[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古师范大学, 2009.

[8] 贾立媛. 阿贝尔的椭圆函数理论[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2016.

[9] 欧拉. 无穷分析引论[M]. 张延伦, 译. 太原: 山西教育出版社, 1997.

[10] Gauss, C.F. (1917) Werke, Band X1. Göttingen.

[11] 菲利克斯·克莱因. 数学在19世纪的发展: 第一卷[M]. 齐民友, 译. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[12] 高斯. 算术探索[M]. 潘承彪, 张明尧, 译. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011.

[13] Gauss, C.F. (1866) Werke, Band III. Göttingen.

[14] Gauss, C.F. (1900) Werke, Band VIII. Göttingen.

[15] Cauchy, A.L. (1825) Mémoire sur les intégrales definies, prises entre des limites imaginaires. De Bure.

[16] Jacobi, C.G.J. (1829) Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Sumtibus Fratrum Borntræger.