

单和双圈图 k -孤立数的上确界

李若茜, 儒孜·买司地克

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年12月1日; 录用日期: 2025年12月26日; 发布日期: 2026年1月5日

摘 要

对一个自然数 k , 若简单无向图 G 的顶点子集 D 满足条件: 减去 D 的闭邻域后得到的图 $G - N[D]$ 不含 $k + 2$ 阶的星图 $K_{1,k+1}$ 作为子图, 则 D 被称为 G 的一个 k -孤立集。图 G 的最小一个 k -孤立集 D 的阶数被称为图 G 的 k -孤立数。本文得到了单和双圈图的 k -孤立数的上确界。

关键词

孤立集, 孤立数

Upper Bound on k -Isolation Number of Unicyclic and Bicyclic Graphs

Ruoxi Li, Metsidik-Metrose

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: December 1, 2025; accepted: December 26, 2025; published: January 5, 2026

Abstract

For a natural number k , a vertex subset D of a simple undirected graph G satisfies the condition that the graph $G - N[D]$ obtained by removing the closed neighborhood of D does not contain the star graph $K_{1,k+1}$ of order $k + 2$ as a subgraph, then it is calwled a k -isolating set of the graph. The minimum order of such a k -isolating set in a graph is referred to as the k -isolation number of the graph. This paper establishes the upper bound of the k -isolation numbers for unicyclic and bicyclic graphs.

Keywords

Isolation Set, Isolation Number

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Open Access

1. 引言

图的控制理论是图论[1]中的经典研究方向之一, 起源于 20 世纪 60 年代, 最初用于建模通信网络中的关键节点识别问题。随着网络科学、人工智能和复杂系统的发展, 控制理论被广泛应用于社交网络分析、传感器网络优化、病毒传播控制等领域。

传统的控制集[2]要求图中每个不在集合中的顶点至少有一个邻居在集合中, 这一条件在某些实际应用中可能过于严格。为此, 孤立集的概念被提出, 作为控制理论的松弛形式。孤立集的核心思想是: 通过移除某些顶点及其邻域, 使得剩余子图不包含特定结构的子图(如完全图、圈、路径等), 从而实现对图结构的“隔离”或“破坏”。

如果 D 是**控制集**, 则图 G 的一个顶点集合 D 满足不在 D 中的每个顶点至少有一个邻点在 D 中[2]。图 G 的**控制数**用 $\gamma(G)$ 表示, 是 G 的控制集的最小阶数。关于图的控制数理论, 无数的专家和学者已有大量研究, 可参阅书籍[3]及其参考文献。对于每个图 $G=(V, E)$, 定义点 $v \in V$ 的闭邻域为 $N_G[v] = \{v\} \cup \{u \in V : uv \in E\}$ 。点集 $S \subseteq V$ 的闭邻域为 $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N_G[v]$ 。如果图 G 已经清楚, 则可以简写为 $N[u]$ 和 $N[S]$, 而不是 $N_G[u]$ 和 $N_G[S]$ 。用这种术语可以重新定义控制集的概念: D 是 G 的控制集当且仅当 $V = N[D]$ 。通过放松这个条件, 可以引入孤立的概念。

要求 $N[D] = V$ 在许多实际应用中非常重要。然而, 有时这个条件并非必要或有利, 此时可以考虑一个更宽松的条件。孤立集的概念就是这样一个例子。2017 年, Caro 和 Hansberg [4]首次系统提出了孤立集的概念, 并给出了若干基本性质与界。具体来说, 对于一个图族 $\mathcal{F}$, 如果图 G 的一个顶点集合 S 满足从 $V - N_G[S]$ 导出的子图中不包含 $\mathcal{F}$ 中任何图的子图, 则称 S 是 $\mathcal{F}$ **孤立的**。特别地, K_1 孤立集就是通常的控制集。不在 K_2 孤立集控制下的顶点形成一个独立集, 只有一些孤立点或者是空集。为了简化, 用**孤立集**代替 K_2 孤立集。图 G 的**孤立数** $\iota(G)$ 是 G 的孤立集的最小阶数。2021 年, Zhang [5]将 $K_{1,k+1}$ -孤立数引入图的控制理论研究, 提出了 k -星孤立的概念, 并研究了树、环、完全图等特殊图类的孤立数。其中值得注意的是, K_2 孤立数等价于 Lewis 等人[6]更早提出的点-边控制数, 进一步验证了孤立数的理论价值, 亦与 Canales 等人[7]定义的 2-距离顶点覆盖数相同, 拓展了孤立数的应用范围。而早在 1996 年, 文献[8]中已经出现了“移除顶点集及其邻域”的思想。

$K_{1,k+1}$ -孤立数作为控制理论的一个新兴分支, 由 Zhang [5]在 2021 年提出。图的孤立理论是图的控制理论的自然推广, 代表着图论领域中一个极具创新性的研究趋势。本文对 $K_{1,k+1}$ -孤立数的探讨仅是这一研究方向的初步尝试, 预示着未来研究将更加深入并富有意义。 $K_{1,k+1}$ -孤立数的引入不仅丰富了图论的理论体系, 也为实际问题的解决提供了新的工具和方法, 比如帮助设计更有效的网络结构, 提高网络的鲁棒性和安全性, 促进相关算法的设计和优化等。

本文的目的是证明两种图 k 孤立数的上界都是 $\iota_k(G) \leq n/(k+3)$ 。接下来介绍一些术语和预备知识。

2. 预备知识

本文考虑的图均为简单无向连通图。设 $G=(V, E)$ 表示顶点集为 V , 边集为 E 的简单图。对于任意 $v \in V(G)$, 用 $d_G(v)$ 表示点 v 的度, 有时简写为 $d(v)$, 即图 G 中与 v 关联的边数。设 C_m 和 P_n 分别表示 m ($m \geq 3$)阶圈和 n ($n \geq 2$)阶路。在图 G 中, 点 u 和 v 之间的最短的 (u, v) 路的长称为 u 到 v 的距离, 记

为 $d(u, v)$ 。图的直径就是图中任意两点之间最短路径的最大值, 记为 $\text{diam}(G)$ 。

图 G 的一个顶点称为叶子, 如果它的度数为 1; 一个顶点称为支撑点, 如果它与一个叶子相邻。设 $\mathcal{T}$ 是一类树族, 其定义如下: 如果一棵树 T 属于 $\mathcal{T}$, 那么它可以通过在某一个树 T_0 的每个顶点 v 上连接一个 $K_{1,k+1}$ 得到: 通过一条边将 v 连接到 $K_{1,k+1}$ 的一个叶子上。因此, 如果 T 是一棵 n 阶属于 $\mathcal{T}$ 的树, 则 n 必为 $k+3$ 的倍数。对于每个属于 $\mathcal{T}$ 阶数至少为 $2(k+3)$ 的树 T , 分别用 $L(T)$ 、 $S(T)$ 、 $N(T)$ 和 $R(T)$ 表示 T 的不属于 T_0 的叶子集合、支撑点集合、邻点集合(表示与支撑点相邻的非叶子点的集合)和剩余顶点集合(图 1)。若 $T \in \mathcal{T}$, 则有 $|R| = |N| = |S| = n/(k+3)$, $|L| = n - 3n/(k+3)$ 。

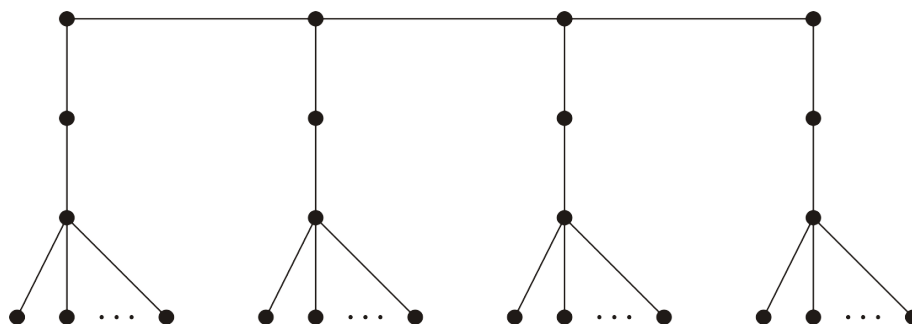


Figure 1. $T \in \mathcal{T}$ and $\iota_k(T) = n/(k+3)$

图 1. $T \in \mathcal{T}$ 且 $\iota_k(T) = n/(k+3)$

如果树 T 的阶数为 $k+3$, 且 $T \in \mathcal{T}$, 则 $L(T)$ 是一个包含恰好一个叶子的集合, 而 $R(T)$ 是包含另一个叶子的集合。 T 的一个 $(k+3)$ 集合是一个包含一个叶子、它的支撑顶点、与支撑顶点相邻的非叶子点以及该叶子最近的 R 中的顶点 $k+3$ 个顶点的集合, 对于任一 $u \in V(T)$, 用 $T_{k+3}(u)$ 表示包含 u 的 $(k+3)$ 集合, 并且分别用 $r(u)$ 、 $n(u)$ 、 $s(u)$ 和 $l(u)$ 表示。注意, T 的每个 $K_{1,k+1}$ 孤立集 D 至少包含 $(k+3)$ 集合中的一个顶点, T_0 的所有顶点集合和所有邻点集合是 $\mathcal{T}$ 的最小 $K_{1,k+1}$ 孤立集。

为刻画极图, 取一条 t 个顶点的路 P , 并将 $K_{1,k+1}$ 的叶子依次与 P 的每个顶点相连构成树 $\mathcal{T}$ 。显然 P 的顶点构成 k -孤立集, 且任何 k -孤立集至少需从每个 $K_{1,k+1}$ 中各取一个顶点, 故

$$\iota_k(\mathcal{T}) = t = \frac{n}{k+3}$$

因此界是紧的。

关于孤立的相关结论, 已有以下结果。

Caro、Hansberg [4] 和 Zylinski [9] 已经证明了以下孤立数的上界:

定理 1 ([4] [9]). 设 G 是一个阶数为 $n \geq 3$ 的连通图, 且 $G \neq C_5$, 则 $\iota(G) \leq n/3$, 并且这个上界是紧的。

2024 年, Lemanska [10] 和 Boyer [11] 等人刻画了 $\iota(G) = n/3$ 时的极图, 其中 $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}$ 分别是 $\iota(G) = n/3$ 的单圈图族和 14 个特殊图。

定理 2 ([10] [11]). 设 G 是一个阶数为 n 的连通图, $\iota(G) = n/3$ 当且仅当 $G \in \mathcal{G} \cup \mathcal{E}$ 。

定理 3 ([5]). 如果 $G \notin \{P_3, C_3, C_6\}$ 是一个阶数为 n 的连通图, 那么 $\iota(G, K_{1,2}) \leq 2n/7$ 。

定理 4 ([4]). 设 T 是一棵有 n 个顶点的树, 且 T 不同构于 $K_{1,k+1}$ 。那么 $\iota_k(G) \leq n/(k+3)$, 并且这个上界是紧的。

此外, Zhang [12]、Borg [13] 等人通过限定图结构, 也获得了一系列更为精细的孤立数的界, 并且控制数达到 $n/2$ 上界的图已被刻画 [14], 可描述为在给定图的每个顶点上粘合一个 K_2 而得到的图, 此类图

的结构特征启发了单、双圈图极图的构造。

3. 单圈图的上界

如果一个连通图 G 恰好包含一个圈, 则称其为**单圈图**。单圈图在图论中具有重要地位, 是树与圈图的过渡形式, 常用于研究图的圈性质、控制性质、染色性质等。首先介绍一些术语和用于证明的相关引理。

定理 5. 如果图 G 有一个支撑顶点 v , 使得其除了一个顶点外的所有邻点都是叶子, 则存在一个最小 k -孤立集, 既不包含 v , 也不包含与 v 相邻的叶子。

证明. 令 w 是与 v 相邻且不是叶子点的唯一顶点。令 D 是 G 的一个最小的 k -孤立集。如果 D 不包含 $N[v] \setminus \{w\}$ 中的任何顶点, 则 D 满足所需的条件。否则, 考虑集合 $D' = (D \setminus N[v]) \cup \{w\}$ 。那么, D' 也是一个 k -孤立集且 $|D'| \leq |D|$ 。因此, D' 是一个既不包含 v , 也不包含与 v 相邻的叶子点的 G 的最小的 k -孤立集。

对于单圈图 G , 设 C 是 G 中唯一的圈。对于圈 C 中的每个顶点 u , 记 $T(u)$ 为从 G 中移除与 u 相邻的圈 C 的边后包含 u 的连通分支。注意 $T(u)$ 是一棵树, 称其为 G 中 u 的**悬挂树**。

引理 1: 若单圈图或双圈图 G 存在支撑顶点 v 满足 $d(v) \geq k+2$, 则

$$t_k(G) \leq \frac{n}{k+3}。$$

证明. 设 u 为与 v 相邻的叶子, 令 $G' = G - u$ 。

若 G' 为 $K_{1,k+1}$ 任意添加一条边构成的单圈图, 则 G 为在 G' 上加任意一条边的单圈图或在 G' 的一条边上细分一次得到的单圈图; 若 G' 为 $K_{1,k+1}$ 任意添加两条边构成的双圈图, 则 G 为 G' 上加任意两条边的双圈图或在 G' 的两条边上细分一次得到的双圈图; 此时 v 即为 k -孤立集, 且 $n = k+3$, 故

$$t_k(G) = 1 = \frac{n}{k+3}$$

若 G' 不属于上述情况, 由归纳假设有

$$t_k(G') \leq \frac{n-1}{k+3}$$

由于 $d(v) \geq k+1$, u 为与 v 相邻的叶子, 则顶点 $u \notin D$, 因此 G' 的任意 k -孤立集也是 G 的 k -孤立集, 于是

$$t_k(G) \leq t_k(G') \leq \frac{n-1}{k+3} < \frac{n}{k+3}$$

得证。

接下来, 在证明定理的多种情况下使用以下注记。

注记 1. 如果 e 是图 G 的一条边, 且 D 是 $G-e$ 的一个 k -孤立集, 使得 e 的至少一个端点属于 $N[D]$, 则 D 也是 G 的 k -孤立集。

定义 1. 对于整数 $k \geq 3$, 定义单圈图族 $\mathcal{Z}_1$ 如下:

顶点集 $V(\mathcal{Z}_1) = V(K_{1,k+1})$, 边集 $E(\mathcal{Z}_1) = E(K_{1,k+1}) \cup \{e\}$, 其中 e 为在 $K_{1,k+1}$ 的叶子点之间添加的一条新边。

该图阶数为 $k+2$, 恰含一个支撑顶点, 且该支撑顶点本身即构成 $\mathcal{Z}_1$ 的一个 k -孤立集, 故 $t_k(\mathcal{Z}_1) = 1$, 见图 2。

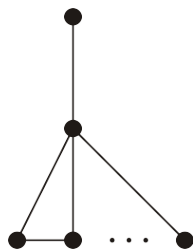


Figure 2. $K_{1,k+1} + e \in \mathcal{U}_1$ and $t_k(\mathcal{U}_1) = 1$

图 2. $K_{1,k+1} + e \in \mathcal{U}_1$ 且 $t_k(\mathcal{U}_1) = 1$

定义 2. 对于整数 $k \geq 3$, 定义单圈图族 $\mathcal{U}_2$ 如下:

顶点集 $V(\mathcal{U}_2) = V(\mathcal{T})$, 边集 $E(\mathcal{U}_2) = E(\mathcal{T}) \cup \{e\}$, 其中 e 为在 $\mathcal{T}$ 的任意两点之间添加的一条新边使之构成单圈图(图 3)。

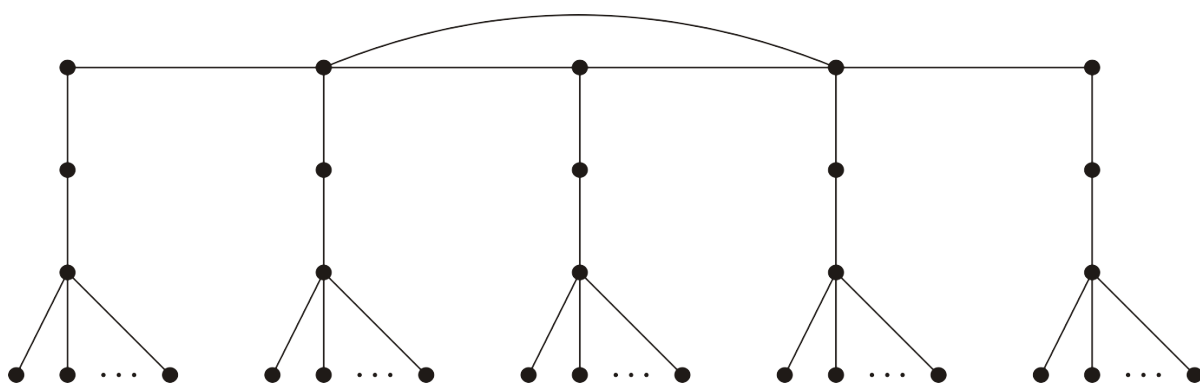


Figure 3. $G \in \mathcal{U}_2$ and $t_k(G) = n/(k+3)$

图 3. $G \in \mathcal{U}_2$ 且 $t_k(G) = n/(k+3)$

单圈图族 $\mathcal{U}_2$ 的构造方式是: 取一条 t 个顶点的路 P , 并将 $K_{1,k+1}$ 的叶子依次与 P 的每个顶点相连构成树 $\mathcal{T}$, 在 $\mathcal{T}$ 上加任意一条边构成单圈图族 $\mathcal{U}_2$, 其中包括对于任一个单圈图 G_0 , 将 $K_{1,k+1}$ 的叶子点与 G_0 的每一个顶点通过一条边相连, 或者是对于图 4 中的任意一图, 通过一条边将其与 $\mathcal{T}$ 的顶点相连, K_1 与 $K_{1,k+1}$ 叶子的 4 种连边方式如下图所示, 有且仅有以下方式使得此类单圈图族的 k -孤立数达到上界。

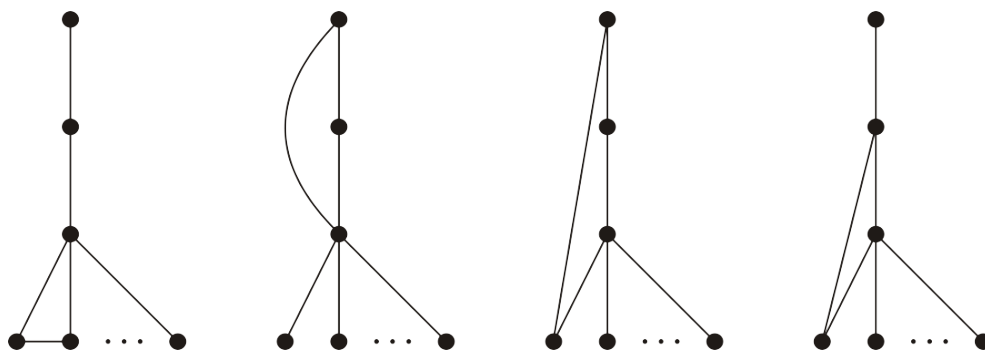


Figure 4. Four special unicyclic graphs

图 4. 4 种特殊的单圈图

定理 6. 如果 G 是 n 阶不同构于 $\mathcal{Z}_1$ 的单圈图, 则 $\iota_k(G) \leq n/(k+3)$, 且这个界是紧的。

证明. 对 G 的顶点数进行归纳。令 D 是 G 的一个最小的 k -孤立集。当 $n \leq k+2$ 时, G 中不存在同构于 $\mathcal{Z}_1$ 的子图, 故 $\iota_k(G) = 0 \leq n/(k+3)$ 成立。

现设 $n \geq k+3$, 且对任意阶数小于 n 且不属于 $\mathcal{Z}_1$ 的单圈图结论成立。分两种情况讨论。

情形 1: G 存在支撑顶点 v 满足 $d(v) \geq k+2$ 。由引理 1 得

$$\iota_k(G) \leq \frac{n}{k+3}$$

结论显然成立。

情形 2: G 的所有支撑顶点的度数均小于等于 $k+1$ 。

此时 G 的直径至少为 3, 否则 G 将属于 $\mathcal{Z}_1$, 与假设矛盾。取直径路径 $P = x_0 x_1 x_2 \cdots x_d$ ($d \geq 3$)。若 $d = 3$, 则 x_1 即为 k -孤立集, 且

$$\iota_k(G) = 1 \leq \frac{n}{k+3}$$

设 $d \geq 4$ 。若 $x_3 x_4$ 属于圈中任意一条边即 $x_3 x_4 \in E(C)$, 删去边 $x_3 x_4$ 得到树 T 满足

$$\iota_k(T) \leq \frac{n}{k+3}$$

又因为所有支撑顶点度数为 $k+1$, $x_3 x_4$ 是图 G 的一条边, 若 D 是 $G - \{x_3 x_4\}$ 的一个 k -孤立集, 且 $x_3 x_4$ 的至少一个端点属于 $N[D]$, 那么 D 也是 G 的 k -孤立集。于是

$$\iota_k(G) = \iota_k(T) \leq \frac{n}{k+3}$$

若 $x_3 x_4$ 不属于圈中任意一条边即 $x_3 x_4 \notin E(C)$, 那么删去边 $x_3 x_4$ 得到两个图 G_1 和 G_2 , 且 $x_3 \in G_1$, $x_4 \in G_2$ 。

若 G_1 是单圈图, 则 G_2 是一棵树即 $T(x_4)$, 满足

$$\iota_k(G_2) \leq \frac{|V(G_2)|}{k+3}$$

由于所有支撑顶点度数为 $k+1$, G_1 至少有 $k+3$ 个顶点, 则 x_3 是 G_1 的 k -孤立集。那么

$$\iota_k(G) \leq 1 + \iota_k(G_2) \leq \frac{|V(G_1)|}{k+3} + \frac{|V(G_2)|}{k+3} = \frac{n}{k+3}$$

若 G_2 是单圈图, 则 G_1 是一棵树即 $T(x_3)$, 满足

$$\iota_k(G_1) \leq \frac{|V(G_1)|}{k+3}$$

若 $\text{diam}(G_2) \leq 2$, 则 x_3 是 G 的 k -孤立集, 结论成立; 若 $\text{diam}(G_2) \geq 3$, 则 $G_2 \notin \mathcal{Z}_1$, 由归纳假设

$$\iota_k(G_2) \leq \frac{|V(G_2)|}{k+3}$$

取 G_2 的最小 k -孤立集 I , 则 $I \cup \{x_3\}$ 是 G 的 k -孤立集, 于是

$$\iota_k(G) \leq 1 + |I| \leq \frac{|V(G_1)|}{k+3} + \frac{|V(G_2)|}{k+3} = \frac{n}{k+3}$$

综上, 不等式得证。

为证明紧性, 按定义 2 构造单圈图族 $\mathcal{U}_2$ 。由图 3、图 4 的结构可知, 路径 P 或 G_0 的顶点集即构成 G 的一个 k -孤立集; 同时, 任何 k -孤立集必须至少从每个 $K_{1,k+1}$ 中各取一个顶点。因此,

$$t_k(G) = t = \frac{n}{k+3}$$

因此界是紧的。

如果 $G \in \mathcal{U}_2$, 那么取最上层的顶点集合就是图 G 的一个最小 k -孤立集, 所以有以下命题。

命题 1. 如果 G 是一个 n 阶图, 并且 $G \in \mathcal{U}_2$, 那么

$$t_k(G) = \frac{n}{k+3}。$$

4. 双圈图的上界

对于一个连通图 G , 若图 G 满足 $|E(G)| = |V(G)| + 1$, 则称 G 为**双圈图**, 即是具有两个圈的连通图。设 $B(G)$ 是 G 的一个双圈子图且 $B(G)$ 不含悬挂点, 则称 $B(G)$ 为双圈图 G 的基图。注意到, 根据两个圈之间的连接方式, 双圈图主要可分为以下三种基本结构类型: ∞ -图、哑铃图和 θ -图, 即分别对应于图中的: $B_1(p, q)$ ($p \geq 3, q \geq 3$); $B_2(p, l, q)$ (其中 (p, l, q) 中至少有两个大于或等于 2); $B_3(p_s, p_l, p_m)$ ($s \geq 3, l \geq 3, m \geq 1$)。有时简写为 B_1, B_2, B_3 。

1. 两个圈共享一个公共点: $B_1(p, q)$

这种结构中, 两个圈 C_p 和 C_q 恰好有一个公共顶点, 形如 “ ∞ ” 字形。记作: $B_1(p, q)$ 。 ∞ -图的特点是两个圈在一点相交, 其他部分互不相交。如图 5。

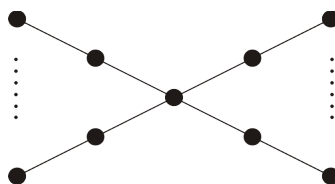


Figure 5. $B_1(p, q)$

图 5. $B_1(p, q)$

2. 两个圈通过一条路径连接: $B_2(p, l, q)$

两个圈 C_p 和 C_q 之间通过一条长度至少为 1 的路径相连, 路径的两个端点分别位于两个圈上。记作: $B_2(p, l, q)$, 其中 l 是连接路径的长度。 θ -图的特点是两个圈不直接相交, 而是通过一条 “桥” 连接。如图 6。

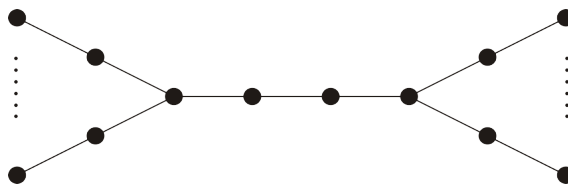


Figure 6. $B_2(p, l, q)$

图 6. $B_2(p, l, q)$

3. 三条内部不相交的路径连接两个点: $B_3(P_s, P_l, P_m)$

这种结构由两个顶点 x 和 y 通过三条内部不相交的路径连接而成, 形成一个“ θ ”形状。记作: $B_3(P_s, P_l, P_m)$, 其中 $m \leq \min\{s, l\}$ 。 θ -图的特点是两个顶点之间有三条不同的路径, 形成一个闭合结构, 包含两个圈。如图 7。

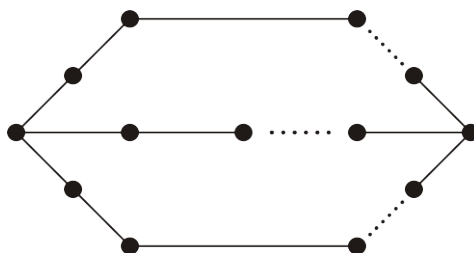


Figure 7. $B_3(P_s, P_l, P_m)$

图 7. $B_3(P_s, P_l, P_m)$

这三种结构构成了所有不含悬挂点的双圈图的基本类型, 且彼此互斥, 共同覆盖了所有可能的双圈图结构。

定义 3. 对于整数 $k \geq 3$, 定义双圈图族 $\mathcal{U}_3$ 如下:

顶点集 $V(\mathcal{U}_3) = V(K_{1,k+1})$, 边集 $E(\mathcal{U}_3) = E(K_{1,k+1}) \cup \{e_1, e_2\}$, 其中 e_1, e_2 为在 $K_{1,k+1}$ 的叶子点之间添加的两条不同的边。

该图阶数为 $k+2$, 恰含一个支撑顶点, 且该支撑顶点本身即构成 $\mathcal{U}_3$ 的一个 k -孤立集, 故 $t_k(\mathcal{U}_3) = 1$ 。

定义 4. 对于整数 $k \geq 3$, 定义双圈图族 $\mathcal{U}_4$ 如下:

顶点集 $V(\mathcal{U}_4) = V(\mathcal{T})$, 边集 $E(\mathcal{U}_4) = E(\mathcal{T}) \cup \{e_1, e_2\}$, 其中 e_1, e_2 为在 $\mathcal{T}$ 的任意两点之间添加的两条不同的新边使之构成双圈图。

双圈图族 $\mathcal{U}_4$ 的构造方式分三种, 第一种是将 $K_{1,k+1}$ 的叶子点依次与 B_1, B_2, B_3 的每个顶点相连, 第二种是在 $\mathcal{T}$ 上加任意两条边构成双圈图族 $\mathcal{U}_4$, 第三种是对于任一个单圈图 G_0 , 将 $\mathcal{U}_1$ 的顶点与 G_0 的一个顶点通过一条边相连, 再将 $K_{1,k+1}$ 的叶子点与 G_0 剩下的每一个顶点通过一条边相连。

定理 7. 如果 G 是 n 阶不同构于 $\mathcal{U}_3$ 的双圈图, 则 $t_k(G) \leq n/(k+3)$, 且这个界是紧的。

证明. 对 G 的顶点数进行归纳。令 D 是 G 的一个最小的 k -孤立集。当 $n \leq k+2$ 时, G 中不存在同构于 $\mathcal{U}_3$ 的子图, 故 $t_k(G) = 0 \leq n/(k+3)$ 成立。

现设 $n \geq k+3$, 且对任意阶数小于 n 且不同构于 $\mathcal{U}_3$ 的双圈图结论成立。

情形 1: G 存在支撑顶点 v 满足 $d(v) \geq k+2$ 。由引理 1 得

$$t_k(G) \leq \frac{n}{k+3}$$

结论显然成立。

情形 2: G 的所有支撑顶点的度数均等于 $k+1$ 。

此时 G 的直径至少为 3, 否则 G 将成为 $\mathcal{U}_3$, 与假设矛盾。取直径路径 $P = x_0 x_1 x_2 \cdots x_d$ ($d \geq 3$)。若 $d = 3$, 则 x_1 即为 k -孤立集, 且

$$t_k(G) = 1 \leq \frac{n}{k+3}$$

设 $d \geq 4$ 。若 x_3x_4 属于圈中任意一条边即 $x_3x_4 \in E(C)$, 删去边 x_3x_4 得到单圈图 G'' 满足

$$t_k(G'') \leq \frac{n}{k+3}$$

又因为所有支撑顶点度数为 $k+1$, 则 x_2 属于 k -孤立集, 且 x_3x_4 是图 G 的一条边, 若 D 是 $G - \{x_3x_4\}$ 的一个 k -孤立集, 那么 x_3x_4 的至少一个端点属于 $N[D]$, D 也是 G 的 k -孤立集。于是

$$t_k(G) = t_k(G'') \leq \frac{n}{k+3}$$

若 x_3x_4 不属于圈中任意一条边即 $x_3x_4 \notin E(C)$, 那么删去边 x_3x_4 得到两个图 G_1 和 G_2 , 且 $x_3 \in G_1$, $x_4 \in G_2$ 。

若 G_1 是双圈图, 则 G_2 是一棵树即 $T(x_4)$, 满足

$$t_k(G_2) \leq \frac{|V(G_2)|}{k+3}$$

由于所有支撑顶点度数为 $k+1$, G_1 至少有 $k+3$ 个顶点, 则 x_3 是 G_1 的 k -孤立集。那么

$$t_k(G) \leq 1 + t_k(G_2) \leq \frac{|V(G_1)|}{k+3} + \frac{|V(G_2)|}{k+3} = \frac{n}{k+3}$$

若 G_2 是双圈图, 则 G_1 是一棵树即 $T(x_3)$, 满足

$$t_k(G_1) \leq \frac{|V(G_1)|}{k+3}$$

若 $\dim(G_2) \leq 2$, 则 x_3 是 G 的 k -孤立集, 结论成立; 若 $\dim(G_2) \geq 3$, 则 $G' \notin \mathcal{U}_3$, 由归纳假设

$$t_k(G_2) \leq \frac{|V(G_2)|}{k+3}$$

取 G_2 的最小 k -孤立集 I , 则 $I \cup \{x_3\}$ 是 G 的 k -孤立集, 于是

$$t_k(G) \leq 1 + |I| \leq \frac{|V(G_1)|}{k+3} + \frac{|V(G_2)|}{k+3} = \frac{n}{k+3}$$

若 G_1 是单圈图, 则 G_2 也是单圈图, G_1 至少有 $k+3$ 个顶点, 则 x_3 是 G_1 的 k -孤立集, $x_3x_4 \in E(N[D])$ 。又由于所有支撑顶点度数为 $k+1$, 那么

$$t_k(G) \leq 1 + t_k(G_2) \leq \frac{|V(G_1)|}{k+3} + \frac{|V(G_2)|}{k+3} = \frac{n}{k+3}$$

综上, 不等式得证。

此外, 为证明紧性, 按定义 4 构造双圈图族 $\mathcal{U}_4$ 。由构造可知, B_1, B_2, B_3 或路径 P 或 G_0 的顶点集即构成 G 的一个 k -孤立集, 且任何 k -孤立集必须至少从每个 $K_{1,k+1}$ 中各取一个顶点。因此,

$$t_k(\mathcal{U}_4) = t = \frac{n}{k+3}$$

因此界是紧的。

如果 $G \in \mathcal{U}_4$, 那么取最上层的顶点集合就是图 G 的一个最小 k -孤立集, 所以有以下命题。

命题 2. 如果 G 是一个 n 阶图, 并且 $G \in \mathcal{U}_4$, 那么

$$t_k(G) = \frac{n}{k+3}。$$

5. 开放性问题与未来展望

尽管本文给出了单圈图与双圈图 k -孤立数的紧上界, 但 k -孤立理论整体上仍处于起步阶段, 大量结构性与算法性的问题尚待解决。下面给出 5 个开放性问题, 供后续研究参考。

问题 1. 如果 G 是 n 阶连通图, 则 k -孤立数的上界是多少?

问题 2. 若 G 为最大度不超过 t 的图。给定 $k, t \in N$, 是否存在仅依赖于 k 与 t 的常数 $c(k, t)$, 使得

$$i_k(G) \leq c(k, t) \cdot \frac{n}{k+1}$$

对任意 $G \in \mathcal{G}_t$ 成立?

问题 3. 对固定 $k \geq 1$, 给定图 G 与整数 s , 判定 $i_k(G) \leq s$ 的问题是否为 NP-完全?

问题 4. 对经典的随机图 $\mathcal{G}(n, p)$ 问题, 研究 $i_k(\mathcal{G}(n, p))$ 的渐近阈值函数。

问题 5. 对两个任意图 G, H , $i_k(G \square H), i_k(G), i_k(H)$ 之间是否存在关系?

若是突破上述问题, 不仅会丰富图控制与孤立理论本身, 也将为网络鲁棒性、动态监测与信息传播阻断等实际应用提供新的理论支撑。

6. 总结

本文主要围绕单、双圈图的 k -孤立数展开研究, 给出了该参数的一个紧上界。通过引入 k -孤立集的定义, 并结合图的结构特征, 本文证明了对于任意一个 n 阶不同构于 $\mathcal{U}_2$ 的单圈图和不同构于 $\mathcal{U}_4$ 的双圈图, 其 k -孤立数满足 $i_k(G) \leq n/(k+3)$, 并且该上界是紧的, 最后提出了一些开放性问题和未来的研究方向。本文的研究不仅丰富了图的控制理论与孤立理论的内容, 也为进一步研究其他图类的 k -孤立数提供了思路和方法, 未来的工作可以拓展到更一般的图类, 如仙人掌图、随机图或具有特定度限制的图, 探讨其孤立数的界与结构特征之间的关系, 并结合算法设计与实际应用, 推动图论理论与网络科学的深度融合。

参考文献

- [1] Ore, O. (1962) Theory of Graphs. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/coll/038>
- [2] Payan, C. and Xuong, N.H. (1982) Domination-Balanced Graphs. *Journal of Graph Theory*, **6**, 23-32. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190060104>
- [3] Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater, P.J. (1998) Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker.
- [4] Caro, Y. and Hansberg, A. (2017) Partial Domination—The Isolation Number of a Graph. *Filomat*, **31**, 3925-3944. <https://doi.org/10.2298/fil1712925c>
- [5] 张刚. 图的 $K_{1,2}$ 孤立[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2021.
- [6] Lewis, J.R., Hedetniemi, S.T., Haynes, T.W. and Fricke, G.H. (2010) Vertex-Edge Domination. *Utilitas Mathematica*, **81**, 193-213.
- [7] Canales, S., Hernández, G., Martins, M. and Matos, I. (2015) Distance Domination, Guarding and Covering of Maximal Outerplanar Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **181**, 41-49. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.08.040>
- [8] Cozzens, M.B. and Wu, S.-S.Y. (1996) Vertex-Neighbor-Integrity of Trees. *Ars Combinatoria*, **43**, 169-180.
- [9] Żyliński, P. (2019) Vertex-Edge Domination in Graphs. *Aequationes Mathematicae*, **93**, 735-742. <https://doi.org/10.1007/s00010-018-0609-9>
- [10] Lemańska, M., Mora, M. and Souto-Salorio, M.J. (2024) Graphs with Isolation Number Equal to One Third of the Order. *Discrete Mathematics*, **347**, Article 113903. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.113903>
- [11] Boyer, G. and Goddard, W. (2024) Disjoint Isolating Sets and Graphs with Maximum Isolation Number. *Discrete Applied Mathematics*, **356**, 110-116. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.05.022>
- [12] Huang, Y., Zhang, G. and Jin, X. (2026) New Results on the 1-Isolation Number of Graphs without Short Cycles. *Discrete Applied Mathematics*, **379**, 222-235. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.08.033>

- [13] Bartolo, K., Borg, P. and Scieluna, D. (2024) Solution to a 3-Path Isolation Problem for Subcubic Graphs. arXiv:2501.00419.
- [14] Fink, J.F., Jacobson, M.S., Kinch, L.F. and Roberts, J. (1985) On Graphs Having Domination Number Half Their Order. *Periodica Mathematica Hungarica*, **16**, 287-293. <https://doi.org/10.1007/bf01848079>