

带耗散项RLW方程的高阶有限差分算法

贺明娟¹, 苏 登¹, 王桂霞^{1,2,3*}

¹内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特

²内蒙古自治区应用数学中心, 内蒙古 呼和浩特

³无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2025年12月7日; 录用日期: 2026年1月1日; 发布日期: 2026年1月12日

摘 要

为了利用非线性RLW方程的初边值问题进行数值模拟研究, 首先构造高阶守恒型紧致有限差分格式, 对时间方向的导数采用隐中点格式进行离散, 对空间方向的各阶导数用逆紧致算子进行离散, 使其在时间方向上的精度达到二阶, 在空间方向上的精度达到六阶。进一步, 对差分格式进行守恒性证明、先验估计及收敛性分析。最后, 通过数值算例验证理论的正确性和格式的有效性与可靠性。

关键词

RLW方程, 紧致差分格式, 守恒性, 收敛性, 误差估计

High-Order Finite Difference Algorithm for RLW Equation with Dissipation Term

Mingjuan He¹, Deng Su¹, Guixia Wang^{1,2,3*}

¹College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

²Inner Mongolia Center for Applied Mathematical Science, Hohhot Inner Mongolia

³Key Laboratory of Infinite Dimensional Hamiltonian System and Its Algorithm Application, Ministry of Education, Hohhot Inner Mongolia

Received: December 7, 2025; accepted: January 1, 2026; published: January 12, 2026

Abstract

To conduct numerical simulation research on the initial-boundary value problem of the nonlinear RLW equation, a high-order conservative compact finite difference scheme is first constructed. The derivative in the time direction is discretized using the implicit mid-point scheme, and the derivatives

*通讯作者。

of each order in the spatial direction are discretized using the inverse compact operator, achieving second-order accuracy in the time direction and sixth-order accuracy in the spatial direction. Further, the conservation property of the difference scheme is proved, a priori estimates are made, and the convergence analysis is carried out. Finally, the correctness of the theory and the effectiveness and reliability of the scheme are verified through numerical examples.

Keywords

RLW Equation, Compact Difference Scheme, Conservation, Convergence, Error Estimation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1966 年, Peregrine [1] 在研究水波问题时首次提出非线性正则长波(RLW)方程(也称为 BBM 方程)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xx} = 0, \quad (1)$$

该方程与非线性 KdV 方程

$$u_t + c_0 u_x + \beta u u_x + \gamma u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

所描述的运动相似, 能够描述浅水域中的弱非线性孤立波的演化过程。目前求解非线性 RLW 型方程的数值方法主要包括物理信息神经网络(PINN)方法、有限元法及(紧致)有限差分法, 成果丰富[2]-[10]。紧致有限差分格式计算量较小, 仅用 3~5 点模板即可达到四到六阶精度, 适合求解数值耗散误差敏感、求解区域规则的问题。

本文研究 RLW 方程的初边值问题

$$\begin{aligned} u_t + (c_0 + \beta u + \sigma u^2) u_x + \varepsilon u_{xxx} + \gamma u &= 0, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T], \\ u(a, t) &= u(b, t), \quad u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [a, b], \end{aligned} \quad (3)$$

其中, c_0 为相速度, β, σ 分别为低阶非线性项系数和高阶非线性项系数, ε 为涡动系数, γ 为耗散项系数。此非线性初边值问题的解析解比较困难, 用数值方法研究该问题的解显得尤为重要。

全文结构如下: 第 2 节引入一些相关的算子符号, 列出相关的定义和引理。第 3 节构造方程的有限差分格式, 对时间方向一阶导数采用隐中点格式进行离散, 分别对空间方向的各阶导数用六阶逆紧致算子进行离散验证差分格式的守恒律, 对格式进行先验估计与收敛性分析。第 4 节给出一些数值实例。

如果没有特殊说明, 本文对求解区域 $x \in [a, b]$, $t \in [0, T]$ 进行网格剖分, 取时间步长 $\tau = T/N$, 空间步长 $h = (b-a)/J$, 其中 J, N 为正整数。记网格点 $x_j = a + jh$, $(0 \leq j \leq J)$, $t_n = n\tau$, $(0 \leq n \leq N)$ 。用 u_j^n 表示 $u(x, t)$ 在网格 (x_j, t_n) 处的近似值, $I_h = \{x_0, x_1, \dots, x_J\}$ 表示区间 I 上的节点集合。 Z_h 表示在离散网格点上定义的函数集合, 用 U_j^n 表示网格点 (x_j, t_n) 处的精确值。 H_E^1 表示定义在 I_h 上的一组网格函数 u , 满足 $u(x_0, t_n) = u(x_1, t_n) = u(x_{J-1}, t_n) = u(x_J, t_n)$ 。约定 M, C_1 及 C_2 为一般正常数, 即在不同处有不同的取值。

2. 差分格式的构造

为了方便后续内容的叙述, 引入记号

$$D_t^{\frac{\gamma}{2}} u^n = \frac{e^{\frac{\gamma}{2}\tau} u^{n+1} - e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} u^n}{\tau}, \quad A_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j = \frac{e^{\frac{\gamma}{2}\tau} u^{n+1} + e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} u^n}{2} \quad (4)$$

当 $\gamma=0$ 时, 这些算子退化为标准算子。

定义算子 P_x 、 Q_x 使得

$$P_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n + 3u_j^n + u_{j-1}^n}{3}, \quad Q_x u_j^n = \frac{2u_{j+1}^n + 11u_j^n + 2u_{j-1}^n}{11}, \quad (5)$$

满足

$$P_x \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n = \delta_x^1 U_j^n + O(h^6), \quad Q_x \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n = \delta_x^2 U_j^n + O(h^6). \quad (6)$$

由式(5)可知 P_x 、 Q_x 是对角占优的, 所以可逆, 从而有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n = P_x^{-1} \delta_x^1 U_j^n + O(h^6), \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n = Q_x^{-1} \delta_x^2 U_j^n + O(h^6). \quad (7)$$

U 关于 x 的各阶导数可表示为如下的矩阵形式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n = D_1 U^n + O(h^6), \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n = D_2 U^n + O(h^6). \quad (8)$$

其中

$$U^n = (U_0^n, \dots, U_J^n)^T, \quad D_1 = P_x^{-1} \delta_x^1, \quad D_2 = Q_x^{-1} \delta_x^2.$$

基于 **Strange** 分裂, 将问题(3)中的控制方程分裂为方程

$$u_t = -(c_0 + \beta u + \sigma u^2) u_x - \varepsilon u_{xxt}, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T], \quad (9)$$

和方程

$$u_t = -\gamma u, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T]. \quad (10)$$

对第一个方程, 时间方向的一阶导数采用隐中点格式进行离散, 空间方向各阶导数用六阶紧致差分格式进行离散, 记 $u^{n+1} = \xi_\tau(u^n)$ 。第二个方程容易求得解析解, 记 $u^{n+1} = \phi_\tau(u^n) = e^{-\gamma\tau}(u^n)$, 两个方程解的组合 $\phi_{\tau/2} \circ \xi_\tau \circ \phi_{\tau/2}$ 即为原方程的解。

对由方程(9)和方程(10)构成的方程组在网格点 $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$ 处进行离散, 其离散方程组为

$$\begin{cases} u_t(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) = -(c_0 u_x(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) + \sigma(u^2 u_x)(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) + \beta(u u_x)(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) + \varepsilon u_{xxt}(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})) \\ u_t(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) = -\gamma u(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}). \end{cases} \quad (11)$$

对方程组(11)式中的第一个方程在时间方向用隐中点格式离散, 在空间方向用六阶紧致差分格式离散得差分方程

$$r_j^n + D_t^{\frac{\gamma}{2}} U_j^{n+\frac{1}{2}} + c_0 \left(D_1 A_t^{\frac{\gamma}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + \frac{1}{2} \beta \left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right)_j + \frac{1}{3} \sigma \left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)^3 \right)_j + \varepsilon \left(D_2 D_t^{\frac{\gamma}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)_j = 0, \quad (12)$$

其中 r_j^n 为截断误差。再用数值解 u_j^n 近似代替精确解 U_j^n 并忽略高阶小项, 即可得问题(3)的六阶紧致差分格式:

$$\begin{aligned}
 & D_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} + c_0 \left(D_1 A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + \frac{1}{3} \sigma \left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j^3 \right) + \frac{1}{2} \beta \left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j^2 \right) + \varepsilon \left(D_t^{\frac{\gamma}{2}} D_2 u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j = 0, \\
 & 1 \leq j \leq J-1, 0 < n \leq N-1, \\
 & D_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} = -\gamma A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}}, 1 \leq j \leq J-1, 0 < n \leq N-1, \\
 & u_0^n = u_j^n, 0 < n \leq N-1, \\
 & \left(D_1 A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_0 = \left(D_1 A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_J = 0, \\
 & u_j^0 = u_0(x_j), 1 \leq j \leq J-1,
 \end{aligned} \tag{13}$$

由对 D_1 , D_2 , D_3 及 A_t 和 δ_t 的构造易知 r_j^n 的误差阶为 $O(\tau^2 + h^6)$ 。

下面给出相关的定义和引理。

定义 1 对于任意的两个网格函数 $f^n, g^n \in Z_h$, 定义如下的离散内积和范数:

$$(f^n, g^n) = h \sum_{j=1}^{J-1} f_j^n g_j^n, \|f^n\| = \sqrt{(f^n, f^n)}, \|f^n\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq J-1} |f_j^n|.$$

经过简单推导很容易得到下列结论。

引理 1 对任意的两个网格函数 $u^n, \rho^n \in Z_h$, 有

$$(P_x^{-1} \delta_x^1 u^n, \rho^n) = -(u^n, P_x^{-1} \delta_x^1 \rho^n),$$

特别地,

$$(P_x^{-1} \delta_x^1 u^n, u^n) = 0.$$

引理 2 对任意的两个网格函数 $u^n, \rho^n \in Z_h$, 有

$$(Q_x^{-1} \delta_x^2 (u^n - \rho^n), u^n + \rho^n) = -(\|P_x^{-1} \delta_x^1 u^n\|^2 - \|P_x^{-1} \delta_x^1 \rho^n\|^2).$$

3. 先验估计与收敛性分析

3.1. 离散格式的守恒律

下面给出离散格式满足的能量守恒律和质量守恒律。

定理 1 定义能量和质量分别为

$$E^n = e^{-2\gamma\tau} \|u^n\|^2 - \varepsilon e^{-2\gamma\tau} \|D_1 u^n\|^2, Q^n = e^{-\gamma\tau} h \sum_{j=0}^J u_j^n. \tag{14}$$

对于任意的 $n \geq 0$, 格式(14)满足离散的能量和质量衰减律, 即

$$E^{n+1} = e^{-2\gamma\tau} E^n, Q^{n+1} = e^{-\gamma\tau} Q^n. \tag{15}$$

证明 用 $A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}}$ 与式(13)作内积可得

$$\begin{aligned}
 & \left(D_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}}, A_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} \right) + c_0 \left(\left(D_1 A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j, A_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{3} \sigma \left(\left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j^3 \right), A_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \beta \left(\left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j^2 \right), A_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} \right) + \varepsilon \left(\left(D_t^{\frac{\gamma}{2}} D_2 u^{n+\frac{1}{2}} \right)_j, A_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{16}$$

由定义 1, 引理 1 及引理 2 可得

$$e^{\gamma\tau} \|u^{n+1}\|^2 - \varepsilon e^{\gamma\tau} \|D_1 u^{n+1}\|^2 = e^{-\gamma\tau} \|u^n\|^2 - \varepsilon e^{-\gamma\tau} \|D_1 u^n\|^2,$$

由 E^n 的定义可知, $E^{n+1} = e^{-2\gamma\tau} E^n$ 。

接下来证明 $Q^{n+1} = e^{-\gamma\tau} Q^n$ 。由式(13)可得

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=0}^J \frac{e^{\frac{\gamma\tau}{2}} u_j^{n+1} - e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} u_j^n}{\tau} + c_0 h \sum_{j=0}^J A_t^{\frac{\gamma}{2}} P_x^{-1} \delta_x^1 u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \beta h \sum_{j=0}^J A_t^{\frac{\gamma}{2}} P_x^{-1} \delta_x^1 \left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \\ & + \frac{1}{3} \sigma h \sum_{j=0}^J A_t^{\frac{\gamma}{2}} P_x^{-1} \delta_x^1 \left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^3 + \varepsilon h \sum_{j=0}^J D_t^{\frac{\gamma}{2}} Q_x^{-1} \delta_x^2 u_j^{n+\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

再由边界条件整理可得

$$h \sum_{j=0}^J u_j^{n+1} = h \sum_{j=0}^J e^{-\gamma\tau} u_j^n.$$

由 Q^n 的定义可知 $Q^{n+1} = e^{-\gamma\tau} Q^n$ 。

3.2. 先验估计与收敛性分析

定理 2 假设 $U_0 \in H_E^1[a, b]$, 则问题(3)的精确解 U 满足

$$\|U\| \leq M, \quad \|U_x\| \leq M.$$

证明 结合定理 1 经简单推导可得。

定理 3 假设 $u_0 \in H_E^1[a, b]$, 则格式(14)的数值解 u^n 满足

$$\|u^n\| \leq M, \quad \|D_t^{\frac{\gamma}{2}} u^n\| \leq M, \quad \|u^n\|_{\infty} \leq M.$$

证明 由定理 1 经过推导易得。

定理 4 设初始条件 $u^0 \in H_E^1[a, b]$, 则差分格式(14)的数值解 u^n 以 $\|\cdot\|$ 收敛到初边值问题(3)的精确解 U^n , 且收敛阶为 $O(\tau^2 + h^6)$ 。

证明 因为 U^n 是初边值问题(3)的精确解, 故令 $A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^n = A_t^{\frac{\gamma}{2}} u_j^n - A_t^{\frac{\gamma}{2}} U_j^n$, 由式(13)减式(12)得

$$\begin{aligned} r_j^n &= D_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} + c_0 \left(D_1 A_t^{\frac{\gamma}{2}} e^{n+\frac{1}{2}} \right)_j + \frac{1}{2} \beta \left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right)_j - \frac{1}{2} \beta \left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right)_j \\ &+ \frac{1}{3} \sigma \left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)^3 \right)_j - \frac{1}{3} \sigma \left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)^3 \right)_j + \varepsilon \left(D_2 D_t^{\frac{\gamma}{2}} e^{n+\frac{1}{2}} \right)_j, \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)与 $A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积, 可得

$$\begin{aligned} \left(r_j^n, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \left(D_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}}, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \right) + c_0 \left(\left(D_1 A_t^{\frac{\gamma}{2}} e^{n+\frac{1}{2}} \right)_j, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \beta \left(\left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right)_j, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \beta \left(\left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right)_j, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \frac{1}{3} \sigma \left(\left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} \right)^3 \right)_j, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{3} \sigma \left(\left(D_1 \left(A_t^{\frac{\gamma}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \right)^3 \right)_j, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \varepsilon \left(\left(D_2 D_t^{\frac{\gamma}{2}} e^{n+\frac{1}{2}} \right)_j, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

考虑到 D_1, D_3 是反对称矩阵, 令矩阵 D_2 的最小特征值为 M , 则有

$$\left(r_j^n, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}}\right) \leq \|r^n\| \frac{e^{\gamma\tau} \|e^{n+1}\| + e^{-\gamma\tau} \|e^{n+1}\|}{2}, \quad (20)$$

而

$$\left(r_j^n, A_t^{\frac{\gamma}{2}} e_j^{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\tau} \left(e^{\gamma\tau} \|e^{n+1}\|^2 - e^{-\gamma\tau} \|e^n\|^2\right) + \left(D_2 A_t^{\frac{\gamma}{2}} e^{n+\frac{1}{2}}\right)_j, \quad (21)$$

整理得

$$(1 + \varepsilon M) \frac{1}{\tau} \left(e^{\gamma\tau} \|e^{n+1}\| - e^{-\gamma\tau} \|e^n\|\right) \leq \frac{1}{2} \|r^n\|, \quad (22)$$

对式(22)中的 n 从 0 到 $N-1$ 求和, 则有

$$e^{\gamma\tau} \|e^N\| \leq e^{-\gamma\tau} \|e^0\| + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tau}{2(1 + \varepsilon M)} \|r^n\|. \quad (23)$$

假设 $\|e^0\| = 0$, 根据

$$\tau \sum_{n=0}^{N-1} \|r^n\| \leq N\tau \max_{0 \leq n \leq N-1} \|r^n\| = T \cdot O(h^6 + \tau^2), \quad (24)$$

可得

$$\|e^N\| \leq \frac{T}{2(1 + \varepsilon M)} \cdot O(h^6 + \tau^2). \quad (25)$$

即, 差分格式(13)的数值解 u^n 以 $\|\cdot\|$ 收敛到初边值问题(3)的精确解 U^n , 且收敛阶为 $O(\tau^2 + h^6)$ 。

由 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 的等价性可知, 数值解 u^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到精确解 U^n , 且收敛阶为 $O(\tau^2 + h^6)$ 。

4. 数值实例

定义 2 记能量和质量分别为

$$E^n = e^{-2\gamma\tau} h \sum_{j=0}^{N-1} \left((u^n)_j^2 - \varepsilon (D_1 u^n)_j^2 \right), \quad Q^n = e^{-\gamma\tau} h \sum_{j=0}^{N-1} u_j^n.$$

时间方向上与空间方向上的收敛阶如下

$$Order_t = \log_{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \frac{err(\tau_1)}{err(\tau_2)}, \quad Order_h = \log_{\frac{h_1}{h_2}} \frac{err(h_1)}{err(h_2)},$$

其中

$$err(\tau, h) = \max_{0 \leq n \leq N} \|u^n - U^n\|.$$

算例 4.1 考虑用 RLW 方程

$$\begin{aligned} u_t + c_0 u_x + \beta u u_x + \sigma u^2 u_x + \varepsilon u_{xxt} &= 0, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T], \\ u(a, t) &= u(b, t), \quad u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [a, b] \end{aligned} \quad (26)$$

的初边值问题描述单波。

取 $c_0=1$, $\beta=1$, $\varepsilon=-1$, $\sigma=0$, 方程退化为 RLW 方程(2)。RLW 方程有解析解

$$u(x,t) = \operatorname{sech}^2\left(\left[\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}t\right]\right).$$

取 $x \in [-50, 50]$, $T=1$ 。时间方向上的收敛阶如表 1 所示, 空间方向上的收敛阶如表 2 所示。表 3 为不同格式下的误差比较。

Table 1. Numerical solution error and time convergence order ($h = 0.5$)

表 1. 数值解误差与时间收敛阶($h = 0.5$)

τ	$\ \cdot\ _\infty$ 误差	误差阶
0.5	0.0027	—
0.25	6.917e-04	1.9674
0.125	1.74164e-04	1.9897
0.0625	4.3906e-05	1.9879

Table 2. Numerical solution error and spatial convergence order ($\tau = 0.001$)

表 2. 数值解误差与空间收敛阶($\tau = 0.001$)

h	$\ \cdot\ _\infty$ 误差	误差阶
0.8	8.3389e-06	—
0.625	1.9453e-06	5.9028
0.5	4.8963e-07	6.1758
0.4	1.3000e-7	5.5429

Table 3. The comparison results of numerical errors of this paper's format with those of references [11]-[13] at $T = 1$ moment

表 3. 在 $T = 1$ 时刻本文格式与文献[11]-[13]的数值误差比较结果

文献	h	τ	$\ \cdot\ _\infty$ 误差
格式(13)	0.4	0.01	1.0179e-06
文献[11]	0.1	0.00625	1.2671e-06
文献[12]	0.1	0.00625	1.4205e-06
文献[13]	0.1	0.00625	1.1220e-04

由表 1 和表 2 可见, 时间方向具有二阶精度, 空间方向上具有六阶精度, 即数值结果与理论分析相一致, 验证了算法的有效性。由表 3 可见, 不需要太小步长即可达到更高精度, 说明格式(13)在计算效率方面有明显的优势。

算例 4.2 考虑带耗散项的 RLW 方程

$$\begin{aligned} u_t + c_0 u_x + \beta u u_x + \sigma u^2 u_x + \varepsilon u_{xx} + \gamma u &= 0, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T], \\ u(a, t) &= u(b, t), \quad u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [a, b] \end{aligned} \quad (27)$$

的初边值问题模拟海洋内孤立波。

假设海水分为上下两层，上层厚度 $h_1 = 100$ m，下层厚度 $h_2 = 300$ m，上层密度 $\rho_1 = 1025$ kg/m³，下层密度 $\rho_2 = 1025$ kg/m³。参照文献[14]，取 $\varepsilon = -2 \times 10^{-6}$ km²，各系数计算如下：

$$c_0 = \sqrt{\frac{gh_1h_2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1h_2 + \rho_2h_1}} = 1.621 \times 10^{-3} \text{ km/s}, \quad \beta = -\frac{3c_0}{2} \frac{\rho_1h_2^2 - \rho_2h_1^2}{\rho_1h_1h_2^2 + \rho_2h_2h_1^2} = -0.022 \text{ s}^{-1},$$

$$\sigma = -3 \frac{h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2}{h_1h_2} c_0 = -4.462 \times 10^{-4} \text{ km}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

取初始波

$$u(x, t) = a_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{4}x\right),$$

初始振幅 a_0 为 20 m， $a = -50$ km， $b = 50$ km， $T = 100$ ，空间步长 $h = 0.5$ ，时间步长 $\tau = 0.25$ 。分别取 $\gamma = 0.01$ 和 $\gamma = 0.005$ ，海洋内孤立波的演化过程及质量与能量随时间的变化如图 1~8 所示。

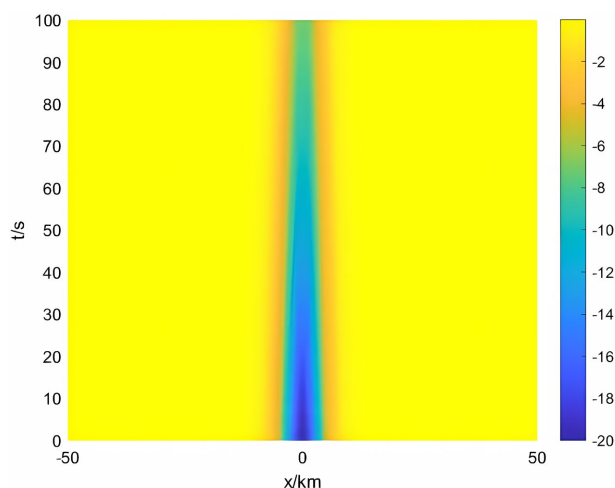


Figure 1. The propagation and evolution diagram of a single solitary wave ($\gamma = 0.01$)

图 1. 单孤立波传播演变图($\gamma = 0.01$)

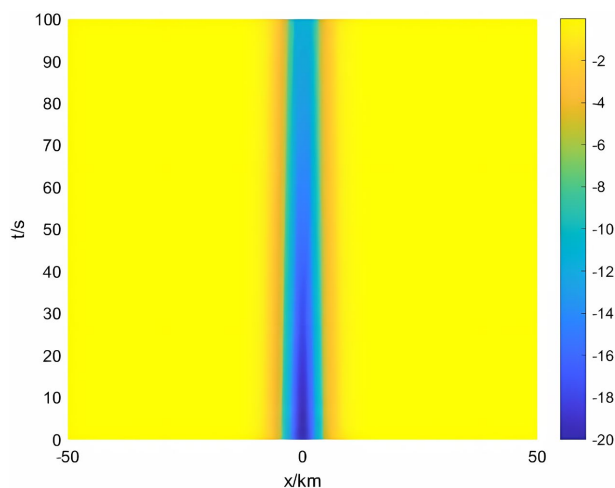


Figure 2. The propagation and evolution diagram of a single solitary wave ($\gamma = 0.005$)

图 2. 单孤立波传播演变图($\gamma = 0.005$)

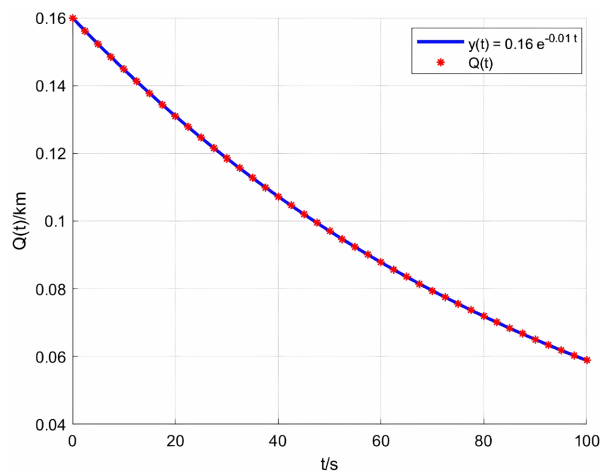


Figure 3. The numerical quality from $t = 0$ to $t = 100$ ($\gamma = 0.01$)
图 3. t 从 0 到 100 时的质量($\gamma = 0.01$)

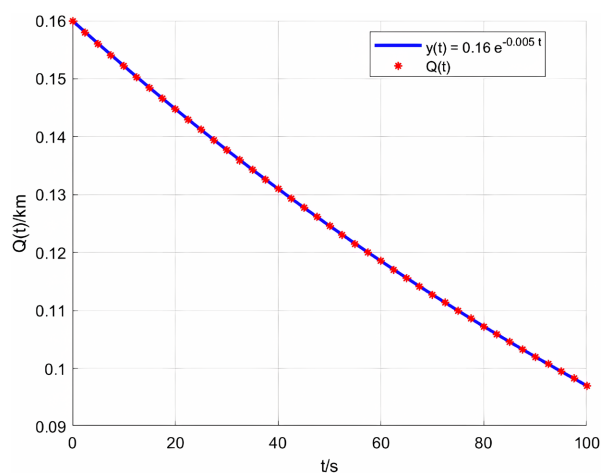


Figure 4. The numerical quality from $t = 0$ to $t = 100$ ($\gamma = 0.005$)
图 4. t 从 0 到 100 时的质量($\gamma = 0.005$)

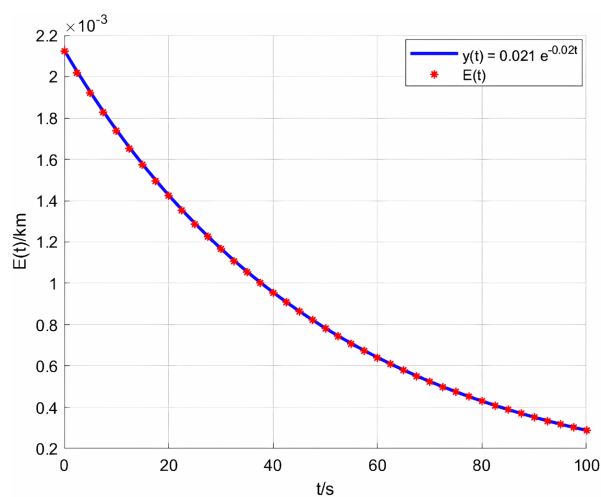


Figure 5. The numerical energy from $t = 0$ to $t = 100$ ($\gamma = 0.01$)
图 5. t 从 0 到 100 时的能量($\gamma = 0.01$)

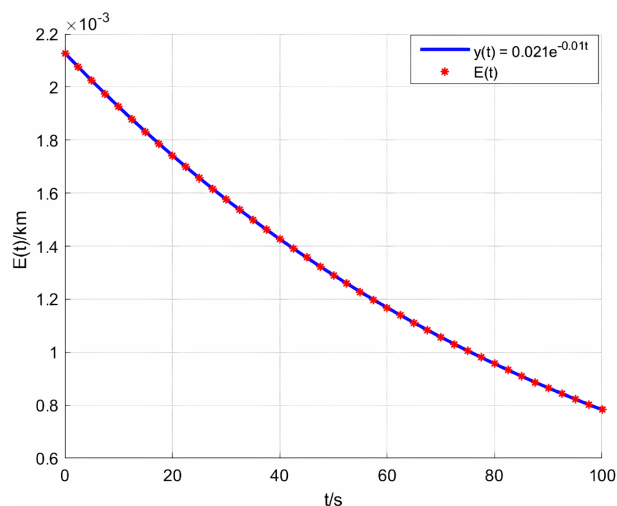


Figure 6. The numerical energy from $t = 0$ to $t = 100$ ($\gamma = 0.005$)

图 6. t 从 0 到 100 时的能量 ($\gamma = 0.005$)

如图 1 至图 2 所示, 随着耗散系数 γ 的减小, 海洋内孤立波的振幅在不断地增大。图 3 所示质量规律近似表示为 $y = 0.16e^{-0.01t}$, 图 4 所示质量规律近似表示为 $y = 0.16e^{-0.005t}$, 由图 3 和图 4 可见全局质量随时间呈指数衰减。图 5 所示能量规律近似表示为 $y = 0.021e^{-0.02t}$, 图 6 所示能量规律近似表示为 $y = 0.021e^{-0.01t}$, 表明全局能量随时间呈指数衰减。

算例 4.3 考虑用 RLW 方程

$$\begin{aligned} u_t + c_0 u_x + \beta u u_x + \sigma u^2 u_x + \varepsilon u_{xx} + \gamma u &= 0, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T], \\ u(a, t) &= u(b, t), \quad u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [a, b] \end{aligned}$$

的初边值问题描述双孤立波。选取初值条件为

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3c_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - x_j)),$$

其中 $C_j = 4k_j^2 / (1 - 4k_j^2)$, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.3$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$ 。

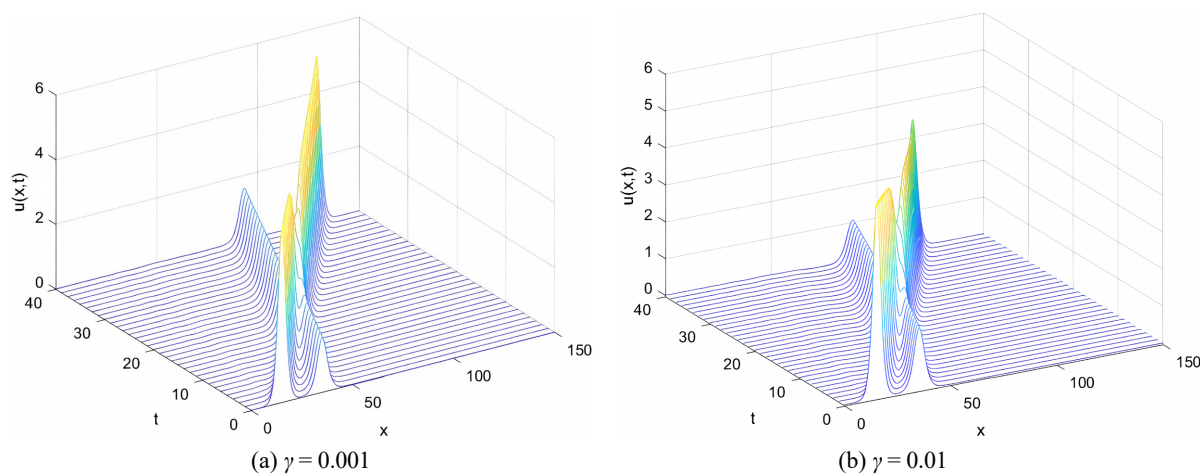


Figure 7. Three-dimensional graph of double waves varying with the dissipation term

图 7. 双波随耗散项变化的三维图

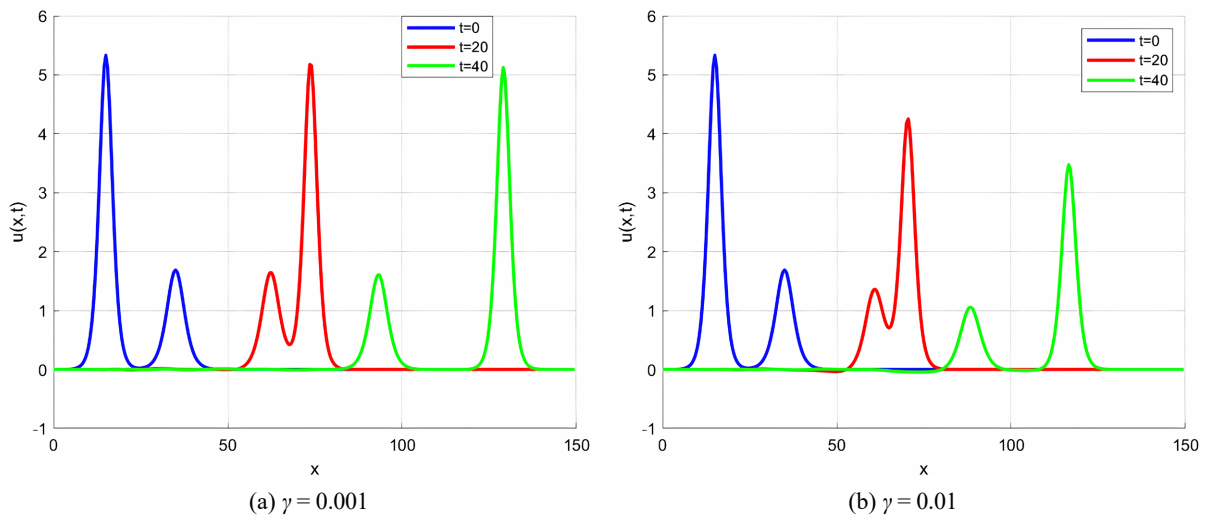


Figure 8. Two-dimensional graph of double waves varying with the dissipation term

图 8. 双波随耗散项变化的二维图

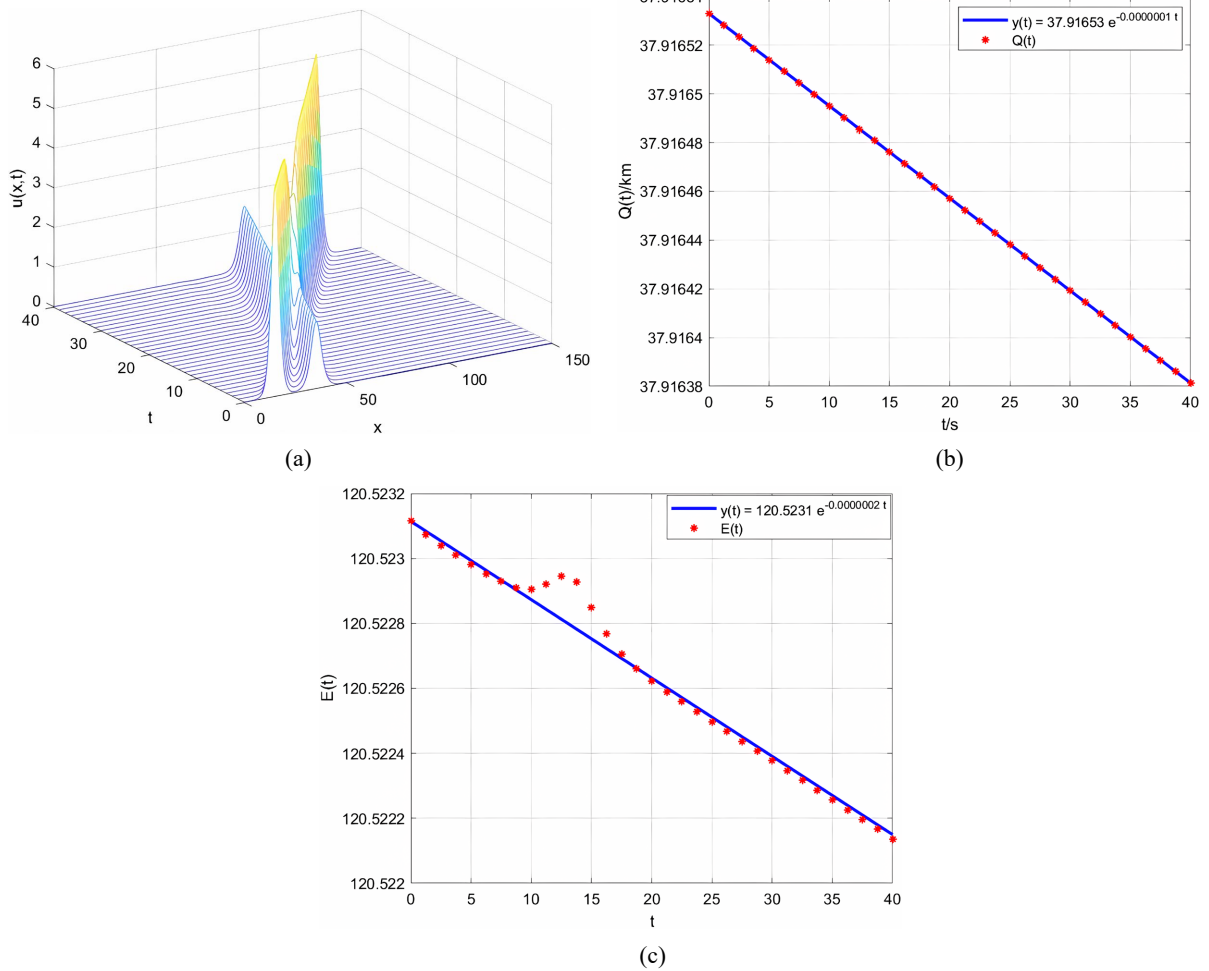


Figure 9. Numerical simulation of double isolated waves. (a) Evolution of double solitary waves; (b) The numerical quality from $t = 0$ to $t = 40$; (c) The numerical energy from $t = 0$ to $t = 40$

图 9. 双孤立波的数值模拟。(a) 双孤立波演化；(b) t 从 0 到 100 时的质量；(c) t 从 0 到 100 时的能量

取 $a=0$, $b=150$, $T=40$, 固定空间步长 $h=0.5$, 时间步长 $\tau=0.125$, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\sigma=0.01$, $\varepsilon=-1$ 。下面分别讨论耗散项对双波结果的影响。

观察图 7 和图 8 可见, 当耗散项 γ 增加时, 双波振幅减小, 传播速度减慢。为了便于直观观察, 取 $\sigma=0.005$, 耗散项系数为 $\gamma=1\times 10^{-7}$, 两波相撞前后波的演化过程、能量及质量随时间变化如图 9 所示。

由图 9(a)可见, 大振幅波传播速度快, 小振幅波速度慢, 大振幅波追上小振幅波后发生碰撞。碰撞瞬间, 大振幅波和小振幅波的振幅叠加。碰撞后, 两者均恢复至碰撞前的波形, 并继续维持各自的传播方向与特性。观察图 9(b), 由于耗散项的存在, 质量随时间的变化规律呈现 $y=37.916533e^{-10^{-7}t}$, 表明质量呈现指数衰减。观察图 9(c), 由于耗散项的存在, 能量也呈现衰减趋势, 在衰减的过程中, 由于两波相撞出现了能量干扰, 之后能量继续呈现指数衰减。

5. 小结

主要利用紧致差分格式研究带耗散项的高阶非线性 RLW 方程, 数值解在时间上达到二阶、在空间上达到六阶收敛精度。目前, 尚未发现带耗散项高阶 RLW 方程的初边值问题的精确解, 所以采用 Strange 分裂把原方程分裂为两个方程, 将两个解进行组合即可得到该方程的数值解, 在保证原有精度的基础上, 有效提升计算稳定性与可实施性。

通过带耗散项的 RLW 方程模拟浅水域海洋内孤立波, 结果显示: 当耗散项逐渐增大, 经过长时间传播演化, 振幅逐渐减小, 波的传播速度减慢, 符合实际的物理规律[15], 验证了算法的有效性与可靠性。同时, 模拟结果显示质量与能量随时间变化呈现指数耗散的情况, 这为刻画实际海洋环境中内孤立波的能量衰减、波形演变提供了依据。

事实上, 没有耗散且波形保持不变的理想孤立波在实际问题中是比较少见的, 该研究具有一定理论价值和实际意义。

基金项目

国家自然科学基金(62161045); 教育部重点实验室开放课题项目(2023KFZDO1); 内蒙古自治区自然科学基金(2023LHMS01007); 内蒙古自治区“揭榜挂帅”项目(2024JBGS0010-1); 内蒙古师范大学数学一流拔尖培育学科建设项目(2024YLKY19)。

参考文献

- [1] Peregrine, D.H. (1966) Calculations of the Development of an Undular Bore. *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, 321-330. <https://doi.org/10.1017/s0022112066001678>
- [2] Benjamin, B., Bona, L. and Mahony, J. (1972) Model Equations for Long Waves Nonlinear Dispersive System. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **272**, 47-48. <https://doi.org/10.1098/rsta.1972.0032>
- [3] 吕秀敏, 葛倩, 李金. 重心插值配点法求解小振幅长波广义 BBM-KdV 方程[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(8): 67-76.
- [4] 邱天威, 魏光美, 宋禹欣. 基于 PINN 方法的 KdV 类方程新孤子解的研究[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(1): 105-113.
- [5] 王一辰, 王桂霞, 李骞. 基于物理信息神经网络算法的海洋内孤立波研究[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学版), 2025, 54(2): 198-206.
- [6] 栗雪娟, 刘瑜欣. 基于 PINN 及其改进算法求解 KdV-mKdV 方程[J]. 浙江大学学报(理学版), 2024, 51(6): 702-711.
- [7] Li, S. (2018) Numerical Study of a Conservative Weighted Compact Difference Scheme for the Symmetric Regularized Long Wave Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **35**, 60-83. <https://doi.org/10.1002/num.22285>
- [8] He, Y., Wang, X., Cheng, H. and Deng, Y. (2022) Numerical Analysis of a High-Order Accurate Compact Finite Difference

- Scheme for the SRLW Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **418**, Article ID: 126837. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126837>
- [9] He, Y., Wang, X. and Zhong, R. (2022) A New Linearized Fourth-Order Conservative Compact Difference Scheme for the SRLW Equations. *Advances in Computational Mathematics*, **48**, Article No. 27. <https://doi.org/10.1007/s10444-022-09951-5>
- [10] Polwang, A., Poochinapan, K. and Wongsaijai, B. (2025) Numerical Simulation of Wave Flow: Integrating the BBM-KdV Equation Using Compact Difference Schemes. *Mathematics and Computers in Simulation*, **236**, 70-89. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2025.03.012>
- [11] 付天浩, 王晓峰, 刘佳垚. RLW 方程六阶空间精度的线性守恒差分格式[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2025, 30(4): 395-401.
- [12] Hu, J., Li, J. and Wang, X. (2019) New High-Order Conservative Difference Scheme for Regularized Long Wave Equation with Richardson Extrapolation. *Thermal Science*, **23**, 737-745. <https://doi.org/10.2298/tsci180420088h>
- [13] 刘佳垚, 王晓峰, 钟瑞华. 求解 RLW 方程的能量守恒有限差分格式[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版), 2022, 35(2): 8-13.
- [14] 李骞. eKdV 型方程的共形广义多辛 Hamilton 保结构算法[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古师范大学, 2025.
- [15] 蔡树群, 等, 著. 内孤立波数值模式及其在南海区域的应用[M]. 北京: 海洋出版社, 2015.