Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(1), 194-197
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.151020

积分换元法的探讨

王　磊，张　燕

江苏科技大学理学院，江苏　镇江

收稿日期：2025年12月9日；录用日期：2026年1月2日；发布日期：2026年1月14日

摘　要

换元法是求解不定积分、定积分的主要方法。本文指出不定积分和反常积分换元函数需要单调，而定积分则不需要单调，且换元函数的值域可以超出原来的积分区间。

关键词

积分，换元法，单调

Discussion on the Method of Integration by Substitution

Lei Wang, Yan Zhang

School of Science, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang Jiangsu

Received: December 9, 2025; accepted: January 2, 2026; published: January 14, 2026

Abstract

The substitution method is a primary approach for solving indefinite integrals and definite integrals. This article points out that the substitution function for indefinite integrals and improper integrals needs to be monotonic, while for definite integrals, it does not need to be monotonic, and the range of the substitution function can exceed the original integration interval.

Keywords

Integration, Substitution Method, Monotonicity

文章引用: 王磊, 张燕. 积分换元法的探讨[J]. 应用数学进展, 2026, 15(1): 194-197. DOI: 10.12677/aam.2026.151020

1. 引言

换元法是求解不定积分和定积分的常用方法，选择合适的换元函数，牢记“换元要换限”。换元法其实运用的是矛盾转移的思想，把大矛盾转化为小矛盾，把不易求得的积分转化为相对容易求得的积分[1]。

2. 不定积分的换元法

换元函数需要单调。

定理 1 [1]：设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数，并且 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

其中 $\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数。

等式左边是 $F(x)+C$，是自变量 x 的函数；右边方括号内是关于自变量 t 的函数，只有反函数 $t=\psi^{-1}(x)$ 存在，把 t 代入后才能变成关于自变量 x 的函数。

比如在求解 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 时，令 $x=a\sin t$，需要限定 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，这时的函数 $x=\varphi(t)$ 才是单调的，且有反函数 $t=\arcsin x$。

3. 定积分的换元

换元函数 $x=\varphi(t)$ 不需要单调，且值域可以超出积分区间。

同济版的高等数学教材[2]是这样写的：

定理 2 [1]：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$)上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi=[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

但是教材加了注释：当 $\varphi(t)$ 的值域 R_φ 超出 $[a,b]$，但是 $\varphi(t)$ 满足其余条件时，只要 $f(x)$ 在 R_φ 上连续，则定理的结论仍成立。

例 1. $\int_0^a\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x,(a>0)$

解：方法 1 令 $x=a\sin t$；$x=0,t=0$，$x=a,t=\frac{\pi}{2}$，这时换元函数 $x=\varphi(t)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，$\varphi(t)$ 的值域 R_φ 恰好是 $[a,b]$。这时有

$$\int_0^a\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}a^3$$

方法 2 令 $x=a\sin t$，$x=0,t=\pi$，$x=a,t=\frac{5\pi}{2}$；通过函数图像容易看出这时函数 $x=a\sin t$ 在 $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$ 内不单调，且值域 R_φ 为 $[-a,a]$，已经超出了 $[0,a]$，此时有

$$\int_0^a \left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x = a^3\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\cos^3 t\mathrm{d}t = a^3\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\left(1-\sin^2\right)\mathrm{d}\sin t = \frac{2}{3}a^3,$$

结果还是$\frac{2}{3}a^3$。

例 2. 计算$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

解：方法 1 令$x=\sin t$；$x=0,t=0$，$x=1,t=\frac{\pi}{2}$，这时

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4},$$

这时候变换满足定理条件。

方法 2 令$x=\sin t$；$x=0,t=0$，$x=1,t=\frac{5\pi}{2}$，这时

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{5\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

这时候的函数$x=\sin t$在$\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$上不单调，且值域$R_\varphi=[-1,1]$也超出$[0,1]$。

结论：定积分换元法：① 不需要函数$x=\varphi(t)$单调；② $\varphi(t)$的值域R_φ可以超出$[a,b]$。

我们来证明这个定理，即证明以下公式成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t,\quad x=\varphi(t)$$

证明：假设$f(x)$的原函数是$F(x)$，那么左式等于$F(b)-F(a)$，右边积分的原函数记为$F[\varphi(t)]$，右式等于$F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$，这就证得左式等于右式，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$。

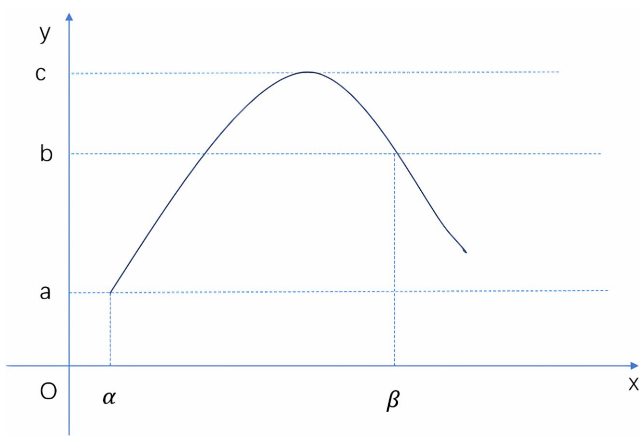

Figure 1. Graph of range exceeding the interval
图 1. 值域超出区间图

可以用图 1 来理解这个问题。当t：$\alpha\to\beta$时，$x=\varphi(t)$：$a\to b\to c\to b$，根据积分的区间可加性

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

可以看出超出区间$[a,b]$部分恰好抵消[3]。

还可以从物理意义来理解这个问题。定积分是第二类曲线积分的特例，这时曲线为直线且仅考虑x轴正向。第二类曲线积分用来描述做功、位移等问题。此时曲线积分就是$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，这里xoy面单连通，

$P(x,y)=x$，$Q(x,y)=0$，所以$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，由此得到此积分与路径无关，只和起点、终点有关[4]。

在高等数学课程中物理知识提及得比较多，要注重数学和物理的结合，从不同的角度思考、分析问题，这才能学得深、学得透。

4. 反常积分的换元

为保证极限转换的有效性，通常要求换元函数$x=\varphi(t)$ (至少在积分区间端点附近)是严格单调的。

例 3. 反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)^3}}$

解：$x=0$是瑕点，令$x=\frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，当$x\to 0^+$时，$t\to+\infty$，$x\to+\infty$时，$t\to 0^+$，此时

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)^3}}=-\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^3}}\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t)^3}}=2$$

这时做的变换$x=\frac{1}{t}$在$[0,+\infty]$上单调。反常积分中考察的是变量趋于无穷或瑕点时的极限，如果不单调的话，极限就可能不存在，也就没办法确定上下限[5]。

例 4. 反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$

解：$x=1$是瑕点，令$x=t^2+1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，当$x\to 1^+$时，$t\to 0^+$，$x\to+\infty$时，$t\to+\infty$，变换$x=t^2+1$在$(0,+\infty)$上单调，此时

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi$$

反例：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$，我们知道这个反常积分的正确结果是$\frac{\pi}{2}$

如果这里令$x=\tan t$，则$x=0$时，$t=0$，$x\to+\infty$时，$t\to\frac{3\pi}{2}$，于是$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{3\pi}{2}$，结果错误。因为这里的换元函数$x=\tan t$在$\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$内不是单调的！

基金项目

江苏省高校人工智能通识教育教学改革研究专项课题，《“知识图谱 +AI 赋能”的大学数学课程教学资源建设研究》，省级一般，课题批准文号：2024AIGE20；江苏省高等学校教育信息化研究课题，《“人工智能 + 多层知识图谱”的大学数学课程改革与创新发展研究》，省级重点，课题批准文号：2025JSETKT013。

参考文献

[1] 叶慧, 张燕. 大学数学的诗教之美[M]. 北京: 中国财政经济出版社, 2024: 28-29.

[2] 同济大学数学系. 高等数学(第八版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023: 261-262.

[3] 田钦谟. 广义积分换元法[J]. 工科数学, 1992, 4(8): 104-106.

[4] 周文斌. 定积分与不定积分第二类换元法不同形式的比较研究[J]. 山东农业工程学院学报, 2018, 35(8): 179-180.

[5] 景妮琴. 浅析反常积分的计算方法[J]. 学苑撷英, 2011(4): 53-57.