Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(1), 394-403
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.151038

Hans汉斯

一维奇异趋化–消耗系统古典解的整体有界性

殷　欢

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2025年12月21日；录用日期：2026年1月16日；发布日期：2026年1月23日

摘　要

本文研究在齐次Neumann边界条件下的具有奇异敏感性的趋化系统：$u_t = u_{xx} - \chi\left(\frac{u}{v^\alpha}v_x\right)_x$，$v_t = v_{xx} - uv^\beta$，其中$\chi > 0$。在一维情形下，当$\beta > \frac{1}{2}$及$\alpha \in \left(0, \min\left\{1, \frac{\beta+1}{2}\right\}\right]$时，系统存在整体有界的古典解。

关键词

趋化，奇异敏感，整体有界性

Global Boundedness of Solutions to a Chemotaxis-Consumption Systems with Singular Sensitivity in Dimension One

Huan Yin

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: December 21, 2025; accepted: January 16, 2026; published: January 23, 2026

Abstract

This paper deals with a chemotaxis system with singular sensitivity under homogeneous Neumann boundary condition: $u_t = u_{xx} - \chi\left(\frac{u}{v^\alpha}v_x\right)_x$, $v_t = v_{xx} - uv^\beta$ **with** $\chi > 0$**. Under one-dimensional setting, if** $\beta > \frac{1}{2}$ **and** $\alpha \in \left(0, \min\left\{1, \frac{\beta+1}{2}\right\}\right]$**, the system admits globally bounded classical solutions.**

文章引用: 殷欢. 一维奇异趋化-消耗系统古典解的整体有界性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(1): 394-403.
DOI: 10.12677/aam.2026.151038

Keywords

Chemotaxis, Singular Sensitivity, Global Boundedness

1. 引言

20 世纪 70 年代，由 Keller 和 Segel 提出的生物趋化模型凭借对生物“信号导向运动”机制的深刻刻画，现已成为生物数学领域的核心研究焦点之一。该模型既揭示了生命活动(如胚胎发育和伤口愈合等)的生物学价值，也在医学、生态和工程领域有着重要应用。

对于齐次 Neumann 边界条件下的具有奇异敏感的趋化－消耗系统：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot\left(\dfrac{u}{v}\nabla v\right), & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - uv, & x\in\Omega, t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = \dfrac{\partial v}{\partial v} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\chi>0$，$u=u(x,t)$ 表示细胞密度，$v=v(x,t)$ 表示化学信号浓度，$\Omega\in\mathbb{R}^n\ (n\ge 1)$ 为有界光滑区域，$\dfrac{\partial}{\partial v}$ 表示光滑边界 $\partial\Omega$ 上的单位法向量。Winkler 在文献[1]中得到了二维情况下，(1.1)存在整体广义解，当初始细胞质量充分小时，该广义解会变得光滑且经典；接着，在文献[2]中得到了二维情况下，小质量解的最终正则性与平衡态收敛，当 $t\to\infty$ 时，$u(x,t)\to\dfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0, v(x,t)\to 0$ 并且 $\dfrac{\nabla v(x,t)}{v(x,t)}\to 0$；进一步，在文献[3]中证明了，在 $n\ge 2$ 和径向对称的情况下，(1.1)对空间和初始数据大小没有了限制，始终存在全局广义解。

当考虑系统(1.1)非线性机制的趋化－消耗情形：

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \chi\nabla\cdot\left(\dfrac{S(u)}{v}\cdot\nabla v\right), \\ v_t = \Delta v - uv, \end{cases} \tag{1.2}$$

在一维情况下，Zhao 在文献[4]中证明若扩散率满足 $D(u)\ge D_0(u+1)^{m-1}$，$(D_0, m>0)$ 及密度信号控制的敏感度 $0<S(u)<D_1(u+1)M$，$(D_1, M>0)$，当 $0<m\le 1$，$M<\dfrac{2}{3}+\dfrac{5m}{6}$，或者 $m>1$，$M<1+\dfrac{m}{2}$ 时，系统具有全局有界的经典解。若系统(1.2)的第一个式子变成 $u_t=\nabla\cdot(D(u)\nabla u)-\nabla\cdot(uS(x,u,v)\cdot\nabla v)$，Winkler 在文献[5]中证明了在 n 维有界光滑区域中，若 $D(u)\ge k_D u^{m-1}\ (k_D>0)$ 和 $|S(x,u,v)|\le\dfrac{S_0(v)}{v^\alpha}$，当 $m>\dfrac{3n-2}{2n}$ 及 $\alpha\in[0,1)$ 时，该系统存在全局有界的经典解。

受以上结论启发，本文研究一维情形如下具有奇异敏感的趋化－消耗系统：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \chi\left(\dfrac{u}{v^{\alpha}} v_x\right)_x, & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = v_{xx} - uv^{\beta}, & x\in\Omega, t>0, \\ u_x = v_x = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\chi,\alpha,\beta>0$。敏感函数 $\frac{\chi}{v^{\alpha}}$ 刻画了细胞受化学信号刺激产生的奇异趋化强度，消耗项 $-uv^{\beta}$ 描述了化学信号接触细胞所产生的消耗效应。$\Omega\in\mathbb{R}$ 为有界区间，初始条件满足：

$$u_0\in C^0(\bar{\Omega})\ge 0 \text{ 且 } v_0\in W^{1,\infty}(\Omega)>0 \text{。}$$

定理 1.1 若 $\beta>\frac{1}{2}$ 及 $\alpha\in\left(0,\min\left\{1,\frac{\beta+1}{2}\right\}\right]$，系统(1.3)存在整体有界的古典解。

2. 预备知识

根据 Banach 不动点理论，可以得到以下解的局部存在性，具体证明参见文献[6]。

引理 2.1 假设 $u_0\in C^0(\bar{\Omega})$ 和 $v_0\in W^{1,\infty}(\Omega)$ 非负。若 $\chi,\alpha,\beta>0$，则存在 $T_{\max}\in(0,\infty]$ 及唯一非负函数 $(u,v)\in\left(C^0(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{2,1}(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max}))\right)^2$ 在古典解意义下满足系统(1.3)。另外，当 $T_{\max}<\infty$ 时，$\lim\limits_{t\to T_{\max}}\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}=\infty$。

令 (u,v) 是模型(1.3)的局部古典解，我们有关于 u,v 的先验估计。

引理 2.2 设 $\chi>0$，则

$$\int_{\Omega}u(\cdot,t)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}u_0\mathrm{d}x=:m_0, t\in(0,T_{\max}), \tag{2.1}$$

$$v(x,t)\le\|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}, (x,t)\in\Omega\times(0,T_{\max}) \text{。} \tag{2.2}$$

3. 对于 $\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 的情况

本节将给出当 $\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 及 $\alpha\in\left(0,\frac{\beta+1}{2}\right]$ 时古典解整体有界性的证明。

引理 3.1 设 $\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 及 $\alpha\in\left(0,\frac{\beta+1}{2}\right]$，对于 $p>1$ 及 $q>2$，令

$$F=\int_{\Omega}u^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega}v^{-q+1}|v_x|^q\mathrm{d}x,$$

则存在 $c_i(q)>0(i=1,\cdots,4)$ 和 $\Gamma=\Gamma(p,q,\chi)>0$，有

$$\begin{aligned} F'+F+\frac{2(p-1)}{p}\int_{\Omega}\left|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x &\le \Gamma\int_{\Omega}u^{\frac{p(q+2)}{q}}v^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\mathrm{d}x+\Gamma\int_{\Omega}u^{\frac{q+2}{2}}v^{\frac{-q+\beta q+2\beta}{2}}\mathrm{d}x \\ &\quad+\left(c_3+\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{q}{2}}\right)\int_{\Omega}v\mathrm{d}x+\int_{\Omega}u^p\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

证明 首先，根据(1.3)的第一个方程，通过分部积分以及 Young 不等式，令 $p>1$，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p\mathrm{d}x&=-p(p-1)\int_\Omega u^{p-2}u_x^2\mathrm{d}x+p(p-1)\chi\int_\Omega u^{p-1}v^{-\alpha}u_xv_x\mathrm{d}x\\&\le-\frac{2(p-1)}{p}\int_\Omega\left|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x+\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\int_\Omega u^pv^{-2\alpha}v_x^2\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}\tag{3.2}$$

接着，由文献[5]中引理 3.3、3.4、3.5 知，当 $q>2$，存在 $c_i(q)>0(i=1,\cdots,4)$，有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^{-q+1}|v_x|^q\mathrm{d}x+c_1\int_\Omega v^{-q+1}v_x^{q-2}|v_{xx}|^2\mathrm{d}x+c_2\int_\Omega v^{-q-1}v_x^{q+2}\mathrm{d}x\\&\le c_3\int_\Omega v\mathrm{d}x+c_4\int_\Omega uv^{-q+1+\beta}v_x^{q-2}|v_{xx}|\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

再根据 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\int_\Omega u^pv^{-2\alpha}v_x^2\mathrm{d}x\le&\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{2}{q}}\left(\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\right)^{\frac{q+2}{q}}\int_\Omega u^{\frac{p(q+2)}{q}}v^{\frac{2(q+2)-2(q+2)\alpha}{q}}\mathrm{d}x\\&+\frac{c_2}{3}\int_\Omega v^{-q-1}|v_x|^{q+2}\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{3.4}$$

和

$$\begin{aligned}c_4\int_\Omega uv^{-q+1+\beta}v_x^{q-2}|v_{xx}|\mathrm{d}x\le& c_1\int_\Omega v^{-q+1}v_x^{q-2}|v_{xx}|^2\mathrm{d}x+\frac{c_2}{3}\int_\Omega v^{-q-1}v_x^{q+2}\mathrm{d}x\\&+\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{q-2}{4}}\left(\frac{c_4^2}{4c_1}\right)^{\frac{q+2}{4}}\int_\Omega u^{\frac{q+2}{2}}v^{\frac{-q+\beta q+2\beta}{2}}\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{3.5}$$

以及

$$\int_\Omega v^{-q+1}|v_x|^q\mathrm{d}x\le\frac{c_2}{3}\int_\Omega v^{-q-1}(v_x)^{q+2}\mathrm{d}x+\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{q}{2}}\int_\Omega v\mathrm{d}x。\tag{3.6}$$

接下来，令

$$F=\int_\Omega u^p\mathrm{d}x+\int_\Omega v^{-q+1}|v_x|^q\mathrm{d}x，$$

取 $\Gamma=\max\left\{\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{2}{q}}\left(\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\right)^{\frac{q+2}{q}},\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{q-2}{4}}\left(\frac{c_4^2}{4c_1}\right)^{\frac{q+2}{4}}\right\}$，结合(3.2)~(3.6)可得(3.1)。

引理 3.2 设 $\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 及 $\alpha\in\left(0,\frac{\beta+1}{2}\right]$，对于 $p>1$ 及 $q>2$，则存在与 p,q 有关的常数 $c_5>0$，有

$$\int_\Omega u^p\mathrm{d}x+\int_\Omega v^{-q+1}|v_x|^q\mathrm{d}x<c_5，\quad t\in(0,T_{\max})。\tag{3.7}$$

证明 当 $\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 和 $\alpha\in\left(0,\frac{\beta+1}{2}\right]$ 时，我们取 $\max\left\{2,p,\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right\}<q<\max\left\{2+p,\frac{2\beta}{1-\beta}\right\}$，则有 $\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}\ge0$，$\frac{-q+\beta q+2\beta}{2}\ge0$，$\frac{2pq+4q-2q}{pq+q}<2$，$\frac{q}{p+1}<2$ 成立。

根据(2.1)，(2.2)，Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式，首先对(3.1)不等式右侧第一项计算，有

$$\begin{aligned}\Gamma\int_\Omega u^{\frac{p(q+2)}{q}}v^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\mathrm{d}x&\le\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2(q+2)}{q}}(\Omega)}^{\frac{2(q+2)}{q}}\\&\le\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\left[C_{GN}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(q+2)a}{q}}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{2(q+2)(1-a)}{q}}+C_{GN}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{2(q+2)}{q}}\right]\\&\le\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}C_{GN}m_0^{\frac{2pq+2p}{pq+q}}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2pq+4p-2q}{pq+q}}+C_{GN}m_0^{\frac{pq+2p}{q}}\\&\le\frac{2(p-1)}{3p}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2+c_6,\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 $a=\dfrac{p-\frac{q}{q+2}}{p+1}\in(0,1)$， $C_{GN}=C_{GN}(n,q,\sigma,\Omega)>0$，

$$c_6=\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}C_{GN}m_0^{\frac{pq+2p}{q}}+\left(\frac{2(p-1)}{3p}\right)^{\frac{pq+2p-q}{2q-2p}}\left(\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}C_{GN}m_0^{\frac{2pq+2p}{pq+q}}\right)^{\frac{pq+q}{2q-2p}}。$$

接下来对(3.1)不等式右侧第二项计算，有

$$\begin{aligned}\Gamma\int_\Omega u^{\frac{q+2}{2}}v^{\frac{-q+\beta q+2\beta}{2}}\mathrm{d}x&\le\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{-q+\beta q+2\beta}{2}}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{q+2}{p}}(\Omega)}^{\frac{q+2}{p}}\\&\le\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{-q+\beta q+2\beta}{2}}\left[C_{GN}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{(q+2)b}{p}}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{(q+2)(1-b)}{q}}+C_{GN}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{q+2}{p}}\right]\\&\le C_{GN}m_0^{\frac{2p^2+pq+2p}{2pq+2q}}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{q}{p+1}}+C_{GN}m_0^{\frac{q+2}{2}}\\&\le\frac{2(p-1)}{3p}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2+c_7,\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 $b=\dfrac{p-\frac{2p}{q+2}}{p+1}\in(0,1)$， $C_{GN}=C_{GN}(n,q,\sigma,\Omega)>0$，

$$c_7=\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{-q+\beta q+2\beta}{2}}C_{GN}m_0^{\frac{q+2}{2}}+\left(\frac{3p}{2(p-1)}\right)^{\frac{q}{2p+2-q}}\left(\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{-q+\beta q+2\beta}{2}}C_{GN}m_0^{\frac{2p^2+pq+2p}{2pq+2q}}\right)^{\frac{2p+2}{2p+2-q}}。$$

再对(3.1)不等式右侧最后一项计算，有

$$\int_\Omega u^p\mathrm{d}x=\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le C_{GN}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(p-1)}{p+1}}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{4}{p+1}}+C_{GN}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|\le\frac{2(p-1)}{3p}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2+c_8,\tag{3.10}$$

其中$C_{GN}=C_{GN}\left(n,q,\sigma,\Omega\right)>0$，$c_8=C_{GN}m_0^p+\left(\frac{3p}{2\left(p-1\right)}\right)^{\frac{p-1}{2}}C_{GN}m_0^p$。

接下来，结合(2.2)、(3.1)、(3.8)、(3.9)和(3.10)，存在与t无关的常数$c_9>0$，有

$$F+F'\le c_9,\quad t\in\left(0,T_{\max}\right),$$

通过常数变易法，有

$$F\le c_5=\max\left\{c_9,\int_\Omega u_0^p\mathrm{d}x+\int_\Omega v_0^{-q+1}\left|\left(v_0\right)_x\right|^q\mathrm{d}x\right\},\quad t\in\left(0,T_{\max}\right),$$

得证。

引理 3.3 设$\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，$\alpha\in\left(0,\frac{\beta+1}{2}\right]$，则存在与$t$无关的常数$L_1>0$，有

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\le L_1,\quad t\in\left(0,T_{\max}\right)。\tag{3.11}$$

证明 根据(1.3)的第一个方程，通过热半群理论有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}&\le\left\|\mathrm{e}^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}}u_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\chi\int_0^t\left\|\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\left(\frac{u}{v^\alpha}v_x\right)_x\right\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}+c_{10}\int_0^t\left[1+\left(t-s\right)^{-\frac{3}{4}}\right]\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left\|\frac{u}{v^\alpha}v_x\right\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}s,\ t\in\left(0,T_{\max}\right),\end{aligned}\tag{3.12}$$

其中$c_{10}>0$为与t无关的常数。

接下来，对不等式右侧最后一项计算，有

$$\left\|\frac{u}{v^\alpha}v_x\right\|_{L^2(\Omega)}\le\int_\Omega u^{4+\frac{1}{2(1-\alpha)}}\mathrm{d}x+\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{8(1-\alpha)}\int_\Omega v^{-\left(8+\frac{1}{1-\alpha}\right)+1}\left|v_x\right|^{8+\frac{1}{1-\alpha}}\mathrm{d}x+2|\Omega|,\quad t\in\left(0,T_{\max}\right),\tag{3.13}$$

将(3.13)代入到(3.12)中，并结合(2.1)、(3.7)可得(3.11)。

再根据引理 2.1 知$T_{\max}=\infty$，定理 1.1 中$\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$的情况得证。

4. 对于$\beta>1$的情况

本节将给出当$\beta>1,\alpha\in\left(0,1\right)$时的完整证明，首先进行如下变换：

$$w\left(x,t\right):=-\ln\frac{v\left(x,t\right)}{\left\|v_0\left(x\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}},\tag{4.1}$$

系统(1.3)将被转换为

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+\chi\left[uw_x\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{1-\alpha}\right]_x, & x\in\Omega,t>0,\\ w_t=w_{xx}-w_x^2+u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1}, & x\in\Omega,t>0,\\ u_x=w_x=0, & x\in\partial\Omega,t>0,\\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),w\left(x,0\right)=-\ln\frac{v_0\left(x\right)}{\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}}, & x\in\Omega.\end{cases}\tag{4.2}$$

引理 4.1 设 $\beta>1$，$\alpha\in(0,1)$，则存在与 t 无关的常数 $c_{11}>0$，使得

$$\int_\Omega w_x^2\mathrm{d}x\le c_{11},\quad t\in(0,T_{\max})。\tag{4.3}$$

证明 根据(4.2)，并结合 w 的齐次 Neumann 边界条件，知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\ln u\mathrm{d}x&=\int_\Omega \ln u\left\{u_{xx}+\chi\left[uw_x\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{1-\alpha}\right]_x\right\}\mathrm{d}x\\&\le-\int_\Omega\frac{u_x^2}{u}\mathrm{d}x+\chi\int_\Omega u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{1-\alpha}w_{xx}\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}\tag{4.4}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w_x^2\mathrm{d}x&=-2\int_\Omega w_{xx}^2\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\int_\Omega\left(w_x^3\right)_x\mathrm{d}x-2\int_\Omega u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1}w_{xx}\mathrm{d}x\\&=-2\int_\Omega w_{xx}^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1}w_{xx}\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}\tag{4.5}$$

根据 Poincaré 不等式，我们有

$$\int_\Omega w_x^2\mathrm{d}x\le c_{12}\int_\Omega w_{xx}^2\mathrm{d}x,\tag{4.6}$$

其中 $c_{12}>0$。

接着，令

$$G(t)=\int_\Omega u\ln u\mathrm{d}x+\int_\Omega w_x^2\mathrm{d}x,\tag{4.7}$$

根据(4.4)~(4.7)，和 $u\ln u\le u^2\ (u>0)$，以及 Young 不等式和(2.2)，有

$$G'(t)\le-\frac{1}{c_{12}}G(t)+\int_\Omega u^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{u_x^2}{u}\mathrm{d}x+c_{13},\quad t\in(0,T_{\max}),\tag{4.8}$$

其中 $c_{13}=\frac{4^4}{5^5}\left(\frac{\chi^2}{2}\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2(1-\alpha)}+2\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2(\beta-1)}+\frac{1}{c_{12}}\right)^5$。

通过 Gagliardo-Nirenberg 不等式，Young 不等式和(2.1)，有

$$\int_\Omega u^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x\le C_{GN}\left\|\left(u^{\frac{1}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\left\|u^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{7}{2}}+C_{GN}\left\|u^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^{5}\le c_{14}\left(\int_\Omega\frac{u_x^2}{u}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{4}}+C_{GN}m_0^{\frac{5}{2}},\tag{4.9}$$

其中 $C_{GN}=C_{GN}(n,q,\sigma,\Omega)>0$，$c_{14}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}C_{GN}m_0^{\frac{7}{4}}$。

又通过 Young 不等式和(4.9)、(4.10)，有

$$\begin{aligned}G'(t)&\le-\frac{1}{c_{12}}G(t)+c_{14}\left(\int_\Omega\frac{u_x^2}{u}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{4}}+C_{GN}m_0^{\frac{5}{2}}-\int_\Omega\frac{u_x^2}{u}\mathrm{d}x+c_{13}\\&\le-\frac{1}{c_{12}}G(t)+c_{15},\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}\tag{4.10}$$

其中 $c_{15}=C_{GN}^4m_0^7\frac{3^3}{4^4}+C_{GN}m_0^{\frac{5}{2}}+c_{13}$。

最后，根据 Gronwall's 不等式，有

$$G(t) \le c_{16} = \int_\Omega u_0 \ln u_0 \mathrm{d}x + \int_\Omega (w_0)_x^2 \mathrm{d}x + c_{12}c_{15}, \quad t \in (0, T_{\max})，得证。$$

引理 4.2 设 $\beta > 1$，$\alpha \in (0,1)$，则存在与 t 无关的常数 $c_{17} > 0$，使得

$$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega w_x^4 \mathrm{d}x \le c_{17}, \quad t \in (0, T_{\max})。 \tag{4.11}$$

证明 根据(4.2)，已知在 $\partial\Omega$ 上 $w_x = 0$，通过 Young 不等式，有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x &= -2\int_\Omega u_x^2 \mathrm{d}x - 2\chi\int_\Omega u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \mathrm{e}^{-w}\right)^{1-\alpha} u_x w_x \mathrm{d}x \\ &\le -\int_\Omega u_x^2 \mathrm{d}x + \chi^2 c_{18}\int_\Omega u^2 w_x^2 \mathrm{d}x, \ t \in (0, T_{\max}), \end{aligned} \tag{4.12}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w_x^4 \mathrm{d}x &= 4\int_\Omega w_x^3 \left[w_{xx} - w_x^2 + u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1} \right]_x \mathrm{d}x \\ &\le -6\int_\Omega w_x^2 w_{xx}^2 \mathrm{d}x + 6c_{19}\int_\Omega u^2 w_x^2 \mathrm{d}x, \ t \in (0, T_{\max}), \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 $c_{18} = \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2(1-\alpha)}$，$c_{19} = \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2(\beta-1)}$。

令

$$H(t) = \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega w_x^4 \mathrm{d}x, \tag{4.14}$$

结合(4.12)~(4.14)，有

$$H'(t) \le -H(t) - \int_\Omega u_x^2 \mathrm{d}x + c_{20}\int_\Omega u^2 w_x^2 \mathrm{d}x - 6\int_\Omega w_x^2 w_{xx}^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega w_x^4 \mathrm{d}x, \tag{4.15}$$

其中 $c_{20} = c_{18}\chi^2 + 6c_{19}$。

类似地，通过 Gagliardo-Nirenberg 不等式，Young 不等式和(2.1)，有

$$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \le C_{GN} m_0^{\frac{4}{3}} \left(\int_\Omega u_x^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} + C_{GN} m_0^2, \tag{4.16}$$

$$\int_\Omega w_x^4 \mathrm{d}x \le 4^{\frac{1}{3}} C_{GN} c_{11}^{\frac{4}{3}} \left(\int_\Omega w_x^2 w_{xx}^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} + C_{GN} c_{11}^2, \tag{4.17}$$

其中，$C_{GN} = C_{GN}(n, q, \sigma, \Omega) > 0$。

接着，令 $\theta > 1$，通过 Hölder 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式和(2.1)、(4.3)，有

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^2 w_x^2 \mathrm{d}x &\le \left(\int_\Omega u^{2\theta} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_\Omega w_x^{\frac{2\theta}{\theta-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \\ &\le \left(C_{GN} m_0^{2(1-a)} \left(\int_\Omega u_x^2 \mathrm{d}x\right)^a + C_{GN} m_0^2\right)\left(4^b C_{GN} c_{11}^{1-b} \left(\int_\Omega w_x^2 w_{xx}^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{b}{2}} + C_{GN} c_{11}\right), \end{aligned} \tag{4.18}$$

其中 $a = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2\theta}\right) < 1$，$b = \dfrac{2}{3\theta} < 1$，并且 $a + \dfrac{b}{2} = \dfrac{2}{3} < 1$。

接着，结合(4.15)~(4.18)，有

$$\begin{aligned} H'(t) \le& -H(t) - \int_\Omega u_x^2 \mathrm{d}x - 6\int_\Omega w_x^2 w_{xx}^2 \mathrm{d}x + C_{GN} m_0^{\frac{4}{3}} \left(\int_\Omega u_x^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} + C_{GN} m_0^2 + 4^{\frac{1}{3}} C_{GN} c_{11}^{\frac{4}{3}} \left(\int_\Omega w_x^2 w_{xx}^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \\ &+ C_{GN} c_{11}^2 + c_{20}\left[C_{GN} m_0^{2(1-a)} \left(\int_\Omega u_x^2 \mathrm{d}x\right)^a + C_{GN} m_0^2\right]\left[4^b C_{GN} c_{11}^{1-b} \left(\int_\Omega w_x^2 w_{xx}^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{b}{2}} + C_{GN} c_{11}\right], \ t \in (0, T_{\max}). \end{aligned}$$

通过 Young 不等式，存在与 t 无关的常数 $c_{21}>0$，

$$H'(t)\le -H(t)+c_{21},$$

通过常数变易法，得到(4.11)。

引理 4.3 设 $\beta>1$，$\alpha\in(0,1)$，则存在与 t 无关的常数 $L_2>0$，有

$$\|w_x\|_{L^\infty(\Omega)}\le L_2,\quad t\in(0,T_{\max})。\tag{4.19}$$

证明 根据(4.2)的第二个方程，通过(4.11)，Hölder 不等式和热半群理论，有

$$\begin{aligned}\|w_x\|_{L^\infty(\Omega)}&\le\left\|\left(\mathrm{e}^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}}w_0\right)_x\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\int_0^t\left\|\left(\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}w_x^2\right)_x\right\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s+\int_0^t\left\|\left(\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1}\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\&\le\|w_0'\|_{L^\infty(\Omega)}+c_{22}\int_0^t\left[1+(t-s)^{-\frac{3}{4}}\right]\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)}\left\|w_x^2\right\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\quad+c_{22}\int_0^t\left[1+(t-s)^{-\frac{3}{4}}\right]\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)}\left\|u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1}\right\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}s,\ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}$$

而且

$$\left\|u\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1}\right\|_{L^2(\Omega)}\le\|u\|_{L^2(\Omega)}\left\|\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_{23}\|u\|_{L^2(\Omega)},\quad t\in(0,T_{\max}),$$

其中 $c_{22},c_{23}>0$ 为与 t 无关的常数，进而得到(4.19)。

引理 4.4 设 $\beta>1$，$\alpha\in(0,1)$，则存在与 t 无关的常数 $L_3>0$，有

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\le L_3,\quad t\in(0,T_{\max})。\tag{4.20}$$

证明 根据(4.2)的第一个方程，通过(2.1)、(4.19)和热半群理论，有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}&\le\left\|\mathrm{e}^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}}u_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\int_0^t\left\|\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\chi\left(uw_x\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{\beta-1}\right)_x\right\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}+c_{24}\int_0^t\left[1+(t-s)^{-1}\right]\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)}\chi\left\|uw_x\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{1-\alpha}\right\|_{L^1(\Omega)}\mathrm{d}s,\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}$$

其中 $c_{24}>0$ 为与 t 无关的常数。并且

$$\left\|uw_x\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{1-\alpha}\right\|_{L^1(\Omega)}\le\|u\|_{L^1(\Omega)}\left\|\left(\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{e}^{-w}\right)^{1-\alpha}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_x\|_{L^\infty(\Omega)},\quad t\in(0,T_{\max}),$$

进而得到(4.20)，根据引理 2.1，知 $T_{\max}=\infty$，证毕。

5. 讨论

本文讨论了具奇异敏感的趋化－消耗模型，在一维情形中，根据消耗项中指标 β 相对于 1 的大小证明了弱奇异敏感情形古典解的整体有界性。具体的，当 $\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 及 $\alpha\in\left(0,\frac{\beta+1}{2}\right]$ 时，根据恰当泛函结构建立了古典解的整体有界性，当 $\beta>1$ 及 $\alpha\in(0,1)$ 时，借助恰当的变换及转化后系统的能量估计可以得到古典解的整体有界性。直观上，消耗作用会导致化学信号会趋于 0，从而消耗效应在指标 β 大时反而减弱，这与结论中 $\beta>\frac{1}{2}$ 吻合。另外，当在化学信号小时，敏感函数在指标 α 小时奇异性减弱，这有利于得

到解的整体有界性，这与 $\alpha \in \left(0, \min\left\{1, \frac{\beta+1}{2}\right\}\right]$ 的条件吻合。由于高维情形很难构造衰减的泛函结构来得到有效的估计，需精细分析模型结构发展新的分析工具，未来对于解的长时间行为，以及当 $\beta \le \frac{1}{2}$ 时解的整体有界性还有待完善。

参考文献

[1] Winkler, M. (2016) The Two-Dimensional Keller-Segel System with Singular Sensitivity and Signal Absorption: Global Large-Data Solutions and Their Relaxation Properties. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 987-1024. https://doi.org/10.1142/s0218202516500238

[2] Winkler, M. (2016) The Two-Dimensional Keller-Segel System with Singular Sensitivity and Signal Absorption: Eventual Smoothness and Equilibration of Small-Mass Solutions. Preprint.

[3] Winkler, M. (2018) Renormalized Radial Large-Data Solutions to the Higher-Dimensional Keller-Segel System with Singular Sensitivity and Signal Absorption. *Journal of Differential Equations*, **264**, 2310-2350. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.029

[4] Zhao, X. (2021) Boundedness to a Quasilinear Chemotaxis-Consumption System with Singular Sensitivity in Dimension One. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **72**, Article No. 185. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01614-7

[5] Winkler, M. (2022) Approaching Logarithmic Singularities in Quasilinear Chemotaxis-Consumption Systems with Signal-Dependent Sensitivities. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **27**, Article 6565. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2022009

[6] Lankeit, E. and Lankeit, J. (2019) Classical Solutions to a Logistic Chemotaxis Model with Singular Sensitivity and Signal Absorption. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **46**, 421-445. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.09.012.